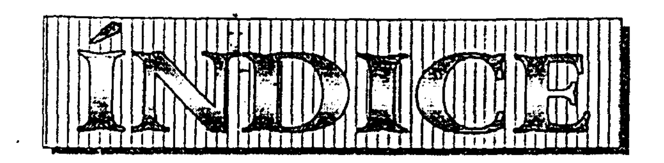
APUNTES Y PROBLEMAS DE

CALCULO I

Patty Mach



CONTENIDO:



I NÚMEROS REALES Y DESIGUALDADES

II FUNCIONES

III VECTORES EN EL PLANO

Patty Llach

VIII INTEGRALES

IX APLICACIONES DE LAS INTEGRALES

'APUNTES Y PROBLEMAS DE CÁLCULO I", es un Texto que contiene la teoría básica del Cálculo I (Cálculo ie una variable real). Problemas resueltos y Problemas Propuestos, con sus correspondientes resultados.

iu contenido se adapta plenamente a los programas de estudio en actual vigencia en las Carreras de todas as Instituciones de Educación Superior. Esta nueva edición, revisada y actualizada servirá plenamente a Catedráticos y estudiantes que precisan del cálculo.

Se agradecen las excelentes sugerencias brindadas por distinguidos catedráticos de Matemáticas.

El Autor

I.- NÚMEROS REALES Y DESIGUALDADES

En este Capítulo se brindan los fundamentos del Sistema numérico, en particular lo relativo a los Números Reales, simbolizado por $\mathbb{R}$, sus Propiedades, Teoremas, Inecuaciones y Valor Absoluto.

I-1 LOS NÚMEROS REALES

El Conjunto de los Números Reales $\mathbb{R}$, comprende a los Números Racionales (Q) e Irracionales (Q'); por tanto incluye a los Positivos $\mathbb{R}^+$, Negativos $\mathbb{R}^-$, el Cero (0), Enteros (Z), Fraccionarios (Z'), Naturales (N).

El CALCULO I, opera con los Números Reales, de manera que todos los análisis a realizar se efectuarán con esta clase de Números.

Se entiende por Axioma a una proposición evidente por si misma, es decir que no precisa de demostración ni argumentación alguna. Un Teorema es una proposición que para ser aceptada como verdadera, antes debe ser demostrada.

El Método matemático para establecer una Teoría consiste en tomar unos cuantos Axiomas, para en base a ellos establecer Teoremas, la reunión ordenada en forma sistemática de Teoremas constituye una Teoría.

Sin embargo cuando se procura un enfoque práctico, no es conveniente usar directamente el concepto de Axioma, siendo mejor llamarla Propiedad, en el sentido de que se trata de una caracteristica que cumple un Conjunto de números.

Las Propiedades de los Números Reales, que constituyen el sostén básico de los Teoremas y de la Teoría del Cálculo de Números Reales son:

	Si: $a, b, c \in \mathbb{R}$	
A1	$a + b = b + a$	Conmutatividad de la Suma
A2	$a + (b + c) = (a + b) + c$	Asociatividad de la Suma
A3	$a + 0 = a$	Existencia de Neutro Aditivo (0)
A4	$a + (-a) = 0$	Existencia de Opuesto Aditivo ($-a$)
A5	$a \cdot b = b \cdot a$	Conmutatividad del Producto
A6	$a(b \cdot c) = (a\, b)c$	Asociatividad del Producto
A7	$a \cdot 1 = a$	Existencia de Neutro Multiplicativo (1)
A8	$a(a^{-1}) = 1$	Existencia de Inverso Multiplicativo (a^{-1}), $a \neq 0$
A9	$a(b + c) = a\, b + a \cdot c$	Distributividad de Producto a Suma
A10	a es positivo $(a > 0)$ a es Cero $(a = 0)$ a no es positivo $(a < 0)$	Ley de Tricotomía
A11	$a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$	Clausura de la Suma
	$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$	Clausura del Producto

Estas Propiedades determinan que el conjunto de los Números Reales, con las operaciones de suma y producto se constituya en una Estructura algebraica llamada CAMPO o CUERPO CONMUTATIVO. Sin embargo para una total estructuración del Cálculo de Números Reales, se debe agregar el llamado Axioma del Supremo

I-2 TEOREMAS DE LOS NÚMEROS REALES

Los Principales Teoremas de los Números Reales son:

T1) Si: $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

T2) Si: $ac = bc \Rightarrow a = b$

T3) Si: $a + x = b \Rightarrow x = b - a$

T4) $a \cdot 0 = 0$

T5) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$

T6) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

T7) $-(-a) = a$

T8) $(ab) = (-a)(-b)$

T9) $a(b - c) = ab - ac$

T10) $ax = b,\ a \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{b}{a}$

T11) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

T12) $a + a = 2a$

T13) $-a = (-1)a$

T14) $aa = a^2$

T15) $a^0 = 1,\ a \neq 0$

T16) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

T17) $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$

T18) $(a^m)^n = a^{mn}$

Para demostrar los Teoremas de los Números Reales, se deben usar los Axiomas o Propiedades de los Números Reales, indicados anteriormente, también se pueden usar otros Teoremas, previamente demostrados.

Ej I-1 Demostración de T1 Si: $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

$a + c = b + c$	Partiendo de la Proposición original
$(-c) = (-c)$	Por A4 (Existencia del Opuesto)
$(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$	Sumando (-c) a ambos miembros de la Igualdad
$a + [c + (-c)] = b + [c + (-c)]$	Por A2 (Asociatividad de la Suma)
$a + 0 = b + 0$	Por A4 (Existencia del Opuesto)
$a = b$	Por A3 (Existencia del Neutro Aditivo)

Así queda demostrada el Teorema, mediante las Propiedades indicadas.

I-1 Demostrar los siguientes Teoremas de los Números Reales:

a) Si: $a + x = a \Rightarrow x = 0$ — Este Teorema es una generalización de T1

$a + x = a$	Por la Proposición original
$(-a) = (-a)$	Por A4
$(a + x) + (-a) = a + (-a)$	Sumando (-a)
$(x + a) + (-a) = a + (-a)$	Por A1
$x + [a + (-a)] = a + (-a)$	Por A2
$x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$	Por A4 y por A3, queda demostrado el Teorema.

b) Demostrar: $0 + 0 = 0$

$a + 0 = a$	Usando A3, considerando que el Número Real: a, puede ser igual a cero.
$0 + 0 = 0$	Reemplazando, queda demostrado el Teorema.

c) Demostrar T2: Si: $ac = bc,\ c \neq 0 \Rightarrow a = b$

$a\,c = b \cdot c$	Por la Proposición original
$c^{-1} = c^{-1}$	Por A8, existe el Inverso de: c, es c^{-1}
$(a\,c)(c^{-1}) = (b \cdot c)(c^{-1})$	Multiplicando por c^{-1} ambos miembros
$a(c\,c^{-1}) = b(c \cdot c^{-1})$	Por A6
$a(1) = b(1)$	Por A8
$a = b$	Por A7, queda demostrado el Teorema.

1-2 Demostrar los siguientes Teoremas de los Números Reales

a) Demostrar: T4 $a \cdot 0 = 0$

Se inicia la demostración a partir de una Identidad

$0 + 0 = 0$ — Por la consecuencia de: P-1-b

$a(0 + 0) = a(0)$ — Por A9

$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$ — Por A4, ya que: $a \cdot 0 \in \mathbb{R}$

$(-a \cdot 0) = (-a \cdot 0)$ — Sumando $(-a \cdot 0)$ a ambos miembros

$(a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (-a \cdot 0)$ — Por A2

$a \cdot 0 + [a \cdot 0 + (-a \cdot 0)] = a \cdot 0 + (-a \cdot 0)$ — Por A4

$a \cdot 0 + 0 = 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$ — Por A3, queda demostrado el Teorema.

b) Demostrar: T6 $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

$(-a + a)b = (-a + a)b$ — Partiendo de una Identidad

$(-a)b + ab = 0b$ — Por A9, A4

$(-a)b + ab = 0$ — Por P-1-2-a

$(-ab) = (-ab)$ — Por A8, existe: $(-ab) = -(ab)$

$[(-a)b + ab] + (-ab) = 0 + (-ab)$ — Sumando a ambos miembros: $(-ab)$

$(-a)b + [ab + (-ab)] = (-ab)$ — Por A2, A3

$(-a)b + 0 = -ab$ — Por A4 y por A3, queda demostrada la 1era Igualdad.

$(-a)b = -(ab)$ — la 2da es equivalente.

c) Demostrar: T8 $(-a)(-b) = ab$

$(-a)(-b) = (-a)(-b)$ — Partiendo de una Identidad

$-(ab) = (-a)b$ — Por P-1-2-a, ya demostrada

$(-a)(-b) + (-ab) = (-a)(-b) + (-a)b$ — Sumando miembro a miembro

$(-a)(-b) + (-ab) = (-a)(-b + b)$ — Por A9

$(-a)(-b) + (-ab) = (-a)(0)$ — Por A4

$(-a)(-b) + (-ab) = 0$ — Por P-1-1-c

$ab = ab$ — Existe el Números Real: ab

$[(-a)(-b) + (-ab)] + ab = 0 + ab$ — Sumando a ambos miembros: ab

$(-a)(-b) + [(-ab) + ab] = ab$ — Por A2, A3

$(-a)(-b) + 0 = ab$ — Por A4

$(-a)(-b) = ab$ — Por A3, queda demostrado el Teorema

d) Demostrar: T10 $ax = b \Rightarrow x = \dfrac{b}{a}$; $a \neq 0$

$ax = b$ — De la Proposición original

$a^{-1} = a^{-1}$ — Por A8, existe: a^{-1} ; $a \neq 0$

$(ax)a^{-1} = ba^{-1}$ — Multiplicando ambos miembros por: a^{-1}

$(xa)a^{-1} = ba^{-1}$ — Por A5

$x(aa^{-1}) = ba^{-1}$ — Por A6

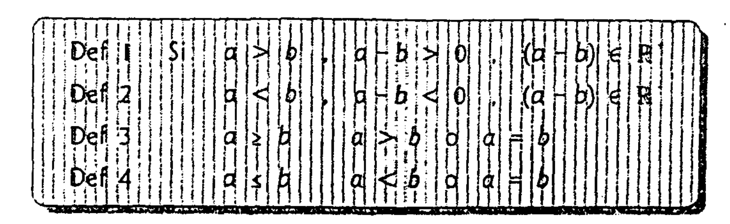
$x(1) = ba^{-1}$ — Por A8

$x = ba^{-1}$ — Por A7

$x = \dfrac{b}{a}$ — Por convenio: $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

I-3 TEOREMAS SOBRE DESIGUALDADES

Para operar con los signos de desigualdad (> Mayor, < Menor), es preciso definir lo siguiente:



Def 1	Si	$a > b$,	$a - b > 0$,	$(a - b) \in \mathbb{R}^+$
Def 2		$a < b$,	$a - b < 0$,	$(a - b) \in \mathbb{R}^-$
Def 3		$a \geq b$	$a > b$ o $a = b$	
Def 4		$a \leq b$	$a < b$ o $a = b$	

Los Axiomas o Propiedades de los Números Reales: A10, A11, A12, permiten demostrar los Teoremas sobre desigualdades, de los cuales los principales son:

TD-1 Si: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a > b$, $a = b$, $a < b$

TD-2 Si: $a > b$, $b > c \Rightarrow a > c$

TD-3 Si: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

TD-4 Si: $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

TD-5 $1 \in \mathbb{R}$ $1 > 0$

TD-6 Si: $a > b \Rightarrow -a < -b$

TD-7 Si $ab > 0$ $\Rightarrow a > 0$ y $b > 0$; $\Rightarrow a < 0$ y $b < 0$

TD-8 Si: $a > b$; $c > 0 \Rightarrow ac > bc$
$a > b$; $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

TD-9 Si: $a > b$; $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

TD-10 Si: $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

TD-11 Si: $0 \leq a < b$; $0 \leq c < d$

TD-12 Si: $b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b}$, $a < -\sqrt{b}$

TD-13 Si: $b > 0 \Rightarrow a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

Ej 1-2 Demostración de TD-2 Si: $a > b$; $b > c \Rightarrow a > c$

Para la demostración se usan los Axiomas o Propiedades de los Números Reales, sobre Desigualdades y las anteriores definiciones.

$a > b$	$b > c$	Partiendo de las Proposiciones originalmente dadas.
$a - b > 0$	$b - c > 0$	Por la definición: Def 1
$(a - b) \in \mathbb{R}^+$	$(b - c) \in \mathbb{R}^+$	
$[(a - b) + (b - c)] \in \mathbb{R}^+$		Por A11, Clausura de la Suma
$(a - c) \in \mathbb{R}^+$		Simplificando
$(a - c) > 0 \Rightarrow a > c$		Por la definición: Def 1

1-3 Demostrar los siguientes Teoremas sobre Desigualdades.

a) TD-3 Si: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$a > b \Rightarrow a - b > 0$	Partiendo de la Proposición original
$(a - b) \in R^+$	Por la definición Def 1
$(a - b + c - c) \in R^+$	Sumando y restando: c (No afecta a la Expresión)
$[(a + c) - (b + c)] > R^+$	Reordenando
$(a + c) - (b + c) > 0 \Rightarrow a + c > b + c$	Por la definición: Def 1

b) Si: $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow ab > 0$ Variante de TD-7

$a < 0$	$b < 0$	Partiendo de las Proposiciones originales Por definición.
$a \notin R^+$	$b \notin R^+$	
$-a \in R^+$	$-b \in R^+$	Por A12, Clausura del Producto de Reales.
$(-a)(-b) \in R^+ \Rightarrow (-a)(-b) \in R^+ \Rightarrow ab > 0$		Por P-1-2-b, Teorema ya demostrado $(-a)(-b) = ab$

1-4 Demostrar los siguientes Teoremas de los Números Reales, sobre Desigualdades.

a) Demostrar TD-8: Si: $a > b \; , c > 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$

$a > b \; , c < 0 \;\Rightarrow\; ac < bc$

$a > b \; , \; c > 0$	$a > b \; , \; c < 0$	
$a - b > 0$	$a - b > 0 \qquad c \notin \mathbb{R}^+$	Por la Def I
$(a-b) \in \mathbb{R}^+, \;\; c \in \mathbb{R}^+$	$(a-b) \in \mathbb{R}^+, \;\; (-c) \in \mathbb{R}^+$	
$c(a-b) \in \mathbb{R}^+$	$(-c)(a-b) \in \mathbb{R}^+$	Por A12
$(ac - bc) \in \mathbb{R}^+$	$(-ac + bc) \in \mathbb{R}^+$	Simultáneamente se demuestran ambas Proposiciones.
$ac - bc > 0$	$-ac + bc > 0$	
$ac > bc$	$bc > ac$	
	$ac < bc$	

b) Demostrar: Si: $a < 0 \;\Rightarrow\; a^2 > 0$

Si: $a < 0 \; , \; a < 0$ — Reiterando la Proposición original

$a \cdot a > 0$ — Por P-1-2-b ya demostrado, así se demuestra que todo Número Real al cuadrado es positivo.

$a^2 > 0$

c) Demostrar: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad \forall \; a, b, c \in \mathbb{R}$

$(a-b)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 \geq 2ab$

$(a-c)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a^2 - 2ac + c^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a^2 + c^2 \geq 2ac$

$(b-c)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; b^2 - 2ac + c^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; b^2 + c^2 \geq 2bc$

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$

$\Rightarrow\; a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

Por P-1-4-b (Todo Número Real al cuadrado es positivo).

Desarrollando cada binomio y sumando para cada miembro de la desigualdad.

d) Demostrar Si: $0 < a < b \;\Rightarrow\; a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$

Si: $a < b \; , a > 0$

$a \cdot a < b \cdot a$

$a^2 < ab$

$a < \sqrt{ab}$

$a < b \;\Rightarrow\; a - b < 0$

$(a-b)^2 > 0$

$a^2 - 2ab + b^2 > 0$

$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab > 4ab$

$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$

$(a+b)^2 > 4ab$

$(\dfrac{a+b}{2})^2 > ab$

$\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \;\Rightarrow\; \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

$a < b$

$a + b < b + b$

$a + b < 2b$

$\dfrac{a+b}{2} < b$

Se usó P-1-4-a, para la demostración de la 1era Desigualdad.

Al demostrarse cada Desigualdad, queda demostrado el Teorema

e) Demostrar TD-11: $0 < a < b \; , \; 0 < c < d \;\Rightarrow\; ac < db$

Si: $0 < c < d \;\Rightarrow\; c > 0$; Si: $a < b \;\Rightarrow\; ac < bc$ — Por P-1-4-a (TD-8)

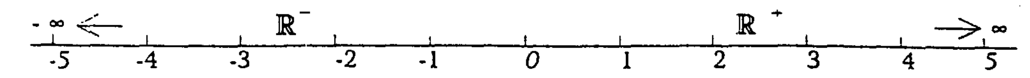
Si: $0 < a < b \;\Rightarrow\; b > 0$; Si: $c < d \;\Rightarrow\; cb < db$ — Por P-1-4-a (TD-8)

$\Rightarrow$ Si $ac < bc \; , \; bc < bd \;\Rightarrow\; ac < bd$ — Por consecuencia de TD-2

De similar modo se pueden demostrar los Teoremas sobre Desigualdades, tanto los citados anteriormente, como los que se presentarán posteriormente.

1-4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Los Números Reales: $\mathbb{R}$, se representan gráficamente como puntos de una Recta, llamada Recta Real, la asociación de puntos a Números Reales es biunívoca. (A un punto un número, a un número un punto)



En una escala adecuada, se representan los Números Reales, así los que están a la derecha del cero son los positivos (R^+), a la izquierda están los negativos (R^-); el cero no es ni positivo ni negativo. Note que la longitud empleada entre los números 0 y 1 es la escala que se emplea, para cada par de números enteros representados.

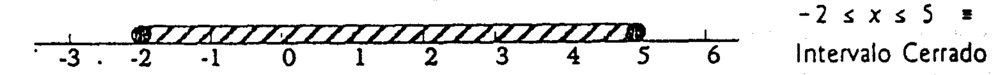
INTERVALOS

El Conjunto de puntos: x de la Recta Real, tales como: $a \leq x \leq b$ se llama Intervalo Cerrado (Incluye a sus extremos: a, b), se escribe también como: $[a, b]$

El Conjunto de puntos: x de la Recta Real, tales como: $a < x < b$ se llama Intervalo Abierto (No incluye a sus extremos: a, b), se escribe también como: $]a, b[$ Pueden presentarse también Intervalos Semiabiertos o Semicerrados, si es que se incluye a uno solo de sus extremos.

Para graficar Intervalos se usan los Puntos llenos (●) y los Puntos vacíos (○), para representar respectivamente la inclusión o no de sus extremos.

Ej 1-3 Se grafica el Intervalo: $-2 \leq x \leq 5$



$-2 \leq x \leq 5 \equiv [-2, 5]$
Intervalo Cerrado

1-5 Graficar los siguientes Intervalos de Números Reales:

a) $1 < x \leq 6$

$1 < x \leq 6 \equiv]1,6]$
Intervalo Semiabierto o Semicerrado

b) $1 < x < \frac{3}{2}$

$0 < x < 3/2 \equiv]0,3/2[$
Intervalo Abierto

c) $x \geq 3$

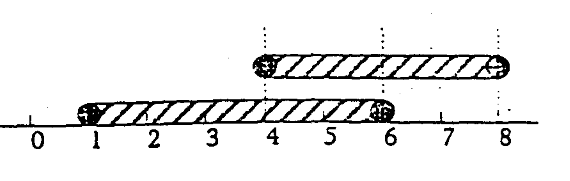
$x \geq 3 \equiv 3 \leq x < \infty$
$\equiv [3,\infty[$ Intervalo Semiabierto

OPERACIONES ENTRE INTERVALOS

Dado que los Intervalos son Conjuntos, entre ellos se definen las Operaciones de Conjuntos de: Unión, Intersección, Diferencia y Complemento:

Ej 1-4 En los Intervalos: I_1: $1 \leq x \leq 6$; I_2: $4 \leq x \leq 8$ se efectúan las Operaciones:

Unión	$I_1 \cup I_2$	$1 \leq x \leq 8$
Intersección	$I_1 \cap I_2$	$4 \leq x \leq 6$
Diferencia	$I_1 \setminus I_2$	$1 \leq x < 4$
	$I_2 \setminus I_1$	$6 < x \leq 8$
Complemento	$\overline{I_1}$	$-\infty < x < 1$; $6 < x < \infty$
	$\overline{I_2}$	$-\infty < x < 4$; $8 < x < \infty$



I-5 INECUACIONES

Las Inecuaciones, son Ecuaciones que en lugar de un signo de Igualdad, poseen signos de Desigualdad.

La Solución de una Inecuación está constituida por uno o varios Intervalos de Números Reales. (Se trabajará solamente con Inecuaciones de una sola Incógnita)

Por tanto toda vez que quede resuelta una Inecuación se la debe expresar como un Intervalo.

Si al resolver una inecuación se logra un resultado tal como: $x < a$ se sobreentiende que equivale al intervalo $-\infty < x < a$, tal como en la gráfica.

Un artificio es que tras lograr el resultado de la forma $x < a$, se grafica el mismo y observando tal gráfica se escribe el intervalo.

$x < a$

a

$\Rightarrow \quad -\infty < x < a$

Si al resolver una inecuación se logra un resultado tal como: $x > a$ se sobreentiende que equivale a $a < x < \infty$, como se aprecia en la gráfica.

Similarmente tras obtener el resultado $x > a$ se grafica sobre la Recta Real y de la gráfica se escribe el Intervalo resultante.

$x > a$

a

$\Rightarrow \quad a < x < \infty$

Las Inecuaciones se clasifican de acuerdo al grado de su Incógnita.

I-6 INECUACIONES LINEALES

Son Inecuaciones que poseen Incógnitas Lineales (De grado: 1)

Para resolver Inecuaciones Lineales, se aplican reglas equivalentes a las Ecuaciones Lineales. Además tome en cuenta que al multiplicar ambos miembros de una Desigualdad por un número negativo, la Desigualdad se invierte: TD-8

Ej I-5 Son Inecuaciones Lineales: $3x - 7 < 11$ $\quad 1 < x - 2 < 8$

$8 - 2x \geq 5 - 5x \quad 0 \leq 2x - 5 \leq 7$

Ej I-6 Se resuelve la Inecuación Lineal: $3x - 7 \leq 11$

$$3x - 7 \leq 11$$
$$3x \leq 11 + 7$$
$$3x \leq 18$$
$$x \leq 18/3$$
$$\Rightarrow \quad x \leq 6$$

Despejando la Incógnita x, como si se tratara de una Ecuación, se obtiene:

$x \leq 6$

-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

$\Rightarrow \quad -\infty < x \leq 6 \quad : \quad]-\infty, 6]$

Para obtener el Intervalo de solución a partir del resultado se grafica y a partir de esta gráfica se obtiene el Intervalo de solución.

La Inecuación contiene también a la Igualdad, por ello se deben incluir a los Extremos en el Intervalo de solución. Sin embargo se debe tener cuidado de no incluir a $-\infty, \infty$ ya que no son Números Reales, los Intervalos solo deben contener a Números Reales.

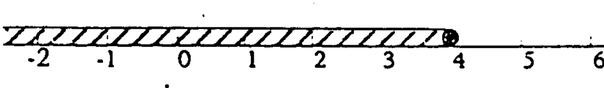
1-6 Resolver las Inecuaciones Lineales, graficar las soluciones

a) $6x - 2 \leq 3x + 10$

Ordenando la Inecuación y despejando a su incógnita, su resultado se expresa de diversas maneras:

$$6x - 2 \leq 3x + 10$$
$$6x - 3x \leq 10 + 2$$
$$3x \leq 12$$
$$\Rightarrow \quad x \leq 4$$

$x \leq 4$



$\Rightarrow \quad -\infty < x \leq 4 \quad \Rightarrow \quad]-\infty, 4]$

b) $11 - 2x < 1$

$$11 - 2x < 1$$
$$-2x < 1 - 11$$
$$-2x < -10 \quad \cdot(-1)$$
$$2x > 10 \Rightarrow x > 5$$

Para despejar la incógnita, se debe multiplicar por un número negativo, pero esto hace además que la Desigualdad se invierta.

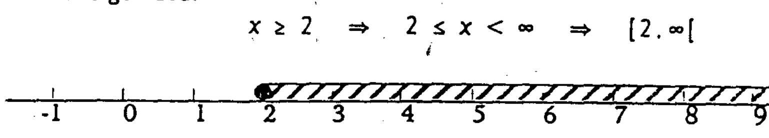
$$x > 5 \Rightarrow 5 < x < \infty \Rightarrow]5, \infty[$$

c) $7 + 3x \leq 4x + 5$

$$7 + 3x \leq 4x + 5$$
$$3x - 4x \leq 5 - 7$$
$$-x \leq -2 \quad \cdot(-1)$$
$$x \geq 2$$

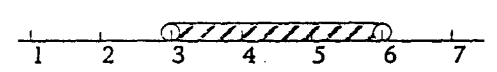
Luego de reordenar la Inecuación, se multiplica por (-1), lo que invierte la Desigualdad.

$$x \geq 2 \Rightarrow 2 \leq x < \infty \Rightarrow [2, \infty[$$



Ej 1-7 Se resuelve la Inecuación Lineal: $1 < x - 2 < 4$

$$1 < x - 2 < 4$$
$$+2 \quad +2 \quad +2$$
$$3 < x < 6$$



La Inecuación posee dos desigualdades, para resolverla: Se suma 2 a los tres miembros, así queda despejado: x

La Solución se escribe también como:

Cs: $3 < x < 6$; $]3,6[$

1-7 Resolver las siguientes Inecuaciones Lineales:

a) $-1 \leq 2x + 7 \leq 9$

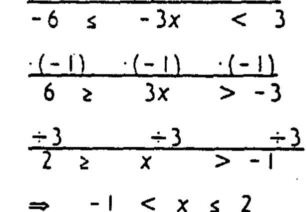
$$-1 \leq 2x + 7 \leq 9$$
$$-7 \quad -7 \quad -7$$
$$-8 \leq 2x \leq 2$$
$$\div 2 \quad \div 2 \quad \div 2$$
$$-4 \leq x \leq 1$$

La Inecuación posee dos desigualdades, para resolverla, se deben efectuar las mismas operaciones en los tres miembros. Se resta 7; luego se divide entre dos, para que así quede despejado: x

El resultado se expresa como un Intervalo cerrado del siguiente modo:

Cs: $-4 \leq x \leq 1 \Rightarrow [-4, 1]$

c) $-1 \leq 5 - 3x < 8$

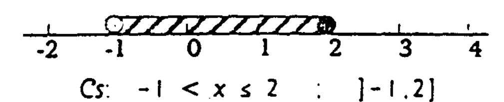


$$-1 \leq 5 - 3x < 8$$
$$-5 \quad -5 \quad -5$$
$$-6 \leq -3x < 3$$
$$\cdot(-1) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1)$$
$$6 \geq 3x > -3$$
$$\div 3 \quad \div 3 \quad \div 3$$
$$2 \geq x > -1$$
$$\Rightarrow -1 < x \leq 2$$

Inecuación Lineal de dos desigualdades. Efectuando operaciones sobre los tres miembros:

Se resta: 5; se multiplica por (-1), lo que invierte las Desigualdades; dividiendo luego entre 3, para terminar de despejar.

Por la Equivalencia de: "*a* es mayor que *b*" con "*b* es menor que *a*", se escribe el resultado en otro sentido.



Cs: $-1 < x \leq 2$; $]-1, 2]$

d) $3 < x - 2 < \infty$

$$3 < x - 2$$
$$x > 5$$

Todos los Números Reales, son menores a infinito, entonces es innecesario operar con el infinito, trabajando solo con la primera desigualdad.

Cs: $5 < x < \infty$; $]5, \infty[$

e) $-\infty < 2x - 3 \leq 5$

$$2x - 3 \leq 5$$
$$x \leq 4$$

Todos los Números Reales, son mayores a menos infinito, entonces es innecesario operar con $-\infty$, trabajando solo con la segunda desigualdad.

Cs: $-\infty < x \leq 4$; $]-\infty, 4]$

1-9 Por la Regla de los signos, resolver las siguientes Inecuaciones Cuadráticas y de Grado Superior:

a) $x^2 + 1 < 0$

$x^2 + 1 < 0$

No se puede factorizar la Expresión, por tanto la Inecuación no posee raíces. Toda la Recta Real se constituye en un solo Intervalo.

$-\infty \qquad 0 \qquad \infty$

Reemplazando un valor interior al único Intervalo en la Inecuación original, se obtiene una Proposición Falsa (F).

Si: $x = 0 \qquad x^2 + 1 < 0$

$0^2 + 1 < 0$

$\Rightarrow \quad 1 < 0 \quad (F)$

Por tanto: 0 no es Solución, consecuentemente no es Solución el Intervalo al que pertenece.

Como el único Intervalo (Que es toda la Recta Real) no es Solución, entonces ningún Intervalo o Número Real es Solución de la Inecuación.

F

$-\infty \qquad 0 \qquad \infty$

Como Conjunto solución solo se puede escribir al Vacío $Cs: \varnothing$

b) $x^2 + x + 2 > 0$

$x^2 + x + 2 > 0$

Inecuación Cuadrática, donde no es posible factorizar, por tanto la Inecuación no posee raíces.

$-\infty \qquad 0 \qquad \infty$

Toda la Recta Real es un solo Intervalo.

Si: $x = 0 \qquad x^2 + x + 2 > 0$

$0^2 + 0 + 2 > 0$

$\Rightarrow \quad 2 > 0 \quad (V)$

Reemplazando un valor interior al único Intervalo, en la Inecuación original se obtiene una Proposición Verdadera.

Entonces el único Intervalo (Toda la Recta Real) es Solución, por tanto todos los Reales son Solución.

V

$-\infty \qquad 0 \qquad \infty$

El Conjunto Solución es Cs: $\mathbb{R}$ o también: $Cs: -\infty < x < \infty$

c) $x^2 - 6x + 9 < 0$

$x^2 - 6x + 9 < 0$

$(x - 3)(x - 3) < 0$

Al factorizar se obtienen dos raíces iguales entre sí.

Se ubican las raíces sobre la Recta Real, asumiendo que existe un Intervalo entre los Extremos 3 y 3 (Así sea que el Intervalo no contiene a ningún Número)

$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

Si: $x = 0 \qquad x^2 - 6x + 9 < 0$

$0^2 - 6 \cdot 0 + 9 < 0$

$9 < 0 \quad (F)$

Reemplazando un valor interior a un Intervalo, en la Inecuación original, se obtiene una Proposición Falsa (F)

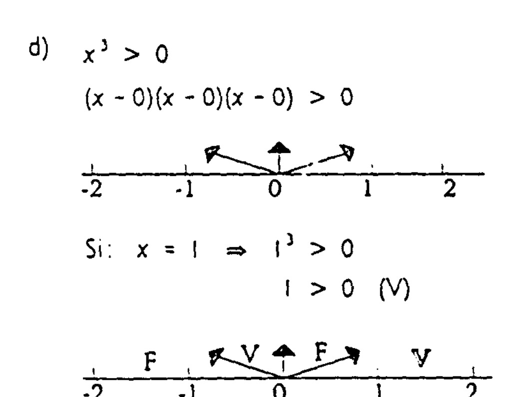
Alternadamente los restantes Intervalos son o no de Solución.

F V F

$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

Sin embargo como el Intervalo de Solución no contiene a ningún elemento, el Conjunto Solución es el Vacío.

$Cs: \ 3 < x < 3 \ \Rightarrow \ Cs: \ \varnothing$

d) 

La Inecuación Cúbica, posee tres raíces iguales en cero.

Ubicándolas sobre la Recta Real.

Reemplazando un valor cualquiera interior a uno de los Intervalos, se obtiene una Proposición Verdadera (V)

Por el Método, se determinan los Intervalos de Solución, tome en cuenta que el intervalo $0 < x < 0$, no contiene a ninguna Solución.

Los Intervalos de la forma $a < x < a$ no contienen a ningún elemento, luego se verifica que: $a < x < a = \varnothing$

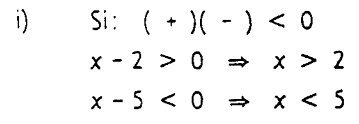
$Cs: \ 0 < x < 0 \ , \ 0 < x < \infty \equiv 0 < x < \infty$

ANÁLISIS DE POSIBILIDADES

Este Método de resolución de Inecuaciones Cuadráticas y de Grado Superior, consiste en el estudio de los signos de sus factores. Dentro de cada posibilidad de signos que satisfacen la Inecuación, se resolverá por la Intersección, para luego unir los resultados de cada posibilidad.

Ej 1-10 Se resolverá por Análisis de posibilidades: $x^2 + 10 < 7x$

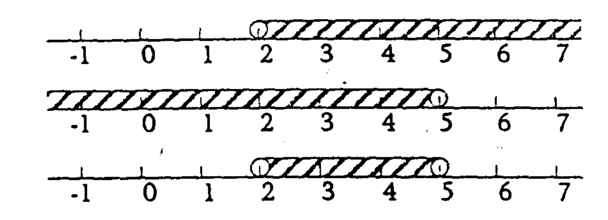
$x^2 + 10 < 7x$	Inecuación Cuadrática
$x^2 - 7x + 10 < 0$	Refiriendo la Inecuación respecto a cero.
$(x - 2)(x - 5) < 0$	Factorizando, se presentan dos factores
$(+)(-) < 0$ $(-)(+) < 0$	Para satisfacer la Desigualdad dada, existen dos posibilidades, de acuerdo al signo de cada factor, analizando cada una de esas posibilidades :

i) 

Si: $(+)(-) < 0$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$

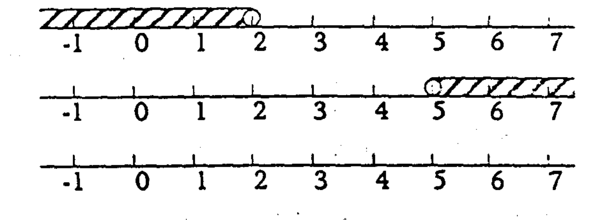


El Conjunto Solución de la posibilidad es la Intersección $\cap$: $2 < x < 5$

ii) Si: $(-)(+) < 0$

$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

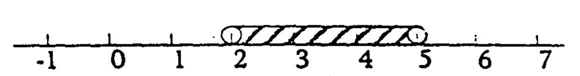
$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$



El Conjunto Solución de la posibilidad es la Intersección $\cap$: $\emptyset$

La Unión de resultados obtenidos en cada posibilidad es el Conjunto Solución:

$2 < x < 5 \cup \emptyset \Rightarrow$ Cs: $2 < x < 5$



Los resultados del Ej 1-9; Ej 1-10 coinciden, sin embargo comparando procedimientos, se concluye que es mas práctico el Método de la Regla de los signos.

1-10 Por el Método de Análisis de posibilidades resolver: $1 - x^2 > 0$

$1 - x^2 > 0$	$(+)(+) > 0$	Al factorizar la Inecuación Cuadrática se presentan dos factores. Existen por tanto dos posibilidades, de acuerdo a los signos de los factores.
$(1 + x)(1 - x) > 0$	$(-)(-) > 0$	

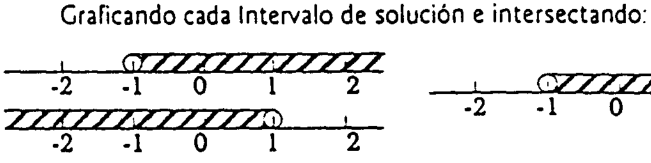
i) Si: $(+)(+) > 0$

$1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$

$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$\cap$: $-1 < x < 1$

Graficando cada Intervalo de solución e intersectando:



ii) Si: $(-)(-) > 0$

$1 + x < 0 \Rightarrow x < -1$

$1 - x < 0 \Rightarrow x > 1$

$\cap$ $\emptyset$

Graficando cada Intervalo de solución e intersectando.

Uniendo resultados de: i); ii) Cs: $-1 < x < 1 \cup \emptyset$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

1-8 INECUACIONES ALGEBRAICAS

Las Inecuaciones Algebraicas, son Inecuaciones de Expresiones Algebraicas, donde la incógnita puede tener potencias negativas o fraccionarias. Las Inecuaciones Trascendentes, son Inecuaciones con Expresiones Trascendentes, tales como las Logarítmicas o Trigonométricas.

Ej 1-11 Son Inecuaciones Algebraicas: $x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x} \geq 0$; $\frac{12}{x-2} < 4$

Son Inecuaciones Trascendentes: $Sen\,x - 1 \leq 0$; $1 + Log\,x > 0$

Tanto las Inecuaciones Algebraicas como las Trascendentes, pueden resolverse por la Regla de los signos, o por Análisis de posibilidades, además deben tomarse en cuenta los Teoremas sobre Desigualdades: (1-3)

Ej 1-12 Se resuelve la Inecuación Algebraica: $\frac{12}{x-2} < 4$ por el Método de la Regla de los signos:

$\frac{12}{x-2} < 4$ Inecuación Algebraica

$\frac{12}{x-2} - 4 < 0$ Refiriendo la Inecuación respecto a cero, es decir, llevando todo al 1^er^ miembro dejando solo a 0 en el 2^do^ miembro

$\frac{12 - 4(x-2)}{x-2} < 0$ Luego efectuando la resta de fracciones.

$\frac{-4(x-5)}{x-2} < 0$ Ordenando y factorizando tanto el numerador como denominador, para buscar raíces.

La raíz por el numerador está en: $x = 5$; la raíz por el denominador está en: $x = 2$.

0 1 2 3 4 5 6 (flechas en 2 y 5) Ubicando ambas raíces sobre la Recta Real.

Si: $x = 0 \Rightarrow \frac{12}{x-2} < 4$ Reemplazando un valor cualquiera, interior a cualquier Intervalo, se obtiene una Proposición verdadera (V).

$\frac{12}{0-2} < 4 \Rightarrow -6 < 4$ (V) Por tanto, el valor reemplazado es Solución, asimismo el Intervalo de donde se tomó el valor.

V (0–2), F (2–5), V (5–6) Por alternabilidad se determinan si los restantes Intervalos son de Solución.

El Conjunto Solución contiene a dos Intervalos:

$Cs: \; -\infty < x < 2 \; ; \; 5 < x < \infty$

En la Inecuación inicial, no es correcto enviar a multiplicar el denominador del 1^er^ miembro al 2^do^ Ya que tal denominador contiene a la incógnita, por tanto no se conoce su signo. De ser positivo mantendrá la desigualdad, pero de ser negativo invierte la desigualdad al pasar a multiplicar. Por tanto al existir incertidumbre no se puede efectuar esa operación.

b) $\frac{1+x}{1-x} > 0$ Inecuación Algebraica a resolver.

-2 -1 0 1 2 (flechas en -1 y 1) Directamente se observa que posee dos raíces, una por el numerador (En -1), otra por el denominador (En 1) las que se ubican sobre la Recta Real

Si: $x = 0 \Rightarrow \frac{1+0}{1-0} > 0 \Rightarrow 1 > 0$ (V) Reemplazando un valor interior a un Intervalo, se obtiene: (V)

F (antes de -1), V (-1 a 1), F (después de 1) Por alternabilidad, se logra el Conjunto Solución

$Cs: \; -1 < x < 1$

I-11 Resolver la siguiente Inecuación Algebraica por la Regla de los signos

$$\frac{3}{x} \geq 1$$

Inecuación Algebraica. Llevando todo al 1[er] miembro

$$\frac{3}{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{-(x-3)}{x} \geq 0$$

Ubicando sobre la Recta Real todas las raíces, tanto del numerador como denominador.

-1 0 1 2 3 4

Reemplazando un valor interior a un Intervalo, se obtiene V

Aplicando luego la alternabilidad para los Intervalos de Solución (V) o no de Solución (F)

$$\text{Si: } x = 1 \Rightarrow \frac{3}{1} \geq 1 \quad (V)$$

El Conjunto Solución $Cs:\ 0 < x \leq 3$

F V F

-1 0 1 2 3 4

Note que por la desigualdad en la Inecuación inicial, se deberían incluir a los extremos en la Solución,

-1 0 1 2 3 4

Sin embargo solo se incluye uno de los Extremos (3), el otro no (0). Para así evitar la división entre cero de la Inecuación original

I-12 Por la Regla de los signos, resolver las siguientes Inecuaciones Algebraicas:

a) $$\frac{6x-18}{x-5} \geq 4$$

Inecuación Algebraica. Trasladando todo a un solo miembro.

$$\frac{6x-18}{x-5} \geq 4$$

Efectuando operaciones y factorizando, de manera de hallar las raíces.

$$\frac{6x-18}{x-5} - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{2(x+1)}{x-5} \geq 0$$

Ubicando todas las raíces sobre la Recta Real.

-2 -1 0 1 2 3 4 5 6

Reemplazando en la Inecuación dada, un valor cualquiera, interior a uno de los Intervalos.

$$\text{Si: } x = 0 \Rightarrow \frac{6 \cdot 0 - 18}{0 - 5} \geq 4 \Rightarrow 3.6 \geq 4 \quad (F)$$

Se obtiene F, lo que indica que el valor reemplazado no es Solución, como tampoco lo és el Intervalo al que pertenece.

V F V

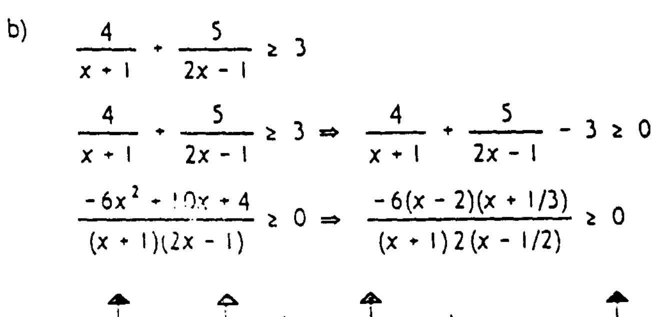
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6

-2 -1 0 1 2 3 4 5 6

Alternadamente se hallan los Intervalos de Solución. Note la inclusión de Extremos, pero no se incluye a 5, para así evitar la división entre cero de la Inecuación original.

$$Cs:\ -\infty < x \leq -1\ ;\ 5 < x < \infty$$

b)



$$\frac{4}{x+1} + \frac{5}{2x-1} \geq 3$$

Inecuación Algebraica

Refiriendo la Inecuación a cero.

$$\frac{4}{x+1} + \frac{5}{2x-1} \geq 3 \Rightarrow \frac{4}{x+1} + \frac{5}{2x-1} - 3 \geq 0$$

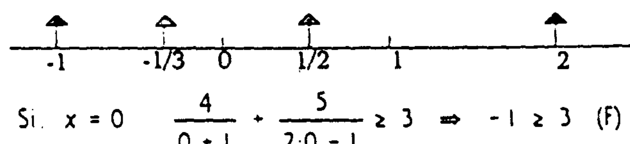
Sumando fracciones, ordenando y factorizando. Se observan dos raíces en el numerador, otras dos en el denominador.

$$\frac{-6x^2+10x+4}{(x+1)(2x-1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{-6(x-2)(x+1/3)}{(x+1)2(x-1/2)} \geq 0$$

Ubicando las raíces sobre la Recta Real

-1 -1/3 0 1/2 1 2

Reemplazando un valor cualquiera interior a un Intervalo.



$$\text{Si. } x = 0 \quad \frac{4}{0+1} + \frac{5}{2 \cdot 0 - 1} \geq 3 \Rightarrow -1 \geq 3 \quad (F)$$

Se obtiene F, entonces el valor tomado y su Intervalo no son de Solución

Por alternabilidad se determinan los otros Intervalos de Solución.

F V F V F

-1 -1/3 0 1/2 1 2

$$Cs:\ -1 < x \leq -1/3\ ,\ 1/2 < x \leq 2$$

-1 -1/3 0 1/2 1 2

Note la inclusión de Extremos, evitando a los que llevan a división entre cero

1-13 Aplicando la Regla de los signos, resolver las siguientes Inecuaciones:

a) $\dfrac{x}{x-4} < \dfrac{x-4}{x}$ Inecuación Algebraica

$\dfrac{x}{x-4} < \dfrac{x-4}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{x-4} - \dfrac{x-4}{x} < 0$ Llevando todo al 1er miembro.

Efectuando operaciones entre fracciones algebraicas.

$\dfrac{x^2-(x-4)^2}{(x-4)x} < 0 \Rightarrow \dfrac{8(x-2)}{x(x-4)} < 0$ Por factorización, se determinan las raíces tanto del numerador, como denominador.

Se ubican todas las raíces sobre la Recta Real.

-1 0 1 2 3 4 5

Tomando un valor interior (-1) a cualquier Intervalo, se reemplaza en la Inecuación original.

Si: $x=-1$ $\dfrac{-1}{-1-4} < \dfrac{-1-4}{-1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{5} < 5$ (V)

Como se obtiene una Proposición Verdadera, el valor y su Intervalo son de Solución.

Luego sobre la Recta Real los Intervalos son o no de Solución (V o F), por alternabilidad.

V F V F
-1 0 1 2 3 4 5

El Conjunto Solución, contiene dos Intervalos.

$Cs: \ -\infty < x < 0 \ , \ 2 < x < 4$

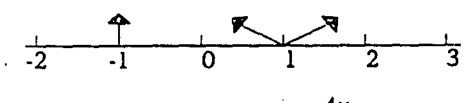
-1 0 1 2 3 4 5

b) $x+1 > \dfrac{4x}{x+1}$ Inecuación Algebraica. Llevando todo al 1er miembro.

$x+1 > \dfrac{4x}{x+1}$ Efectuando operaciones de Fracciones algebraicas.

$x+1-\dfrac{4x}{x+1} > 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x+1} > 0$ Por factorización, se determinan las raíces del numerador y denominador.

Se ubican todas las raíces sobre la Recta Real, note que hay dos raíces iguales en: 1; ambas raíces deben insertarse



De todas maneras se considera como un Intervalo más, (Aunque no contenga ningún valor) el que se encuentra en: $1 < x < 1$

Si: $x=0 \Rightarrow x+1 > \dfrac{4x}{x+1}$

$\Rightarrow 1 > 0$ (V)

Tomando un valor, se reemplaza en la Inecuación original. Se obtiene una Proposición Verdadera, el valor y su Intervalo son de Solución.

F V F V
-2 -1 0 1 2 3

Luego por alternabilidad, El Conjunto Solución, contiene dos Intervalos:

$Cs: \ -1 < x < 1 \ ; \ 1 < x < \infty$

-2 -1 0 1 2 3

También se escribe como: $Cs: \ -1 < x < \infty \ ; \ x \neq 1$

c) $\dfrac{9}{x^2+9} < 0$

No es posible factorizar el denominador, por tanto la Inecuación no posee raíces, entonces toda la Recta Real, es un solo Intervalo.

$-\infty$ 0 ∞

Si: $x=0 \Rightarrow \dfrac{9}{0^2+9} < 0$

$\Rightarrow 1 < 0$ (F)

Reemplazando un valor, se obtiene F, entonces ni el valor reemplazado ni toda la Recta Real son Solución. El Conjunto Solución es el Vacío $\emptyset$.

I-14 Resolver las siguientes Inecuaciones Algebraicas y Trascendentes:

a) $\sqrt{3x+7} < 5$

$$\sqrt{3x+5} < 5$$
$$(\sqrt{3x+7})^2 < 5^2$$
$$3x+7 < 25$$
$$x < 6$$
$$Cs: \quad -\infty < x < 6$$

Inecuación con Radicales, es Algebraica, se asume que se toma solo la raíz positiva del radical.

Aplicando el Teorema TD-10 de las Desigualdades que expresa:
Si: $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$; entonces elevando al cuadrado ambos miembros, despejando: x

0 1 2 3 4 5 6 7

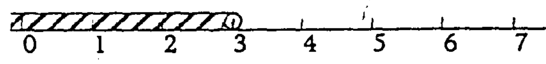
b) $2^x \leq 8$

$$2^x \leq 8$$
$$Log(2^x) \leq Log\,8$$
$$x\,Log\,2 \leq Log\,8$$
$$x \leq \frac{Log\,8}{Log\,2}$$
$$x \leq 3$$
$$Cs: \quad -\infty < x \leq 3$$

Inecuación Exponencial.

Aplicando Logaritmos a ambos miembros y aplicando sus Propiedades

Resolviendo y considerando que: $Log\,2 > 0$, por tanto puede pasar a dividir al 2^do^ miembro



c) $Log(9x+28) \leq 2$

$$Log(9x+28) \leq 2$$
$$9x+28 \leq Antilog\,2$$
$$9x+28 \leq 100$$
$$x \leq 8$$
$$Cs: \quad -\infty < x \leq 8$$

Inecuación Logarítmica

Despejando y usando: $Antilog\,u = 10^u$

Resolviendo:

3 4 5 6 7 8 9 10

d) $Sen\,x - Cos\,x < 0$

$$Sen\,x - Cos\,x < 0$$
$$Sen\,x < Cos\,x$$
$$\frac{Sen\,x}{Cos\,x} < 1$$
$$Tan\,x < 1$$
$$x < Arctan\,1$$
$$x < \frac{\pi}{4}$$

Inecuación Trigonométrica

Reordenando la Inecuación, de manera que quede una sola Función Trigonométrica.

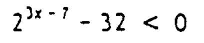
Se considera que: $Cos\,x > 0 \Rightarrow 0 \leq x < \pi/2$, solo así pasar a dividir al 1^er^ miembro. Usando relaciones Trigonométricas y resolviendo.

De acuerdo a la condición $\quad Cs: \quad 0 \leq x < \pi/4$

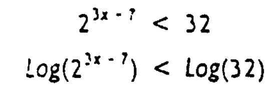
-π/4 0 π/4 π/2

e) $2^{3x-7} - 32 < 0$

$$2^{3x-7} - 32 < 0$$



$$2^{3x-7} < 32$$



$$Log(2^{3x-7}) < Log(32)$$
$$(3x-7)Log\,2 < Log\,32$$
$$3x-7 < \frac{Log\,32}{Log\,2} = 5$$
$$x < 4$$

Inecuación Exponencial

Reordenando la Inecuación para su resolución.

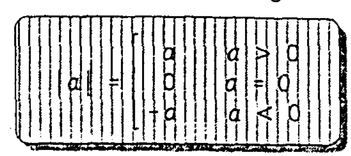
Aplicando Logaritmos a ambos miembros de la Inecuación. Por propiedad de Logaritmos

Resolviendo y calculando los Logaritmos $\quad Cs: \quad -\infty < x < 4$



I-9 VALOR ABSOLUTO

El Valor Absoluto de un Número Real, se denota y define del siguiente modo:



$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Ej 1-13 Se calculan los Valores Absolutos de los siguientes Números Reales:

$|3|$. $3 > 0 \Rightarrow |3| = 3$ $|-5|$. $-5 < 0 \Rightarrow |-5| = -(-5) = 5$

$|0|$. $0 = 0 \Rightarrow |0| = 0$ $|-1|$. $-1 < 0 \Rightarrow |-1| = -(-1) = 1$

Note que el efecto del Valor Absoluto es el de convertir a todo Número Real en positivo (A los positivos, directamente los copia, a los negativos les agrega otro signo negativo para así convertirlos en positivos)

De todas maneras el resultado es que todo número afectado por Valor absoluto se torna en positivo.

TEOREMAS DEL VALOR ABSOLUTO

De acuerdo a la definición del Valor Absoluto, se cumplen los siguientes Teoremas:

TA-1 $|a+b| \le |a| + |b|$

TA-2 $|a+b| \ge |a| - |b|$

TA-3 $|a-b| \ge |a| - |b|$

TA-4 $|a-b| \le |a| + |b|$

TA-5 $|a \cdot b| = |a|\,|b|$

TA-6 $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

TA-7 $|a^n| = |a|^n$

TA-8 $|a-b| = |b-a|$

TA-9 $|a| = +\sqrt{a^2}$

TA-10 $|x| < a \Rightarrow$ $-a < x < a$

TA-11 $|x| > a \Rightarrow$ $-\infty < x < -a \,;\, a < x < \infty$

Ej 1-14 Se demostrará TA-1: $|a + b| \le |a| + |b|$

La demostración de este Teorema del Valor Absoluto, requiere la verificación de los cuatro casos posibles en cuanto a signos de: a, b

i) Si: $a \ge 0 ; b \ge 0$

$|a+b| \le |a| + |b|$

$(a+b) = (a) + (b)$

Proposición verdadera, se cumple la Igualdad.

ii) Si: $a \le 0 ; b \le 0$

$|a+b| \le |a| + |b|$

$-(a+b) = (-a) + (-b)$

Proposición verdadera, se cumple la Igualdad.

iii) Si: $a \le 0; b \ge 0; a+b \le 0$

$|a+b| \le |a| + |b|$

$-(a+b) \le (-a) + (b)$

$-b < b$

Proposición verdadera, se cumple la Desigualdad.

Si: $a \le 0, b \ge 0; a+b \ge 0$

$|a+b| \le |a| + |b|$

$(a+b) \le (-a) + (b)$

$a < -a$

Se cumple la Desigualdad.

iv) Si: $a \ge 0; b \le 0; a+b \ge 0$

$|a+b| \le |a| + |b|$

$(a+b) \le (a) + (-b)$

$b < -b$

Proposición verdadera, se cumple la Desigualdad.

Si: $a \ge 0; b \le 0; a+b \le 0$

$|a+b| \le |a| + |b|$

$-(a+b) \le (a) + (-b)$

$-a < a$

Se cumple la Desigualdad.

Los Casos iii) , iv) poseen a su vez dos posibilidades, que se las analiza

Como todos los casos desembocan en Proposiciones verdaderas, se concluye que el Teorema se cumple plenamente. El Teorema demostrado se llama también "Desigualdad Triangular".

1-15 Demostrar los siguientes Teoremas del Valor Absoluto

a) Demostrar TA-3: $|a \cdot b| \geq |a| - |b|$

$\|a\| = \|a\|$	Partiendo de una Identidad, luego sumando y restando:
$\|a\| = \|a + b - b\|$	b dentro del Valor absoluto.
$\|a\| = \|(a - b) + b\| \leq \|a - b\| + \|b\|$	Reordenando y aplicando TA-1 (Ya demostrado en el Ej 1-14)
$\|a\| \leq \|a - b\| + \|b\|$	
$\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$	Ordenando, intercambiando miembros
$\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$	Teorema demostrado.

b) Demostrar TA-5: $|a\,b| = |a|\,|b|$

Considerando los cuatro casos, que determinan los signos de: a, b además del Axioma A12 de los Números Reales (Clausura del producto)

i) Si: $a \geq 0 ; b \geq 0$

$|a\,b| = |a|\,|b|$

$(ab) = (a)(b)$

$a\,b = a\,b$

ii) Si: $a \leq 0 ; b \leq 0$

$|a\,b| = |a|\,|b|$

$(a\,b) = (-a)(-b)$

$a\,b = a\,b$

Se cumple la Igualdad en todos los casos, por tanto el Teorema queda demostrado.

iii) Si: $a \leq 0 ; b \geq 0$

$|ab| = |a|\,|b|$

$-(a\,b) = (-a)(b)$

$-a\,b = -a\,b$

iv) Si: $a \geq 0 ; b \leq 0$

$|a\,b| = |a|\,|b|$

$-(a\,b) = (a)(-b)$

$-a\,b = -a\,b$

c) Demostrar TA-10: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

Suponiendo: $a > 0$ (Para que se cumpla la Desigualdad), analizando los casos posibles que brinda el Valor Absoluto.

i) Si: $x > 0$

$|x| < a$

$x < a$

$\cap$: $0 < x < a$

ii) Si: $x = 0$

$|x| < a$

$0 < a$

$\cap$: $x = 0$

iii) Si: $x < 0$

$|x| < a$

$-x < a$

$x > -a$

$\cap$: $-a < x < 0$

Uniendo los resultados de cada posibilidad:

$0 < x < a \;\cup\; x = 0 \;\cup\; -a < x < 0 \;\Rightarrow\; -a < x < a$

-a 0 a

d) Demostrar TA-11: $|x| > a \Rightarrow -\infty < x < -a \,,\; a < x < \infty$

Suponiendo: $a > 0$, analizando todos los casos posibles:

i) Si: $x > 0$

$|x| > a$

$x > a$

$\cap$: $a < x < \infty$

ii) Si: $x = 0$

$|x| > a$

$0 > a$

$\cap$: $\varnothing$

iii) Si: $x < 0$

$|x| > a$

$-x > a$

$x < -a$

$\cap$: $-\infty < x < -a$

Uniendo luego los resultados de cada posibilidad:

$a < x < \infty \;\cup\; \varnothing \;\cup\; -\infty < x < -a$

$\Rightarrow -\infty < x < -a \,,\; a < x < \infty$

-a 0 a

Para el caso de: $a < 0$ se procede del mismo modo (Se obtendrá toda la Recta Real)

I-10 ECUACIONES EN VALOR ABSOLUTO

Las Ecuaciones en Valor Absoluto, son Ecuaciones que contienen expresiones de la incógnita afectadas por Valor Absoluto. Para resolver estas Ecuaciones, se debe considerar que el Valor Absoluto brinda dos signos posibles (Si: $a \neq 0$)

$$\text{En:} \quad |P_{(x)}| = a \quad \begin{cases} \text{Si: } P_{(x)} > 0 \Rightarrow P_{(x)} = a \\ \text{Si: } P_{(x)} < 0 \Rightarrow P_{(x)} = -a \end{cases}$$

Por tanto la Ecuación en Valor Absoluto, se desarrolla como dos Ecuaciones, donde la Incógnita ya no está afectada de Valor Absoluto.

No se considera el caso de: $P_{(x)} = 0$ ($a = 0$), ya que no brinda mayor aporte a la Ecuación, en todo caso, surgirá como consecuencia de las otras posibilidades.

Ej I-15 Se resuelve la Ecuación en Valor Absoluto: $|x| + 3 = 7$

i) Si: $x > 0$

$|x| + 3 = 7$

$x + 3 = 7$

$x = 4$

Solución correcta porque: $4 > 0$

ii) Si: $x < 0$

$|x| + 3 = 7$

$(-x) + 3 = 7$

$x = -4$

Solución correcta porque: $-4 < 0$

El Conjunto solución está constituido por dos Números Reales Cs: $\{4, -4\}$. Estos valores se deben verificar si como Soluciones son o no Correctas, es decir si el resultado de una posibilidad satisface a la condición de tal posibilidad.

En el Ejemplo anterior, ambas Soluciones son Correctas. (En la posibilidad i) la condición es : $x > 0$, y el resultado es: 4 que satisface la condición: $4 > 0$)

I-16 Resolver las siguientes Ecuaciones en Valor Absoluto:

a) $|x| + 5 = 1$

i) Si: $x > 0$

$|x| + 5 = 1$

$x + 5 = 1$

$x = -4$

Solución incorrecta porque: $-4 \not> 0$

ii) Si: $x < 0$

$|x| + 5 = 1$

$(-x) + 5 = 1$

$x = 4$

Solución incorrecta porque: $4 \not< 0$

Por tanto reuniendo soluciones Cs: $\emptyset$

b) $|x - 2| = 6$

i) Si: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$|x - 2| = 6$

$(x - 2) = 6$

$x = 8$

Solución correcta porque: $8 > 2$

ii) Si: $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

$|x - 2| = 6$

$-(x - 2) = 6$

$x = -4$

Solución correcta porque: $-4 < 2$

Por tanto reuniendo soluciones Cs: $\{8, -4\}$

c) $3|x| + 2x = 10$

i) Si: $x > 0$

$3|x| + 2x = 10$

$3(x) + 2x = 10$

$x = 2$

Solución correcta porque: $2 > 0$

ii) Si: $x < 0$

$3|x| + 2x = 10$

$3(-x) + 2x = 10$

$x = -10$

Solución correcta porque: $-10 < 0$

Por tanto reuniendo soluciones Cs: $\{2, -10\}$

I-11 INECUACIONES EN VALOR ABSOLUTO

Las Inecuaciones en Valor Absoluto, son Inecuaciones que contienen a la Incógnita, afectada por el Valor Absoluto.

Para resolver estas Inecuaciones, es suficiente con desarrollar el Valor Absoluto, de acuerdo a los Teoremas TA-10, TA-11 del Valor Absoluto (Demostrados en P-1-15-c, P-1-15-d), para luego aplicar los conocidos métodos de resolución de Inecuaciones (Regla de los signos, etc.)

TA-10 Si: $|P_{(x)}| < a$

$\Rightarrow \; -a < P_{(x)} < a$

TA-11 Si: $|P_{(x)}| > a$

$\Rightarrow \; -\infty < P_{(x)} < -a \;,\; a < P_{(x)} < \infty$

<u>Ej 1-16</u> Se resolverán las siguientes Inecuaciones con Valor Absoluto:

a) $|x| < 5$

$-5 < x < 5$

Aplicando TA-10, se desarrolla el Valor Absoluto, queda así un Intervalo.

Graficando el Intervalo de Solución.

b) $|x| > 3$

$-\infty < x < -3 \;,\; 3 < x < \infty$

Aplicando TA-11, se desarrolla el Valor Absoluto, quedan así dos Intervalos.

Graficando los Intervalos de Solución.

1-17 Resolver las siguientes Inecuaciones en Valor Absoluto:

a) $|2x - 5| \leq 3$

$$-3 \leq 2x - 5 \leq 3$$

Aplicando TA-10 sobre la Inecuación.

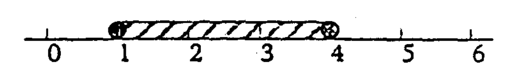
$$\begin{array}{ccccc} +5 & & +5 & & +5 \\ \hline 2 & \leq & 2x & \leq & 8 \end{array}$$

Sumando: 5 a los tres miembros de la Inecuación, para así buscar el despeje de: x. Dividiendo entre: 2 a los tres miembros de la Inecuación.

$$\begin{array}{ccccc} \div 2 & & \div 2 & & \div 2 \\ \hline 1 & \leq & x & \leq & 4 \end{array}$$

Intervalo de Solución:

$1 \leq x \leq 4$

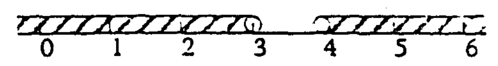


b) $|2x - 7| > 1$

Desarrollando por TA-11

$$\begin{array}{ccccc} -\infty & < & 2x-7 & < & -1 \\ +7 & & +7 & & +7 \\ \hline -\infty & < & 2x & < & 6 \\ \div 2 & & \div 2 & & \div 2 \\ \hline -\infty & < & x & < & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & < & 2x-7 & < & \infty \\ +7 & & +7 & & +7 \\ \hline 8 & < & 2x & < & \infty \\ \div 2 & & \div 2 & & \div 2 \\ \hline 4 & < & x & < & \infty \end{array}$$

Para despejar x de las dos Inecuaciones se suma: 7, se divide entre: 2 a los tres miembros.



En las operaciones note que.

$\infty + a = \infty$

$\infty \cdot a = \infty$

$\infty \div a = \infty$

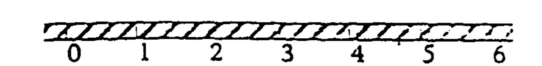
c) $|x| < -4$

$4 < x < -4$

La Inecuación no se cumple para ningún $x \in \mathbb{R}$ ya que el valor absoluto siempre será positivo no puede ser menor a -4

d) $|x| > -2$

$-\infty < x < 2 \;,\; -2 < x < \infty$



La Inecuación sí se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que el valor absoluto siempre será positivo, siendo siempre mayor a -2

1-18 Resolver las siguientes Inecuaciones en Valor Absoluto:

a) $|x^2 - 5x + 5| < 1$

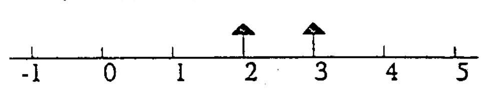
$-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$

Tras desarrollar el Valor Absoluto, no es fácil despejar: x directamente, cada Desigualdad se resolverá separadamente, por ello luego se deben intersectar los resultados que en cada caso se vayan a obtener.

i) $-1 < x^2 - 5x + 5$

$x^2 - 5x + 6 < 0$

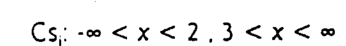
$(x - 2)(x - 3) < 0$



Si: $x = 0$; $-1 < x^2 - 5x + 5$

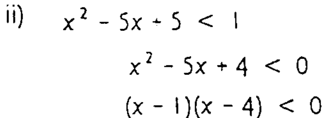
$-1 < 0^2 - 5 \cdot 0 + 5$

$-1 < 5$ (V)



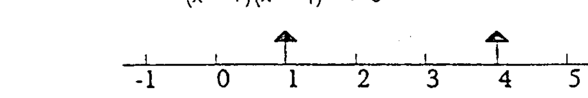
Cs_i: $-\infty < x < 2$, $3 < x < \infty$

ii) $x^2 - 5x + 5 < 1$



$x^2 - 5x + 4 < 0$

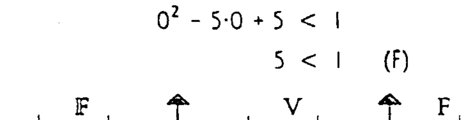
$(x - 1)(x - 4) < 0$



Si: $x = 0$; $x^2 - 5x + 5 < 1$

$0^2 - 5 \cdot 0 + 5 < 1$

$5 < 1$ (F)

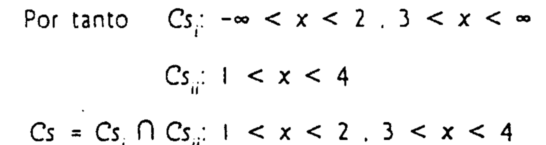


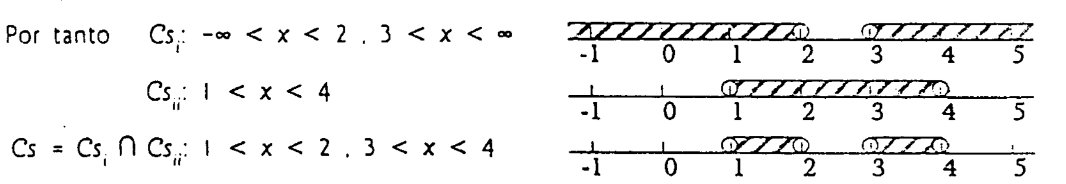
Cs_{ii}: $1 < x < 4$

Por tanto Cs_i: $-\infty < x < 2$, $3 < x < \infty$

Cs_{ii}: $1 < x < 4$

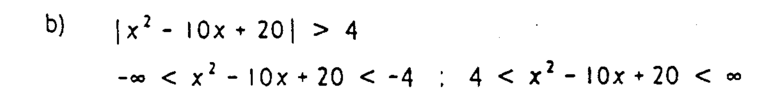
$Cs = Cs_i \cap Cs_{ii}$: $1 < x < 2$, $3 < x < 4$





b) $|x^2 - 10x + 20| > 4$

$-\infty < x^2 - 10x + 20 < -4$; $4 < x^2 - 10x + 20 < \infty$



Se resolverá separadamente cada Desigualdad, para luego unir resultados, porque son Desigualdades diferentes.

i) $-\infty < x^2 - 10x + 20 < -4$

$x^2 - 10x + 20 < -4$

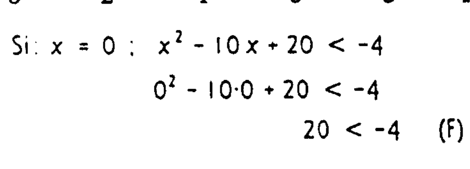
$x^2 - 10x + 24 < 0$

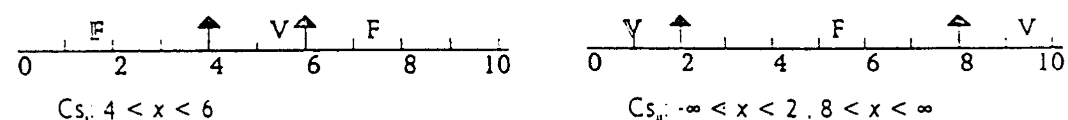
$(x - 4)(x - 6) < 0$

Si: $x = 0$; $x^2 - 10x + 20 < -4$

$0^2 - 10 \cdot 0 + 20 < -4$

$20 < -4$ (F)





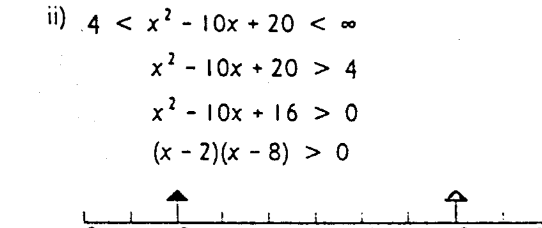
Cs_i: $4 < x < 6$

ii) $4 < x^2 - 10x + 20 < \infty$

$x^2 - 10x + 20 > 4$

$x^2 - 10x + 16 > 0$

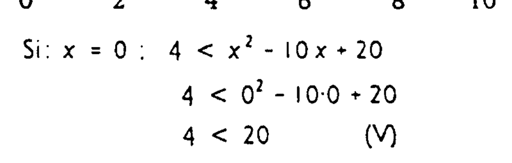
$(x - 2)(x - 8) > 0$

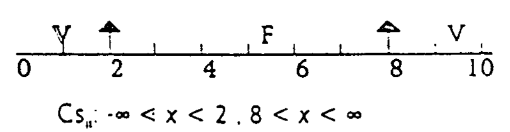


Si: $x = 0$; $4 < x^2 - 10x + 20$

$4 < 0^2 - 10 \cdot 0 + 20$

$4 < 20$ (V)





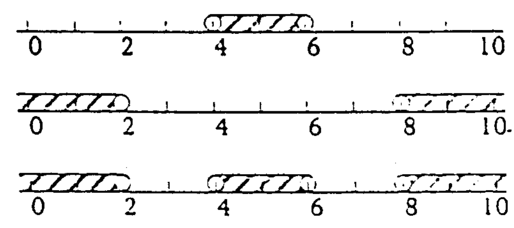
Cs_{ii}: $-\infty < x < 2$, $8 < x < \infty$

Por tanto Cs_i: $4 < x < 6$

Cs_{ii}: $-\infty < x < 2$, $8 < x < \infty$

$Cs = Cs_i \cup Cs_{ii}$ $-\infty < x < 2 \cup 4 < x < 6$

$\cup$ $8 < x < \infty$



I-19 Resolver las siguientes Inecuaciones en Valor Absoluto:

a) $|x|^2 + 2|x| - 3 \le 0$

Analizando las posibilidades del Valor Absoluto, resolviendo en cada caso y uniendo sus resultados:

i) Si: $x > 0$

$|x|^2 + 2|x| - 3 \le 0$

$(x)^2 + 2(x) - 3 \le 0$

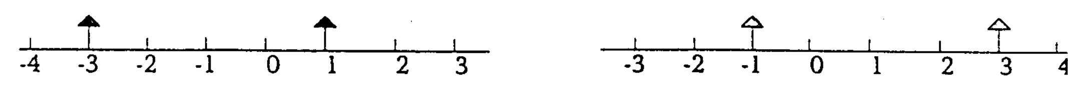
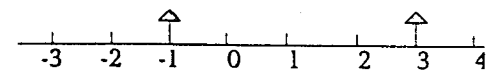
$(x+3)(x-1) \le 0$

ii) Si: $x < 0$

$|x|^2 + 2|x| - 3 \le 0$

$(-x)^2 + 2(-x) - 3 \le 0$

$(x-3)(x+1) \le 0$

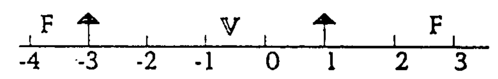



Si: $x = 0$; $x^2 + 2x - 3 \le 0$

$\Rightarrow 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 \le 0 \Rightarrow -3 \le 0$ (V)

Si: $x = 0$; $x^2 - 2x - 3 \le 0$

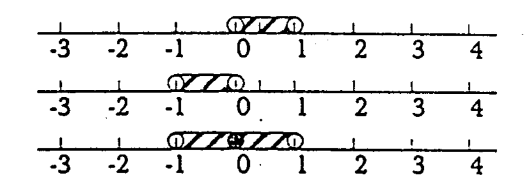
$\Rightarrow 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 \le 0 \Rightarrow -3 \le 0$ (V)




Intersectando con: $x > 0$ Cs_i: $0 < x \le 1$

Intersectando con: $x < 0$ Cs_{ii}: $-1 \le x < 0$

Uniendo resultados: $Cs = Cs_i \cup Cs_{ii} = -1 \le x \le 1$
Verificando que el cero es también solución, se agrega al Cs.



b) $|x-2|^2 - 4|x-2| + 3 < 0$

Si: $u = x - 2 \Rightarrow |u|^2 - 4|u| + 3 < 0$ Efectuando un Cambio de variable, para la resolución:

i) Si: $u > 0$

$|u|^2 - 4|u| + 3 < 0$

$(u)^2 - 4(u) + 3 < 0$

$(u-1)(u-3) < 0$

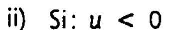
Resolviendo para cada posibilidad del Valor Absoluto, uniendo resultados.

ii) Si: $u < 0$

$|u|^2 - 4|u| + 3 < 0$

$(-u)^2 - 4(-u) + 3 < 0$

$(u+1)(u+3) < 0$



Si: $u = 0$; $u^2 - 4u + 3 < 0$

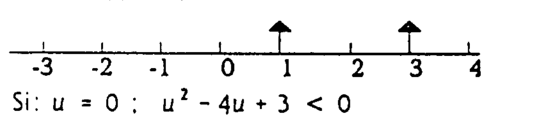
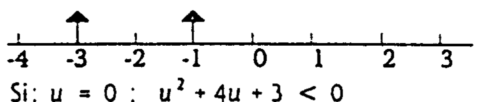
$0^2 - 4 \cdot 0 + 3 < 0$

$3 < 0$ (F)

Si: $u = 0$; $u^2 + 4u + 3 < 0$

$0^2 + 4 \cdot 0 + 3 < 0$

$3 < 0$ (F)

Intersectando con: $u > 0$ Cs_i: $1 < u < 3$

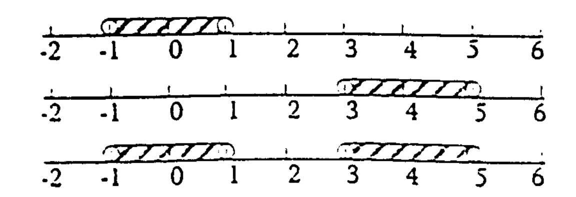
Intersectando con: $u < 0$ Cs_{ii}: $-3 < u < -1$

Uniendo resultados: $Cs = Cs_i \cup Cs_{ii}$: $-3 < u < -1$, $1 < u < 3$

$-3 < u < -1$	$1 < u < 3$
$-3 < x - 2 < -1$	$1 < x - 2 < 3$
$-1 < x < 1$	$3 < x < 5$

Sin embargo por el cambio de variable: $u = x - 2$
Retornando a la variable original, despejando x.

Por tanto Cs: $-1 < x < 1$, $3 < x < 5$. La gráfica final representa a los Intervalos de Solución de variable x



1-20 Resolver las siguientes Inecuaciones en Valor Absoluto:

a) $\left|\dfrac{4}{x-3}\right| < 1$

$-1 < \dfrac{4}{x-3} < 1$

Luego de desarrollar por TA-10 del Valor Absoluto, se observa que no es fácil el despeje directo de la incógnita: x

Se resolverá separadamente, cada Desigualdad, para luego intersectar.

i) $-1 < \dfrac{4}{x-3}$

$-1 - \dfrac{4}{x-3} < 0 \Rightarrow \dfrac{-(x+1)}{x-3} < 0$

Si: $x = 0$, $-1 < \dfrac{4}{x-3}$

$-1 < \dfrac{4}{0-3} \Rightarrow -1 < -\dfrac{4}{3}$ (F)

Cs_i: $-\infty < x < -1$, $3 < x < \infty$

ii) $\dfrac{4}{x-3} < 1$

$\dfrac{4}{x-3} - 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{-(x-7)}{x-3} < 0$

Si: $x = 0$, $\dfrac{4}{x-3} < 1$

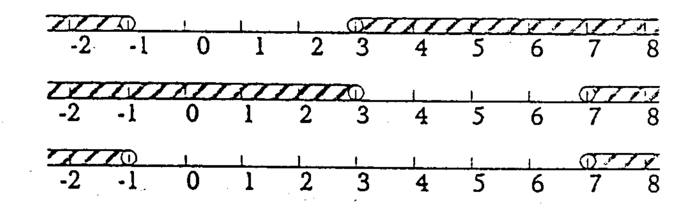
$\dfrac{4}{0-3} < 1 \Rightarrow -\dfrac{4}{3} < 1$ (V)

Cs_{ii}: $-\infty < x < 3$; $7 < x < \infty$.

Por tanto:

$Cs = Cs_i \cap Cs_{ii}$:

$-\infty < x < -1$, $7 < x < \infty$



b) $\left|\dfrac{x-10}{x-2}\right| < 3$

Si bien es posible resolver por el mismo método del problema anterior, otro manera es la siguiente:

$\left|\dfrac{x-10}{x-2}\right| < 3 \Rightarrow \dfrac{|x-10|}{|x-2|} < 3 \Rightarrow |x-10| < 3\,|x-2|$

Desarrollando por Propiedades del Valor Absoluto.

$(|x-10|)^2 < (3\,|x-2|)^2$

$(x-10)^2 < 3^2(x-2)^2$

$x^2 - 20x + 100 < 9(x^2 - 4x + 4)$

$x^2 - 20x + 100 < 9x^2 - 36x + 36$

$8x^2 - 16x - 64 > 0$

$x^2 - 2x - 8 > 0$

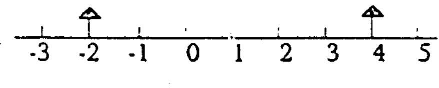
$(x-4)(x+2) > 0$

El Valor Absoluto garantiza que las expresiones son positivas, por ello es posible pasar a multiplicar el denominador.

Al elevar al cuadrado ambos miembros, es posible ignorar al Valor Absoluto. (Los cuadrados también aseguran que las expresiones son positivas, mismo efecto del Valor Absoluto).

Desarrollando, simplificando y ordenando se logra una Inecuación cuadrática.

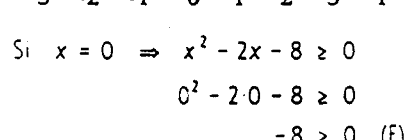
Resolviendo la Inecuación cuadrática por el método habitual de la Regla de los Signos.



Si $x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0$

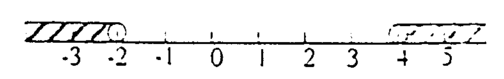
$0^2 - 2\cdot 0 - 8 \geq 0$

$-8 \geq 0$ (F)



Factorizando, ubicando raíces, reemplazando un valor cualquiera se llega a obtener la Solución:

Cs: $-\infty < x < -2$; $4 < x < \infty$



I-21 Resolver las siguientes inecuaciones en Valor Absoluto:

a) $\left|\dfrac{3x-2}{x+1}\right| > 2$

$-\infty < \dfrac{3x-2}{x+1} < -2 \ , \ 2 < \dfrac{3x-2}{x+1} < \infty$

Desarrollando por TA-11 del Valor Absoluto, como se desarrollan dos Desigualdades, se deben unir los resultados.

i) $\dfrac{3x-2}{x+1} < -2$

$\dfrac{3x-2}{x+1} + 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{5x}{x+1} < 0$

Si: $x = 2$, $\dfrac{3x-2}{x+1} < -2$

$\dfrac{3 \cdot 2 - 2}{2+1} < -2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4}{3} < -2 \quad$ (F)

Cs_i: $-1 < x < 0$

ii) $2 < \dfrac{3x-2}{x+1}$

$2 - \dfrac{3x-2}{x+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-(x-4)}{x+1} < 0$

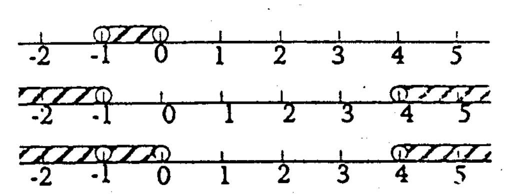
Si: $x = 0$, $2 < \dfrac{3x-2}{x+1}$

$2 < \dfrac{3 \cdot 0 - 2}{0+1} \quad \Rightarrow \quad 2 < -2 \quad$ (F)

Cs_{ii}: $-\infty < x < -1 \ , \ 4 < x < \infty$

Por tanto $Cs_i = C_i \cup Cs_{ii}$:

$-\infty < x < -1 \ , \ -1 < x < 0 \ , \ 4 < x < \infty$



Otra modo de resolución de esta Inecuación, parte de la Propiedad de Desigualdades:

Si: $\begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}$, $b > a \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} \Rightarrow \left|\dfrac{3x-2}{x+1}\right| > 2 \Rightarrow \left|\dfrac{x+1}{3x-2}\right| < \dfrac{1}{2}$ Así la Desigualdad cambia de sentido.

Luego se usará TA-10 y procedimientos como los empleados en: P-1-20-a, o el P-1-20-b

b) $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| > 0$

$\Rightarrow \quad -\infty < \dfrac{1+x}{1-x} < 0 \ , \ 0 < \dfrac{1+x}{1-x} < \infty$

Desarrollando el Valor Absoluto por TA-11, resolviendo separadamente y uniendo.

i) $\dfrac{1+x}{1-x} < 0$

Si $x = 0 \Rightarrow \dfrac{1+0}{1-0} < 0 \Rightarrow 1 < 0 \quad$ (F)

Cs_i $-\infty < x < -1 \ , \ 1 < x < \infty$

ii) $0 < \dfrac{1+x}{1-x}$

Si: $x = 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{1+0}{1-0} \Rightarrow 0 < 1 \quad$ (V)

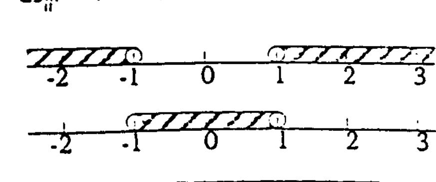
Cs_{ii}: $-1 < x < 1$

Por tanto: $Cs = Cs_i \cup Cs_{ii}$: $-\infty < x < -1$,

$-1 < x < 1 \ , \ 1 < x < \infty$

También puede escribirse como:

$Cs \quad -\infty < x < \infty \ , \ x \neq -1 \ ; \ x \neq 1$



1-22 Resolver las siguientes Inecuaciones en Valor Absoluto:

a) $\left|\dfrac{x+2}{x-6}\right| - \left|\dfrac{x-1}{x-3}\right| < 0$

$$\left|\frac{x+2}{x-6}\right| - \left|\frac{x-1}{x-3}\right| < 0 \Rightarrow \left|\frac{x+2}{x-6}\right| < \left|\frac{x-1}{x-3}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} < 1$$

Para resolver conviene reordenar, de manera que luego puedan aplicarse las Propiedades del Valor Absoluto y de las Desigualdades.

Desarrollando el Valor Absoluto por TA-10, resolviendo separadamente e intersectando resultados.

i) $-1 < \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)}$

$-1 - \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{-2x(x-4)}{(x-6)(x-1)} < 0$

-1 0 1 2 3 4 5 6 7

Si: $x = 2$, $-1 < \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)}$

$-1 < \dfrac{(2+2)(2-3)}{(2-6)(2-1)} \Rightarrow -1 < 1$ (V)

V F V F V

-1 0 1 2 3 4 5 6 7

Cs_i: $-\infty < x < 0$; $1 < x < 4$; $6 < x < \infty$

ii) $\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} < 1$

$\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} - 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{6(x-2)}{(x-6)(x-1)} < 0$

-1 0 1 2 3 4 5 6 7

Si: $x = 0$, $\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} < 1$

$\dfrac{(0+2)(0-3)}{(0-6)(0-1)} < 1 \Rightarrow -1 < 1$ (V)

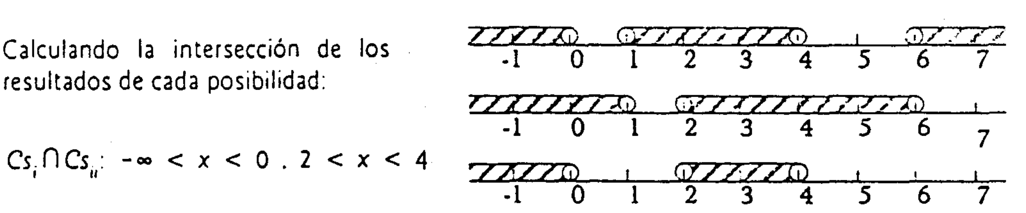
V F V F

-1 0 1 2 3 4 5 6 7

Cs_{ii}: $-\infty < x < 1$; $2 < x < 6$

Calculando la intersección de los resultados de cada posibilidad:

$Cs_i \cap Cs_{ii}$: $-\infty < x < 0$, $2 < x < 4$



b) $||x| - 4| < 1$

i) Si: $x > 0$

$|x-4| < 1$

$-1 < x - 4 < 1$ (+4)

$3 < x < 5$

Desarrollando los Valores Absolutos y aplicando sus Propiedades:

ii) Si: $x < 0$

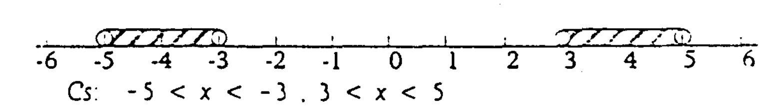
$|-x-4| < 1$

$-1 < -x - 4 < 1$ (+4)

$3 < -x < 5$ (-1)

$-3 > x > -5 \Rightarrow -5 < x < -3$

Uniendo resultados de cada posibilidad



Cs: $-5 < x < -3$, $3 < x < 5$

c) $|Log\, x| < 1$

$|Log\, x| < 1$ — Inecuación Logarítmica en Valor Absoluto

$-1 < Log\, x < 1$ — Desarrollando el Valor Absoluto por TA-10

$Antilog(-1) < x < Antilog\, 1$ — Aplicando Antilogaritmos a los tres miembros

$10^{-1} < x < 10^{1}$ — Propiedad $Antilog\, u = 10^u$ Simplificando Cs

$0.1 < x < 10$ — $0.1 < x < 10$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

I-23 Resolver las siguientes Inecuaciones en Valor Absoluto:

a) $|x| + |x-2| < 4$

Para resolver este tipo de Inecuaciones, el modo más práctico, consiste en analizar las posibilidades en cuanto a signo de los Valores Absolutos, para así obtener las raíces de cada posibilidad.

Además, se deben buscar las raíces internas a cada Valor Absoluto. (Valores que determinan cero dentro de cada expresión afectada por Valor Absoluto, por ejemplo en: $|3x-6|$; la raíz interna es: 2)

Luego de ubicar todas las raíces sobre la Recta Real, en todos y cada uno de los Intervalos, se debe verificar si son o no Solución, ya que la alternabilidad no es aplicable.

Si: $|x| + |x-2| < 4 \Rightarrow$

i) $+(x) + (x-2) < 4 \Rightarrow (x-3) < 0$ Raíz

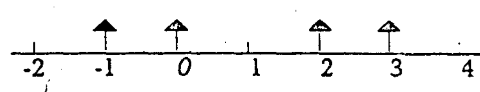
ii) $+(x) - (x-2) < 4 \Rightarrow 2 < 4$

iii) $-(x) + (x-2) < 4 \Rightarrow -2 < 4$

iv) $-(x) - (x-2) < 4 \Rightarrow (x+1) < 0$ Raíz

Por tanto se tiene dos raíces internas a los Valores Absolutos 0; 2 dos raíces de las posibilidades 3; -1

Ubicando todas las raíces sobre la Recta Real, tanto las internas como las calculadas en las posibilidades:



Reemplazo en: $|x| + |x-2| < 4$

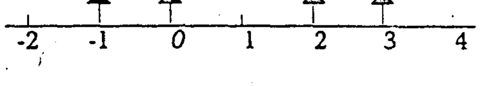
Si: $x = -2 \Rightarrow |-2| + |-2-2| < 4 \Rightarrow 6 < 4$ (F)

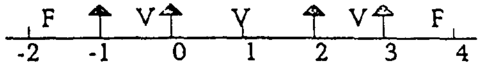
$x = -0.5 \Rightarrow |-0.5| + |-0.5-2| < 4 \Rightarrow 3 < 4$ (V)

$x = 1 \Rightarrow |1| + |1-2| < 4 \Rightarrow 2 < 4$ (V)

$x = 2.5 \Rightarrow |2.5| + |2.5-2| < 4 \Rightarrow 3 < 4$ (V)

$x = 4 \Rightarrow |4| + |4-2| < 4 \Rightarrow 6 < 4$ (F)





Cs: $-1 < x < 3$

b) $|2x-6| + |x-1| \leq 10$

Buscando las raíces de las posibilidades del Valor Absoluto y las raíces internas:

Si: $|2x-6| + |x-1| < 10 \Rightarrow$

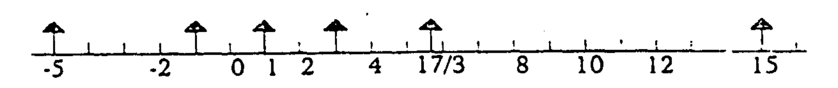
i) $+(2x-6) + (x-1) \leq 10 \Rightarrow 3(x-17/3) \leq 0$

ii) $+(2x-6) - (x-1) \leq 10 \Rightarrow (x-15) \leq 0$

iii) $-(2x-6) + (x-1) \leq 10 \Rightarrow -(x+5) \leq 0$

iv) $-(2x-6) - (x-1) \leq 10 \Rightarrow -(x+1) \leq 0$

Las raíces Internas a los Valores Absolutos son 3, 1 respectivamente.



Reemplazando en: $|2x-6| + |x-1| \leq 10$

Si: $x = -6 \Rightarrow |2(-6)-6| + |-6-1| \leq 10 \Rightarrow 25 \leq 10$ (F)

$x = -2 \Rightarrow |2(-2)-6| + |-2-1| \leq 10 \Rightarrow 13 \leq 10$ (F)

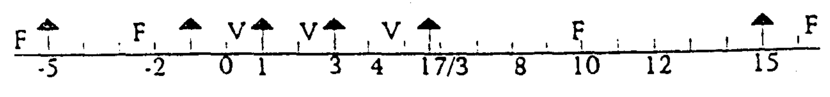
$x = 0 \Rightarrow |2 \cdot 0 - 6| + |0-1| \leq 10 \Rightarrow 7 \leq 10$ (V)

$x = 2 \Rightarrow |2 \cdot 2 - 6| + |2-1| \leq 10 \Rightarrow 3 \leq 10$ (V)

$x = 4 \Rightarrow |2 \cdot 4 - 6| + |4-1| \leq 10 \Rightarrow 5 \leq 10$ (V)

$x = 6 \Rightarrow |2 \cdot 6 - 6| + |6-1| \leq 10 \Rightarrow 11 \leq 10$ (F)

$x = 16 \Rightarrow |2 \cdot 16 - 6| + |16-1| \leq 10 \Rightarrow 41 \leq 10$ (F)



Cs: $-1 \leq x \leq \dfrac{17}{3}$

1.- PROBLEMAS PROPUESTOS

1-1 Demostrar los siguientes Teoremas de los Números Reales:

a) $ax = a \Rightarrow x = 1$

b) $a + x = b \Rightarrow x = b - a$

c) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

d) $(-1)x = -x$

e) $a(b - c) = ab - ac$

f) $-(-a) = a$

g) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + cb}{bd}$

1-2 Demostrar los siguientes Teoremas sobre Desigualdades:

a) $a > b \Rightarrow a - c > b - c$

b) $0 < a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

c) $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

d) $0 < a < b \Rightarrow ab > 0$

e) $b > 0 \text{ , } a^2 < b \Rightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

f) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$

g) $a^2 + b^2 = 1 \text{ , } c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow ac + bd \leq 1$

h) $x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

1-3 Resolver las siguientes Inecuaciones Lineales:

$2x - 3 < 5$	$3x + 2 \geq 8$	$x < 4 \;;\; x \geq 2$
$8 - x < 5$	$9 - 4x \leq 1$	$x > 3 \;;\; x \geq 2$
$4 - 2x < 9 - 3x$	$1 + 2x < 5x - 8$	$x < 5 \;;\; x > 3$
$1 < 2x - 5 < 7$	$5 \leq 3x + 2 \leq 8$	$3 < x < 6 \;;\; 1 \leq x \leq 2$
$1 < 9 - 2x < 5$	$2 < 5 - 3x < 8$	$2 < x < 4 \;;\; -1 < x < 1$
$8 < 3x + 2 < 2$	$9 < 5x + 4 < \infty$	$\varnothing \;;\; x > 1$

1-4 Resolver las siguientes Inecuaciones Cuadráticas y de Grado Superior:

$x^2 - 5 < 4$	$5 - x^2 > 1$	$-3 < x < 3 \;;\; -2 < x < 2$
$x^2 - 6x + 5 < 0$	$x^2 - x + 10 \geq 16$	$1 < x < 5 \;;\; x \leq -2 \text{ , } x \geq 3$
$x^2 + x - 12 > 0$	$3x^2 - 7x + 2 < 0$	$x < -4 \text{ , } x > 3$ $1/3 < x < 2$
$x^2 - 6x + 9 \geq 0$	$x^2 < 0$	$\mathbb{R} \;;\; \varnothing$
$x^2 + 9 < 0$	$x^4 - 1 < 0$	$\varnothing \;;\; -1 < x < 1$
$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 < 4$	$(x^2 + 1)^2 < (x^2 - 1)^2$	$x < 1 \;;\; \varnothing$
$x^3 - 3x^2 - 18x + 40 < 0$	$x^4 - 13x^2 + 36 < 0$	$x < -4 \text{ , } 2 < x < 5$ $-3 < x < -2 \text{ , } 2 < x < 3$
$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 > 0$	$x^4 - 17x^2 + 16 \leq 0$	$1 < x < 2 \text{ , } x > 5$ $-4 \leq x \leq -1 \text{ , } 1 \leq x \leq 4$
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 < 0$	$x^4 + x^2 < 0$	$x < 2 \;;\; \varnothing$
$x^5 - 5x^3 + 4x > 0$	$(x - 1)^3 > 0$	$-2 < x < -1 \text{ , } 0 < x < 1 \text{ , } x > 2$ $x > 1$
$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 < 0$	$x^3 - x < 0$	$\varnothing \;;\; x < -1 \text{ , } 0 < x < 1$
$x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 < 0$	$x^8 - 256 > 0$	$-5 < x < -1 \text{ , } 1 < x < 3$ $x < -2 \text{ , } x > 2$

1-5 Resolver las siguientes Inecuaciones Algebraicas:

$\frac{5}{x} > 1$	$\frac{6}{x} \le 3$	$\frac{8}{x-2} < 0$	$0 < x < 5$; $x < 0,\ x \ge 2$; $x < 2$
$\frac{2}{x-4} < 1$	$\frac{6x+8}{x-4} < 2$	$\frac{6}{x-3} < \frac{2}{x+1}$	$x < 4,\ x > 6$; $-4 < x < 4$; $x < -3,\ -1 < x < 3$
$\frac{x-1}{x-2} < 1$	$\frac{9}{x-2} > x-2$	$\frac{12x}{x+3} > x+3$	$x < 2$; $x < -1,\ 2 < x < 5$; $x < -3$
$\frac{x-1}{x-4} < \frac{x-3}{x-2}$	$\frac{x-3}{x-5} > 1$	$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1} < 0$	$x < 2,\ 5/2 < x < 4$; $x > 5$; $1 < x < 2,\ x > 3$
$\frac{3x-1}{x-4} < 2$	$\frac{x^2+1}{x^2+9} < 0$	$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} < 0$	$-7 < x < 4$; $\varnothing$; $1 < x < 2,\ 3 < x < 4$
$\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} < 1$	$\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x-2} > 6$		$1 < x < 2,\ x > 5/2$; $0 < x < 0.3,\ 1 < x < 1.2,\ 2 < x < 3$

1-6 Demostrar las siguientes Propiedades del Valor Absoluto:

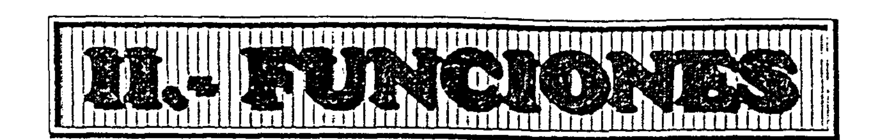
$|a+b| \ge |a| - |b|$ $\quad |a-b| \le |a| + |b|$ $\quad |a-b| = |b-a|$ $\quad |a^n| = |a|^n$ $\quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

1-7 Resolver las siguientes Ecuaciones con Valor Absoluto:

$\lvert x\rvert + 2 = 5$	$\lvert x\rvert + 3 = 1$	$\lvert x\rvert^2 - 2\lvert x\rvert - 3 = 0$	± 3 ; $\varnothing$; ± 3
$\lvert x-1\rvert = 4$	$3\lvert x-2\rvert = 12$	$\lvert x\rvert^2 - 5\lvert x\rvert + 6 = 0$	$-3,\ 5$; $-2,\ 6$; $\pm 2,\ \pm 3$
$\lvert x\rvert + 6 = \lvert 2x\rvert$	$\lvert 2x-3\rvert = 7$	$\lvert x\rvert^2 + \lvert x\rvert - 2 = 0$	± 6 ; $-2,\ 5$; ± 1
$\lvert x\rvert^2 = 9$	$\lvert x-6\rvert = \lvert x-2\rvert$	$\lvert 3x-9\rvert = \lvert x-7\rvert$	± 3 ; 4 ; $1,\ 4$
$\left\lvert\frac{x+4}{x-2}\right\rvert = 3$	$\frac{\lvert x\rvert+3}{\lvert x\rvert-2} = 2$	$\frac{\lvert x+4\rvert}{\lvert x\rvert-1} = 2$	$5,\ 1/2$; ± 7 ; $-2,\ 6$
$\lvert 2^x\rvert = 8$	$\lvert Log\, x\rvert = 1$	$\lvert Sen\, x\rvert = 1$	3 ; $10,\ 0.1$; $\pm \pi/2$

1-8 Resolver las siguientes Inecuaciones con Valor Absoluto:

$\lvert x-3\rvert < 2$	$\lvert 2x-5\rvert < 1$		$1 < x < 5$; $2 < x < 3$
$\lvert x-4\rvert > 1$	$\lvert 10-4x\rvert > 2$		$x < 3,\ x > 5$; $x < 2,\ x > 3$
$\left\lvert\frac{4}{x-3}\right\rvert > 2$	$\left\lvert\frac{3}{x-5}\right\rvert < 1$	$\left\lvert\frac{x-9}{x-3}\right\rvert < 2$	$1 < x < 5,\ x \ne 3$; $x < 2,\ x > 8$; $x < -3,\ x > 5$
$\left\lvert\frac{x-4}{x-2}\right\rvert < 1$	$\left\lvert\frac{3x-1}{x-2}\right\rvert > 2$	$\left\lvert\frac{3x+2}{x-1}\right\rvert > 2$	$x > 3$; $x < -3,\ 1 < x < 2,\ x > 2$; $x < -4,\ 0 < x < 1,\ x > 1$
$\lvert x-5\rvert - \lvert x-3\rvert < 0$	$\lvert x-8\rvert - \lvert x-4\rvert > 0$		$x > 4$; $x < 6$
$\lvert 2x-3\rvert - \lvert x-6\rvert < 0$	$\lvert x-4\rvert - \lvert 5x-8\rvert < 0$		$-3 < x < 3$; $x < 1,\ x > 2$
$\left\lvert\frac{x-4}{x+2}\right\rvert - \left\lvert\frac{x-6}{x-3}\right\rvert < 0$	$\left\lvert\frac{x+3}{x+1}\right\rvert - \left\lvert\frac{x-6}{x+2}\right\rvert \ge 0$		$0 < x < 11/2,\ x \ne 3,\ x > 8$; $x \ge -6/5$
$\lvert x-5\rvert + \lvert x-2\rvert < 7$	$\lvert 3x-1\rvert - \lvert 2x-1\rvert > 5$		$0 < x < 7$; $x < -5,\ x > 5$
$\lvert x+2\rvert - \lvert x\rvert + \lvert x-4\rvert \ge 4$	$\lvert x-5\rvert + \lvert x-3\rvert < \lvert x-1\rvert$		$x \le 2,\ x \ge 6$; $3 < x < 7$
$\lvert x^2-10\rvert < 6$	$\lvert x^2-3x-8\rvert > 10$		$-4 < x < -2,\ 2 < x < 4$; $x < -3,\ 1 < x < 2,\ x > 6$



II.- FUNCIONES

El objetivo de este capítulo es el de definir al concepto de Función y analizar las diversas clases y tipos de Funciones, indicando sus características básicas y sus gráficas correspondientes.



II-1 PAR ORDENADO

Un Par ordenado, es una pareja de elementos, que guardan un orden determinado:

Si: $(a, b) = (x, y) \Rightarrow a = x \; . \; b = y$

En (x,y) x se llama Primer componente
y se llama Segundo componente.

<u>Ej 2-1</u> Los Pares $(3,5)$; $(5,3)$ Son dos Pares ordenados de Números Reales ($\mathbb{R}$), diferentes entre sí.

PRODUCTO CARTESIANO

El Producto Cartesiano: $A \times B$, de los Conjuntos: A, B ; es el Conjunto de todos los Pares ordenados: (a,b); donde: $a \in A, b \in B$ simbólicamente se tiene:



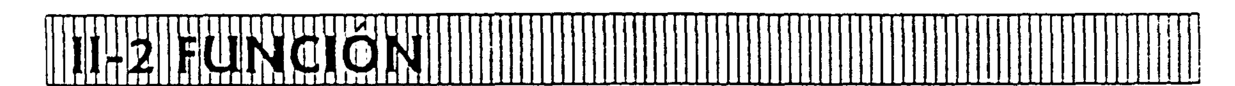
$$A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

<u>Ej 2-2</u> Si: $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 3\}$ A, B son dos Conjuntos de $\mathbb{R}$

$A \times B = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\}$ Producto Cartesiano de: A, B

PLANO COORDENADO

El Plano Coordenado es el Producto Cartesiano: $R \times R$ (Donde: R es el Conjunto de todos los Reales). Consecuentemente el Plano Coordenado será el Conjunto de todos los Pares ordenados de Números Reales, conteniendo infinito número de Pares ordenados.



II-2 FUNCIÓN

Una Función es un Conjunto de Pares ordenados: (x,y) entre los cuales no existen dos Pares, con el mismo Primer componente.

<u>Ej 2-3</u> $\{(a, x), (b, y), (c, z)\}$ Este Conjunto de Pares ordenados es una Función

$\{(a, x), (b, z), (c, z)\}$ Es también una Función, pese a reiterarse un 2do componente

$\{(a, x), (a, y), (c, z)\}$ Este Conjunto no es una Función, ya que se reitera un 1er componente.

DOMINIO Y CODOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El Dominio es el Conjunto de Primeros componentes de los Pares ordenados de una Función, se simboliza: D_f

El Codominio es el Conjunto de Segundos componentes de Pares ordenados de una Función, se simboliza: C_f

Ej 2-4 $f: \{(a,z),(b,y),(c,x),(d,w),(e,v)\}$ — Función

$D_f: \{a,b,c,d,e\}$; $C_f: \{z,y,x,w,v\}$ — Dominio y Codominio de la Función.

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Si el Dominio de una Función es $\mathbb{R}$ (Conjunto de todos los Números Reales), siendo el Codominio, también $\mathbb{R}$: se obtendrá una FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

En las Funciones Reales de Variable Real, el número de Pares ordenados es grande, por eso es que en lugar de indicar a la Función como un Conjunto de Pares Ordenados, es preferible asignar a la Función una Regla de correspondencia: $y = f_{(x)}$

En: (x,y) x es el Primer componente, se llama Variable Independiente
y es el Segundo componente, se llama Variable Dependiente.

Dada una Regla de correspondencia $y = f_{(x)}$; se asignan valores arbitrarios a la Variable Independiente x ; para así obtener valores en y

Ej 2-5 Si: $y = f_{(x)}$

$y = 2x - 1$

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
...	...

La Función Real de Variable Real, se expresa por una Regla de correspondencia. Asignando valores en x se obtienen otros para y

La misma Función se expresa de varias maneras, como Conjunto de Pares ordenados, se tiene:

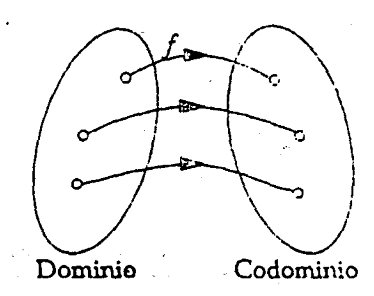
$f: \{\ldots,(-2,-5),(-1,-3),(0,-1),(1,1),(2,3),\ldots\}$

Note que la Función posee infinitos Pares ordenados, de los cuales se indican solo algunos.

Mediante Diagramas de Venn es ilustrativo observar la relación entre el Dominio y Codominio de una Función.

El Primer Conjunto o Conjunto de los Primeros componentes, es el Dominio de la Función D_f ; Contiene a todos los Números Reales.

El Segundo Conjunto o Conjunto de Segundos componentes, es el Codominio de la Función C_f contiene también a todos los Números Reales. Por tanto se concluye que la Función es de Reales en Reales: $\mathbf{R} - \mathbf{R}$

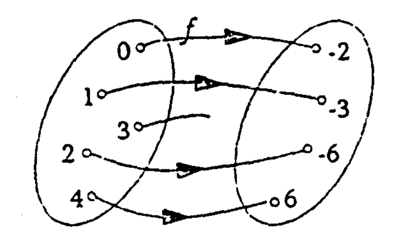


2-1 Analizar, determinar algunos Pares y graficar por Venn, las Funciones: a) $y = f_{(x)} = \dfrac{6}{x-3}$

$f: \{(0,-2),(1,-3),(2,-6),(3,?),(4,6),\ldots\}$

Asignando valores arbitrarios en x se obtienen los correspondientes de y

Se observa que para $x = 3$; no existe y (No es válida la división entre cero). Para que la Función exista, se debe excluir de su Dominio a 3. La Función no es de: $\mathbf{R} - \mathbf{R}$



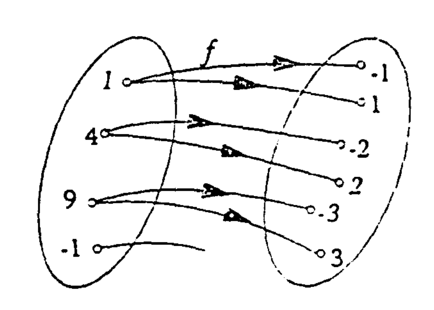
b) $y = f_{(x)} = \pm\sqrt{x}$

$f: \{(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2)\ldots\}$

La expresión indicada, no es una Función, ya que existen Pares con el mismo Primer componente.

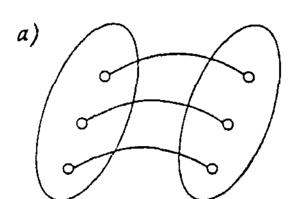
Ademas note que para valores negativos de x ; no existe Segundo componente

Expresiones como la indicada, no son Funciones, son simplemente relaciones.



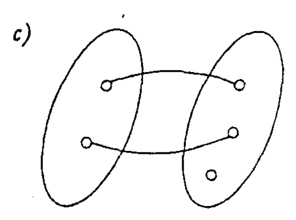
2-2 En los siguientes Esquemas generales de Diagramas de Venn, determinar cuales representan una Función (El 1[er] Conjunto es el Dominio, el 2[do] el Codominio)

a)

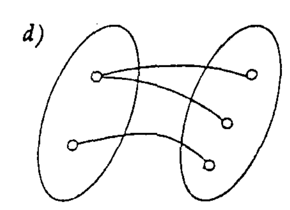


b)

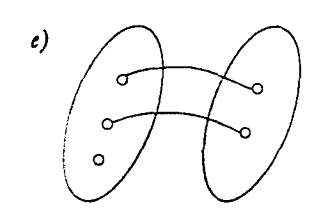
c)



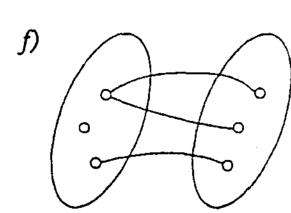
d)



e)



f)



Los esquemas representan situaciones generales, que muestran relaciones entre Pares ordenados, generalizándose sus conclusiones a cualquier tipo de Función.

a) El esquema si representa a una Función, nótese que todos los elementos del Dominio están relacionados con alguno del Codominio.

b) El esquema si representa a una Función, nótese que dos elementos del Dominio, están relacionados con solo uno del Codominio.

c) El esquema si representa a una Función, nótese que un elemento del Codominio no está relacionado con ninguno del Dominio.

d) El esquema no representa a una Función, un elemento del Dominio está relacionado con dos del Codominio (Un 1[er] componente de Par ordenado no debe reiterarse)

e) El esquema no representa a una Función, porque el Dominio no debería incluir elementos que no estén relacionados con otros del Codominio.

f) El esquema no representa a una Función, por dos razones: Un elemento del Dominio no debe relacionarse con dos del Codominio; No debe incluirse en el Dominio a un elemento que no esté relacionado con otro del Codominio.

Definiciones posteriores catalogan a los Esquemas como: a) Función Biyectiva; b) Función Suryectiva, no Inyectiva; c) Función Inyectiva, no Suryectiva

Un ejemplo de la vida real, permite recordar nemotécnicamente lo anterior:

Suponiendo que el Matrimonio hace el papel de Función, relacionando al Conjunto de Damas (Dominio) con el de Caballeros (Codominio); Los Pares ordenados son entonces parejas de una sociedad, donde implícitamente se aceptan Caballeros bígamos, no Damas bígamas. Entonces analizando los esquemas:

a) Es admitido, una Dama con un Caballero, un Caballero con una Dama, ningúna Dama o Caballero queda sin pareja (Es Función)

b) Admitido, aunque un Caballero esté relacionado con dos Damas (Es Función)

c) Es admitido, un Caballero soporta quedarse sin pareja (Es Función)

d) No admitido, porque no se acepta que una Dama esté relacionada con dos Caballeros (No es Función)

e) No es admitido, una Dama no aceptaría quedarse sin pareja (No es Función)

f) No es admitido, porque no es correcto que mientras una Dama está doblemente relacionada, otra quede sin pareja (No es Función)

Las Funciones Reales de Variable Real, que representan cada caso son:

a) $f_{(x)} = 2x - 1$ b) $f_{(x)} = x^3 - 3x$ c) $f_{(x)} = 3^x$ d) $f_{(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$ e) $f_{(x)} = \dfrac{6}{x - 3}$ f) $f_{(x)} = \sqrt{x}$

II-3 SISTEMA CARTESIANO DE COORDENADAS

Un Sistema Cartesiano Rectangular de Coordenadas, es el conjunto de dos Rectas Reales perpendicularmente dispuestas (La horizontal, se llamará EJE DE ABSCISAS, la vertical: EJE DE ORDENADAS, La Intersección se llama: ORIGEN DE COORDENADAS)

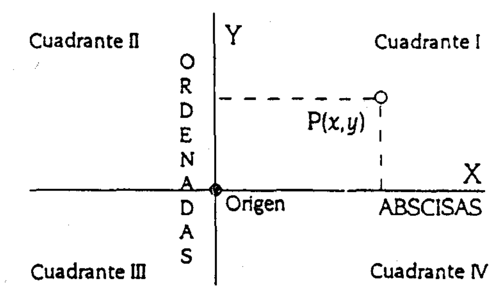
El Sistema define a los Puntos del Plano en asociación biunívoca, con los Pares de Números Reales: (x,y)

Por convenio se asocia el Eje de abscisas con el Primer componente x ; El Eje de ordenadas con el Segundo componente y

Un punto del Plano se designará como: $P(x,y)$

La distancia: x desde P al Eje de ordenadas Y, se llamará Abscisa, La distancia: y desde P al Eje de abscisas X, se llamará Ordenada.

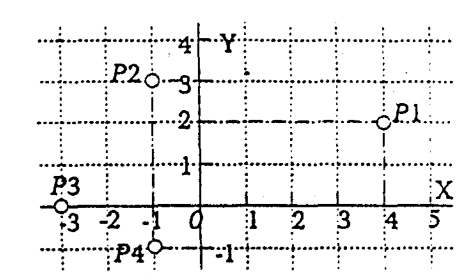
La Abscisa y la Ordenada, son las Coordenadas Cartesianas Rectangulares del punto: $P(x,y)$

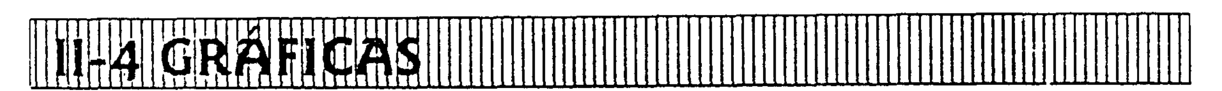


Ej 2-6 Como puntos en el Plano, se ubican los siguientes Pares Coordenados:

$P1(4,2)$; $P2(-1,3)$
$P3(-3,0)$; $P4(-1,-1)$

Note la ubicación de una escala adecuada en los Ejes Coordenados.





II-4 GRÁFICAS

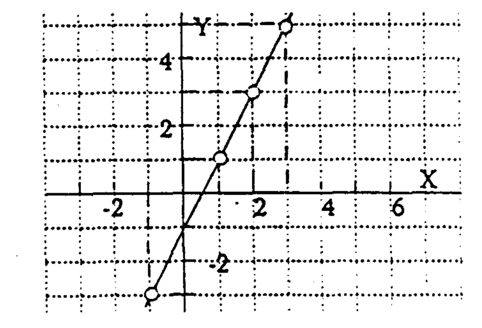
Una gráfica en el Plano Coordenado, es el Conjunto de Pares ordenados (Puntos) que satisfacen una Función o Relación.

Ej 2-7 Gráfica de: $f_{(x)} = y = 2x + 1$

Si: $y = 2x + 1$
En columna se determinan algunos Pares ordenados, que se representarán como puntos.

Luego de ubicar algunos puntos, se unen entre sí formando una Recta.

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3



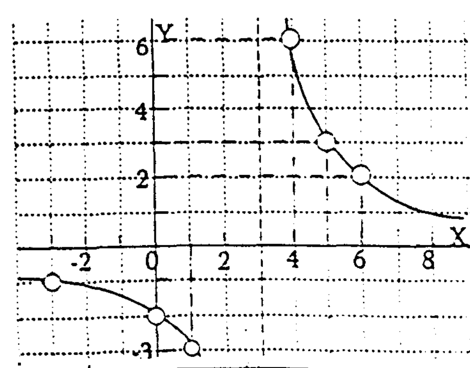
2-3 Graficar: $y = \dfrac{6}{x-3}$

Si: $y = \dfrac{6}{x-3}$

Determinando algunos Pares, como puntos en el Plano

No existe un Par con 3 como Primer componente, por ello en la gráfica se ignora este valor.

x	y
0	-2
1	-3
2	-6
3	∃
4	6
5	3
6	2
-3	-1



2-4 Graficar las siguientes Funciones o Relaciones:

a) $y = x^2$

Si: $y = x^2$ A partir de la Regla de correspondencia, asignando valores arbitrarios a x, se calculan los de y, según la tabla:

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Usando los Pares ordenados como puntos, luego de ubicarlos en el Plano, se los reúne, de esa manera se obtiene la gráfica.

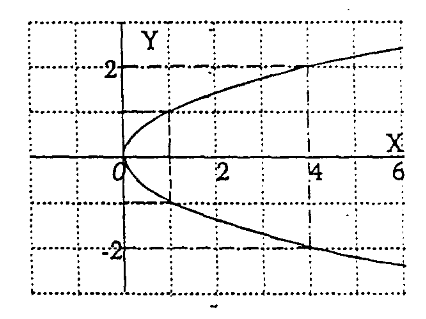
Note que cada dos diferentes Primeros componentes del Par, determinan solo a uno como Segundo componente, esto no afecta al carácter de Función que se tiene.

b) $y = \pm\sqrt{x}$

Si: $y = \pm\sqrt{x}$ Se determinan algunos Pares que como puntos se ubican en el Plano.

Observando la tabla, se observa que cada Primer componente determina dos Segundos componentes, por tanto no es una Función.

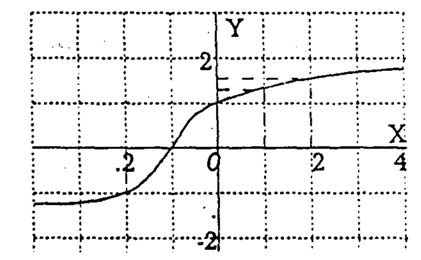
x	y
0	0
1	-1 1
4	2 -2
9	3 -3



c) $y = \sqrt[3]{x+1}$

Si: $y = \sqrt[3]{x+1}$ Determinando algunos Pares ordenados o puntos y ubicándolos en el Plano, al unirlos se obtiene la gráfica requerida. Es una Función.

x	y
-2	-1
-1	0
0	1
1	1.26
2	1.44
7	2



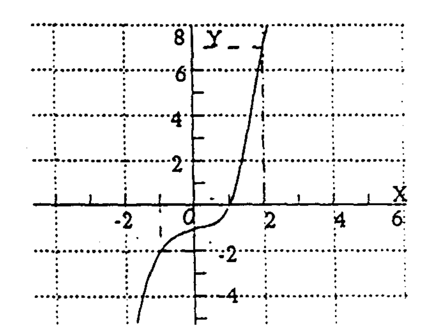
d) $y = x^3 - 1$

Si: $y = x^3 - 1$

Determinando algunos Pares ordenados o puntos, se ubican en el Plano y se unen entre si.

Es una Función.

x	y
-2	-9
-1	-2
0	-1
1	0
2	7

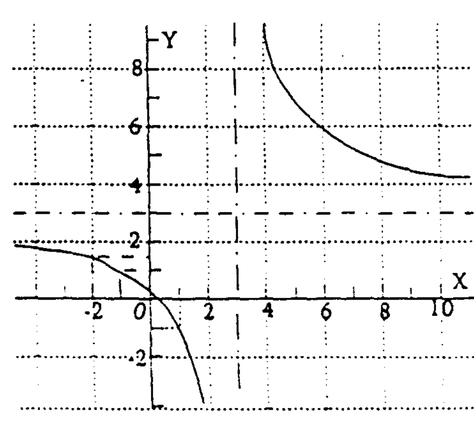


e) $y = \dfrac{3x - 1}{x - 3}$

Si: $y = \dfrac{3x - 1}{x - 3}$

Determinando algunos puntos, se obtiene la gráfica de esta Función, posteriormente se la analiza con más detalle.

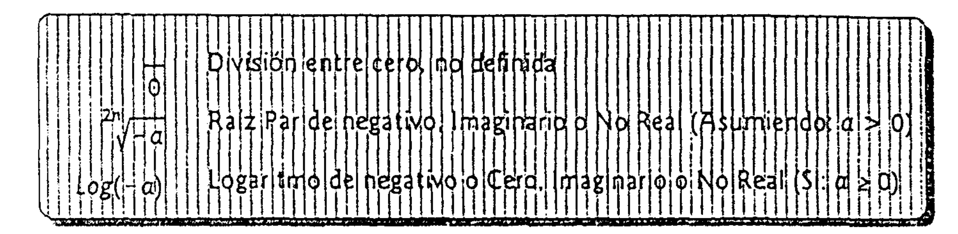
x	y
-2	1.41
-1	1
0	0.33
1	-1
2	-5
3	??
4	11



II-5 DOMINIOS REALES

os Dominios Reales de definición de una Función Real de Variable Real, son los Conjuntos de primeros omponentes de los Pares ordenados que conforman la Función.

ara calcular los Dominios Reales de una Función, es suficiente con evitar que el Primer componente: x del Par rdenado: (x,y) esté afectado por expresiones como:



uego, todo valor de x que no esté afectada por las anteriores situaciones, pertenecerá al Dominio (D_f) de una unción.

j 2-8 Se calculan los Dominios de las siguientes Funciones:

a) $f_{(x)} = 2x - 3$ La Variable: x no está afectada por ninguna de las expresiones que se deben evitar.

Por tanto: x no está sujeta a ninguna restricción, puede tomar el valor de cualquier Número Real. El Dominio es todo el Conjunto de los Números Reales: $D_f: \forall x \in \mathbf{R}$

b) $f_{(x)} = x^2 + 1$ La Variable: x no está sujeta a restricción alguna.

$D_f: \forall x \in \mathbf{R}$

c) $f_{(x)} = \dfrac{1}{x - 2}$ Hay posibilidad de división entre cero, lo que debe evitarse, entonces se debe evitar que: $x = 2$, es decir x no debe tomar el valor de 2. . El Dominio será todo el Conjunto de los Números Reales, excepto: $x = 2$

$D_f: \forall x \in \mathbf{R}, x \neq 2$

d) $f_{(x)} = +\sqrt{x - 5}$ Debe evitarse la Raíz Par de negativos (En este caso Raíz Cuadrada), entonces debe cumplirse que: $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

Por tanto el Dominio será el Conjunto de todos los Números Reales, mayores o iguales que: 5 $D_f: \forall x \in \mathbf{R}, x \geq 5$

Note que no es necesario evitar a $x = 0$, ya que la raíz de 0 existe, es de valor 0

e) $f_{(x)} = 3^{x+1}$ La Variable: x no está sujeta a restricción alguna.

$D_f: \forall x \in \mathbf{R}$

f) $f_{(x)} = Log(x - 4)$ Debe evitarse el Logaritmo de negativos, por ello debe cumplirse

$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$. Entonces el Dominio será el Conjunto de todos los Números Reales, mayores que: 4

$D_f: \forall x \in \mathbf{R}, x > 4$

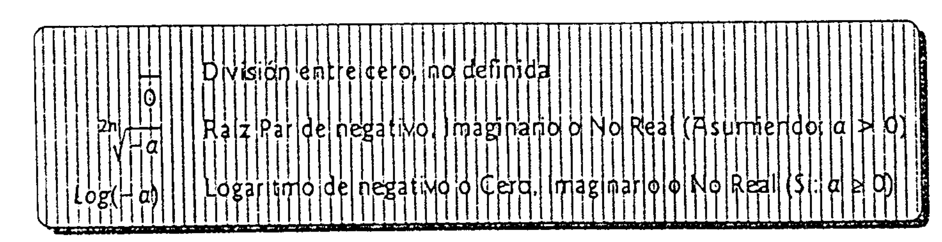
Note que también debe evitarse el Logaritmo de cero, que no existe. (En cambio la Raíz Par de cero existe, es Real)

En posteriores análisis de Funciones, se encontraran mas situaciones que deben evitarse, para obtener el Dominio de una Función Real de Variable Real

II-6 CODOMINIOS REALES

Codominios Reales de una Función Real de Variable Real, son los Conjuntos de segundos componentes, de los Pares ordenados que conforman la Función.

Para determinar los Codominios Reales de una Función, es suficiente con evitar que el segundo componente: y del Par ordenado: (x,y); esté afectada por expresiones tales como:



Por tanto todo valor: y que no esté afectada por las anteriores situaciones, pertenecerá al Codominio (C_f) de una Función

Como el análisis se hace sobre la Variable y ; previamente se debe despejar la Variable x ; a partir de la forma usual de expresión de una Función: $y = y_{(x)}$

Note que las mismas situaciones que se deben evitar en el cálculo de Dominios, también se debe evitar en el cálculo de Codominios.

Ej 2-9 Se determinan los Codominios de las siguientes Funciones:

a) $f_{(x)} = 2x - 3 = y$

$\Rightarrow \quad x = \frac{y+3}{2}$

$C_f: \quad \forall\, y \in \mathbf{R}$

La Variable: y no está afectada por las situaciones que se deben evitar.

Por tanto: y no está sujeta a ninguna restricción, puede tomar el valor de cualquier Número Real.

El Codominio es todo el Conjunto de los Números Reales:

b) $f_{(x)} = x^2 + 1 = y$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{y-1}$

$C_f: \quad \forall\, y \in \mathbf{R}\ ,\ y \geq 1$

En la Variable: y debe evitarse la Raíz Par de negativos (En este caso Raíz Cuadrada), entonce debe cumplirse: $y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$

Por tanto: el Codominio estará constituido por todos los Números Reales, mayores o iguales a 1.

c) $f_{(x)} = \frac{1}{x-2} = y$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1+2y}{y}$

$C_f: \quad \forall\, y \in \mathbf{R}\ ,\ y \neq 0$

Debe evitarse la División entre cero.

Observando la expresión donde se despejó: x, se debe evitar que: y tome el valor de cero. ($y \neq 0$)

Por tanto: el Codominio estará constituido por todos los Números Reales, excepto el cero.

d) $f_{(x)} = \sqrt{x-5} = y$

$\Rightarrow \quad x = y^2 + 5$

$C_f: \quad \forall\, y \in \mathbf{R}$

La Variable: y no está afectada por ninguna de las situaciones que se deben evitar. Por tanto: y no está sujeta a ninguna restricción, puede tomar el valor de cualquier Número Real.

El Codominio es todo el Conjunto de los Números Reales.

e) $f_{(x)} = 3^{x+1} = y$

$\Rightarrow \quad x = \frac{Log\ y}{Log\ 3} - 1$

$C_f: \quad \forall\, y \in \mathbf{R}\ ,\ y > 0$

Debe evitarse el Logaritmo de negativos o cero, entonces debe cumplirse que: $y > 0$

El Codominio es todo el Conjunto de los Números Reales Positivos (Que no incluyen al cero)

2-5 Aplicando las Reglas correspondientes, hallar los Dominios y Codominios de las siguientes Funciones:

a) $f_{(x)} = \dfrac{2x - 1}{x - 4} = y$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{4y - 1}{y - 2}$

Dominio: Para hallar el Dominio de la Función, se debe evitar la división entre cero, por tanto debe considerarse que: $x \neq 4$

$D_f: x \in \mathbb{R} \quad , \quad x \neq 4$

Codominio: Para hallar el Codominio de la Función, luego de despejar la Variable: x , se debe evitar la división entre cero: $y \neq 2$

$C_f: \; y \in \mathbb{R} \quad , \quad y \neq 2$

b) $f_{(x)} = \dfrac{20}{x^2 - 4} = y$

$y = \dfrac{20}{(x + 2)(x - 2)}$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\dfrac{20 + 4y}{y}}$

Dominio: Evitando la división entre cero (Después de factorizar), se concluye que: $x \neq 2; x \neq -2$

$D_f: \; x \in \mathbf{R} \; , \; x \neq 2 \; , x \neq -2$

Codominio: Evitando la Raíz Cuadrada de negativos, dentro del Radical debe cumplirse: $20 + 4y \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; y \geq -5$ Además se debe evitar la división entre cero.

$C_f: \; y \in \mathbf{R} \; , \; y \geq -5 \; , \; y \neq 0$

c) $f_{(x)} = \sqrt{x^2 - 4x + 3} = y$

$x^2 - 4x + (3 - y^2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3 - y^2)}}{2}$

$x = 2 \pm \sqrt{1 + y^2}$

Dominio: Evitando la Raíz Cuadrada de negativos:

$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; -\infty < x \leq 1 \; , \; 3 \leq x < \infty$ La Inecuación Cua-drática se resolvió en P-1-8-a

$D_f: \; x \in \mathbf{R} \; , -\infty < x \leq 1 \; , \; 3 \leq x < \infty$

Codominio: Evitando una Raíz cuadrada de negativos:

$1 + y^2 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; y \in \mathbf{R}$ (Ver equivalencia en P-1-9-a)

$C_f: y \in \mathbf{R}$

d) $f_{(x)} = Log(1 - x^2) = y$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{1 - 10^y}$

Dominio: Evitando el Logaritmo de negativos:

$1 - x^2 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; -1 < x < 1$ (Inecuación resuelta P-1-10)

$D_f: \; x \in \mathbf{R} \; , \; -1 < x < 1$

Codominio: Evitando Raíces cuadradas de negativos:

$1 - 10^y > 0 \;\; \Rightarrow \;\; y < 0 \; . \; C_f: \; y \in \mathbf{R} \; , y < 0$

e) $f_{(x)} = Ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} = y$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{e^y + e^{-y}}$

Dominio: Evitando la Raíz Cuadrada de negativos, la División entre cero y Logaritmo de negativos.

$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow \; -1 < x < 1 \;\; ; \;\; x \neq 0 \;\; ; \;\; x > 0$

$D_f \;\; x \in \mathbf{R} \; , \; 0 < x \leq 1$ (Intersectando resultados)

Codominio: No existe restricción alguna (La expresión e^y nunca es cero ni negativa) $C_f: y \in \mathbf{R}$

f) $f_{(x)} = \dfrac{1}{2} Ln \dfrac{1 + x}{1 - x} = y$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

Dominio: Evitando el Logaritmo de negativos:

$\dfrac{1 + x}{1 - x} > 0 \;\; \Rightarrow \;\; -1 < x < 1$ (Ver Ej-1-12-b)

$D_f: \;\; x \in \mathbf{R} \; , -1 < x < 1$

Codominio: No existe restricción alguna sobre la Variable y ; Por tanto

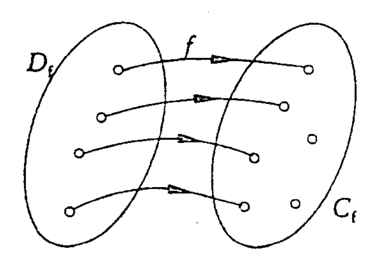
$C_f: \;\; y \in \mathbf{R}$

II-7 TIPOS DE FUNCIONES

FUNCIONES INYECTIVAS

Las Funciones Inyectivas o Univalentes, son aquellas en que todo segundo componente del Par ordenado: (x,y) es correspondencia de un solo primer componente. Simbólicamente se expresa como:

$$\text{Si: } f_{(x_1)} = f_{(x_2)} \Rightarrow x_1 = x_2$$



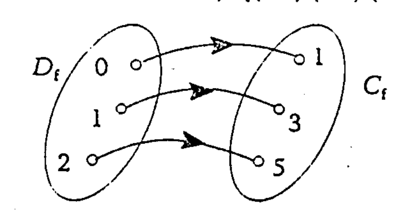
Esquemáticamente por Diagramas de Venn, se observa relación de uno a uno. A un elemento del Dominio, le corresponde solo uno del Codominio. A la vez a uno del Codominio le corresponde solo uno del Dominio.

No afecta al carácter de Función Inyectiva, el que algún elemento del Codominio no participe de la relación.

Ej 2-10 Se analiza la Inyectividad, de las siguientes Funciones Reales:

a) $f_{(x)} = 2x + 1$

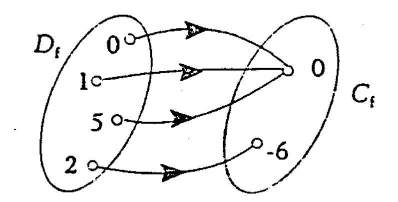
Sus Pares ordenados f: {(0,1),(1,3),(2,5),...}



Función Inyectiva

b) $f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 5x$

Sus Pares ordenados f: {(0,0),(1,0),(2,-6),...}

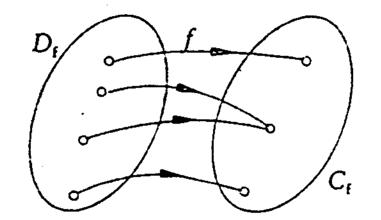


Función No Inyectiva

FUNCIONES SURYECTIVAS

Las Funciones Suryectivas (O Sobreyectivas), son aquellas donde el segundo componente del Par ordenado: (x,y) es cualquier Número Real (El Codominio de la Función, debe ser de todos los Números Reales: $C_f = \mathbb{R}$)

Simbólicamente Si: $y = f_{(x)}$; $y \in \mathbb{R}$



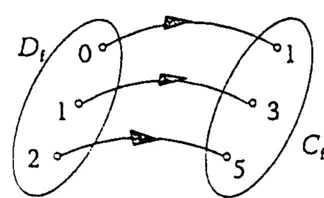
Esquemáticamente por Diagramas de Venn se observa la participación, en la relación, de todos los elementos del Codominio.

No afecta al carácter de Función Suryectiva, el que algún elemento del Codominio, sea correspondencia de varios elementos del Codominio.

Ej 2-11 Se analiza la Suryectividad de las siguientes Funciones

a) $f_{(x)} = 2x + 1$

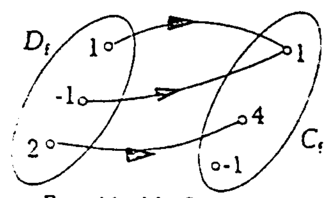
f: {(0,1), (1,3), (2,5),...}



Función Suryectiva

b) $f_{(x)} = x^2$

f: {(1,1), (-1,1), (2,4), ...}



Función No Survectiva

En el 1^er^ diagrama todos los elementos del 2^do^ conjunto se involucran en la Función.

En el 2^do^ diagrama hay elementos del 2^do^ conjunto que no se involucran en la Función.

FUNCIONES BIYECTIVAS

Las Funciones Biyectivas son aquellas que a la vez son Inyectivas y Suryectivas.

2-6 Si el Dominio y Codominio son: $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $B = \{5, 6, 7, 8\}$ indicar que tipo de Función son las siguientes (Se indican sus Pares ordenados)

a) $f: \{(0,5), (1,6), (2,7), (3,8)\}$ Todos los elementos del Dominio participan de la relación, entonces es Función.

La relación es de uno a uno (F. Inyectiva). Todos los elementos del Codominio, están relacionados con alguno del Dominio (F. Suryectiva) Por tanto la Función es Biyectiva.

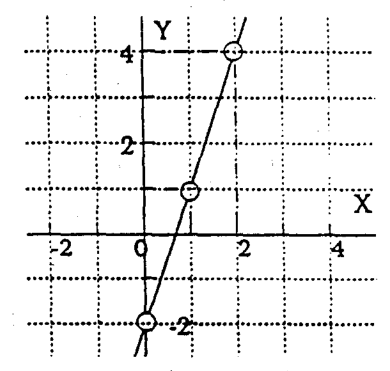
b) $f: \{(0,6), (1,6), (2,8), (3,8)\}$ Todos los elementos del Dominio están relacionados, es Función.

La relación no es de uno a uno (No Inyectiva). La relación no incluye a todos los elementos del Codominio (No Suryectiva, por tanto no es Biyectiva)

c) $f: \{(0,5), (0,6), (2,7), (2,8)\}$ La relación no incluye a todos los elementos del Dominio, no es Función. Es innecesario efectuar otros análisis.

2-7 Indicar a que tipo pertenecen las siguientes Funciones Reales: R–R

a) $f_{(x)} = 3x - 2$

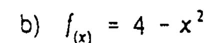


Todos los elementos del Dominio (X) están relacionados, es una Función.

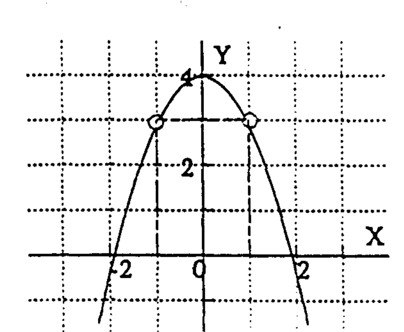
La relación es de uno a uno (F. Inyectiva)

La relación incluye a todos los elementos del Codominio (Y) (Es F. Suryectiva)

Por tanto la Función es Biyectiva. La gráfica se elabora por reglas conocidas.



b) $f_{(x)} = 4 - x^2$

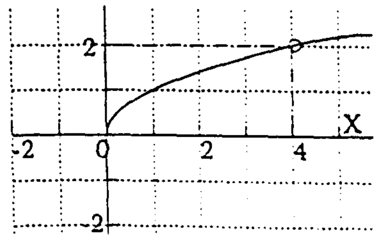


Todos los elementos del Dominio (X) están relacionados, es Función. La relación no es de uno a uno (No Inyectiva)

La relación no incluye a todos los elementos del Codominio (Y) (No Suryectiva). Note que para: $y > 4$ no existe gráfica. Por tanto la Función no es Biyectiva.

Restringiendo el D_f y C_f es posible lograr una Función Biyectiva. En: $f_{(x)} = 4 - x^2$ tomando: $D_f: 0 \leq x < \infty$ La Función es Biyectiva.

c) $f_{(x)} = +\sqrt{x}$; $x \geq 0$



La relación indica que para el Dominio, solo se consideran valores de: $x \geq 0$. Además se toma la Raíz positiva únicamente. Es Función de: $R^+ - R^+$

La relación es de uno a uno (F. Inyectiva)

La relación no incluye a todos los elementos del Codominio (F. No Suryectiva). Por tanto la Función no es Biyectiva.

Note que restringiendo adecuadamente los Dominios o Codominios, es posible obtener Funciones Biyectivas a partir de cualquier relación.

II-8 FUNCIONES INVERSAS

Si la Función: f es el Conjunto de Pares ordenados de la forma (a,b); Siendo f Función Inyectiva. Enton-ces el Conjunto de los Pares ordenados de la forma (b,a) es la Función Inversa de f, se denota por: f^{-1}

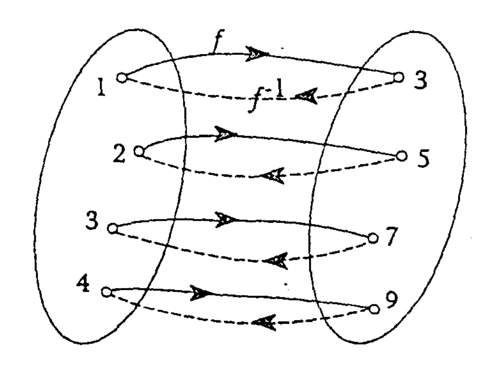
Ej 2-12 f: $\{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$

f^{-1}: $\{(3,1), (5,2), (7,3), (9,4)\}$

La Función: f es una Función Inyectiva.

Note que para obtener f^{-1}, es suficiente con intercambiar los elementos de los Pares de: f

El Dominio de f se convierte en Codominio de f^{-1}; A la vez el Codominio de f, se convierte en el Dominio de f^{-1}



En la Práctica para obtener la Función Inversa de una Función Real de Variable Real, expresada por la Regla de correspondencia: $y = f_{(x)}$; se intercambian Variables, para luego despejar y que será la Función Inversa.

Ej 2-13 Se calcula la Función Inversa de una Función expresada por una Regla de correspondencia $f_{(x)} = 2x + 1$

$y = 2x + 1$ — Dada la Función por la Regla de correspondencia se escribe como: $y = f_{(x)}$

$x \to y \; ; \; y \to x$ — Se intercambian las variables en la Expresión dada, así x pasa a ser y ; a su vez y pasa a ser x

$x = 2y + 1$

$\Rightarrow y = \dfrac{x-1}{2}$ — Despejando y de la expresión antes obtenida.

$f^{-1}_{(x)} = \dfrac{x-1}{2}$ — Función Inversa requerida, expresada a su vez como una Regla de correspondencia.

2-8 Hallar las Funciones Inversas y graficar tanto f como f^{-1}

a) $f_{(x)} = x^3 - 1$

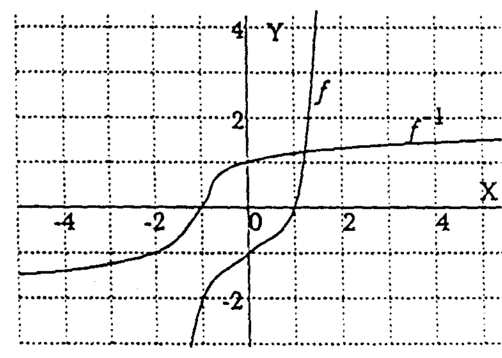
$y = x^3 - 1 \quad ; \quad \begin{matrix} x \to y \\ y \to x \end{matrix}$

$x = y^3 - 1$

$\Rightarrow y = \sqrt[3]{x+1}$

$f^{-1}_{(x)} = \sqrt[3]{x+1}$

Al graficar ambas Funciones, note que la gráfica de la Función Inversa es Simétrica a la gráfica de la Función original.



b) $f_{(x)} = \dfrac{3x-1}{x-3} \; ; \; x \neq 3$

$y = \dfrac{3x-1}{x-3} \quad ; \quad \begin{matrix} x \to y \\ y \to x \end{matrix}$

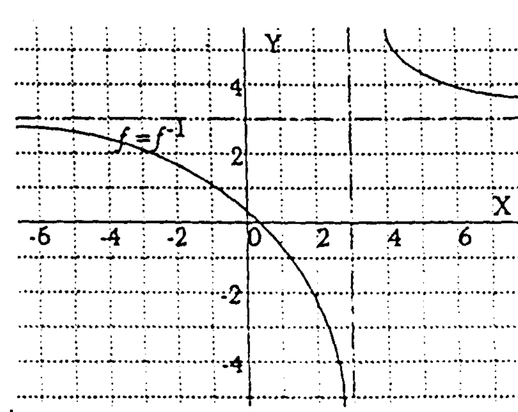
$x = \dfrac{3y-1}{y-3}$

$\Rightarrow y = \dfrac{3x-1}{x-3} \; ; \; x \neq 3$

$f^{-1}_{(x)} = \dfrac{3x-1}{x-3} \; ; \; x \neq 3$

La Función Inversa que se obtiene es idéntica a la Función original.

Por tanto la gráfica de la Función original es igual a la gráfica de la Función inversa.



2-9 Hallar las Funciones Inversas de las siguientes Funciones:

a)

$f_{(x)} = 10^{+\sqrt{x^2+1}}$	Función original
$y = 10^{+\sqrt{x^2+1}}$	Haciendo: $y = f_{(x)}$
$x \to y \; ; \; y \to x$	Intercambiando variables
$x = 10^{+\sqrt{y^2+1}}$	Despejando: y
$Log\,x = Log(10^{+\sqrt{y^2+1}})$	Aplicando Logaritmos
$Log\,x = +\sqrt{y^2+1}\;Log\,10$	Propiedad de Logaritmos. Terminando de despejar a y.
$Log\,x = +\sqrt{y^2+1}$	
$y = \sqrt{(Log\,x)^2 - 1}$	Si: $Log\,10 = 1$
$f^{-1}_{(x)} = \sqrt{(Log\,x)^2 - 1}$	Función Inversa.

b)

$f_{(x)} = x$

$y = x$

$x \to y \; , \; y \to x$

$x = y$

$y = x$

$f^{-1}_{(x)} = x$

Por tanto en este caso la Función Inversa es igual a la Función Original.

En el inciso a); se debe restringir al Dominio ($x \geq 0$); de manera que la Función sea Inyectiva, solo así una Función posee Función Inversa.

2-10 Hallar la Función Inversa de: $f_{(x)} = x^2 - 4x + 3$

$f_{(x)} = x^2 - 4x + 3$

La Función dada es una Función Real de Variable Real.

$y = x^2 - 4x + 3 \qquad \begin{matrix} x \to y \\ y \to x \end{matrix}$

Haciendo: $y = f_{(x)}$, luego se intercambian entre si las Variables.

$x = y^2 - 4y + 3$

$y^2 - 4y + (3 - x) = 0$

Ordenando se observa una ecuación de segundo grado para y. Para despejar y se usa la Ecuación de segundo Grado, se toma a y como Incógnita (x es una constante)

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1(3-x)}}{2\cdot 1}$$

Ordenando y simplificando.

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{4+4x}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{x+1}}{2}$$

Sin embargo para que la Inversa se constituya en una Función, se debe tomar solo uno de los Signos de la Raíz Cuadrada.

$y = 2 \pm \sqrt{x+1}$

Además se debe definir el Dominio de la Función Inversa como:

$f^{-1}_{(x)} = 2 + \sqrt{x+1}$

$D_{f^{-1}}: \; x \in R \; , \; x \geq -1$

2-11 Hallar las Inversas de las Funciones, expresadas como un número finito de Pares ordenados:

a) $f: \; \{(8,1), (7,2), (6,3), (5,4)\}$

b) $g: \; \{(2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9)\}$

De acuerdo a la definición de Funciones Inversas, en los Pares ordenados, los Primeros componentes, se convierten en Segundos componentes de las Funciones Inversas y recíprocamente los Segundos en Primeros.

a) $f: \; \{(8,1), (7,2), (6,3), (5,4)\} \Rightarrow f^{-1}: \; \{(1,8), (2,7), (3,6), (4,5)\}$

b) $g: \; \{(2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9)\} \Rightarrow g^{-1}: \nexists$ No existe, porque g no es Función Inyectiva.

Si se persiste en el Intercambio de componentes de la Función: g se obtendría $\{(4,2), (4,-2), (9,3), (9,-3)\}$ que es un Conjunto de Pares ordenados que no constituye una Función (Porque reitera Primeros componentes); entonces no existe Función Inversa. (Por ello es que para obtener una Función Inversa, antes se debe verificar que es Inyectiva)

II-9 OPERACIONES ENTRE FUNCIONES

Las Operaciones entre Funciones Reales de Variable Real, se definen únicamente en Dominios comunes, es decir sobre la Intersección de sus respectivos Dominios.

Las Operaciones entre éstas Funciones, se efectúan de acuerdo a las clásicas Reglas Algebraicas.

Dadas las Funciones $f_{(x)}$; $g_{(x)}$ donde se asume que poseen idéntico Dominio.

SUMA $(f + g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$

DIFERENCIA $(f - g)_{(x)} = f_{(x)} - g_{(x)}$

PRODUCTO $(f \cdot g)_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$

COCIENTE $(\frac{f}{g})_{(x)} = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \quad ; \quad g_{(x)} \neq 0$

Ej 2-14 Si: $f_{(x)} = 6x^2 + 5$; $g_{(x)} = x^2 - 4x + 3$; Sus Operaciones son las siguientes:

$$(f + g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)} = (6x^2 + 5) + (x^2 - 4x + 3) = 7x^2 - 4x + 8$$

$$(f - g)_{(x)} = f_{(x)} - g_{(x)} = (6x^2 + 5) - (x^2 - 4x + 3) = 5x^2 + 4x + 2$$

$$(f \cdot g)_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)} = (6x^2 + 5)(x^2 - 4x + 3) = 6x^4 - 24x^3 + 23x^2 - 20x + 15$$

$$(\frac{f}{g})_{(x)} = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \frac{6x^2 + 5}{x^2 - 4x + 3} = 6 + \frac{24x - 13}{x^2 - 4x + 3} \quad ; x \neq 1 \quad ; \quad x \neq 3$$

Note que la División no es exacta, se evitan los valores de: 1; 3 para así evitar la División entre cero.

2-12 Efectuar y graficar: $(f + g)_{(x)}$; Si:

a) $f_{(x)} = 4 - x \quad ; \quad g_{(x)} = 2x - 3$

Si: $(f + g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$

$= (4 - x) + (2x - 3)$

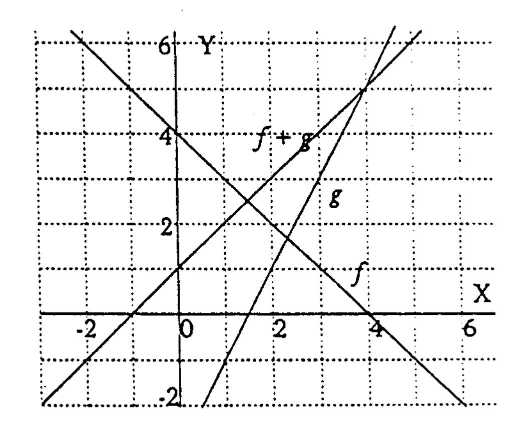
$= x + 1$

Para graficar: f ; g ; $f + g$; se calculan algunos puntos en cada caso, para luego unir.

x	f
0	4
2	2
4	0

x	g
0	-3
2	1
4	5

x	$f + g$
0	1
2	3
4	5



b) $f_{(x)} = +\sqrt{x - 3} \quad ; \quad g_{(x)} = +\sqrt{2 - x}$

Si: $(f + g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$

$= (+\sqrt{x - 3}) + (+\sqrt{2 - x})$

$= \sqrt{x - 3} + \sqrt{2 - x}$

Procediendo como en los casos anteriores

Sin embargo la Función Suma no existe para ningún valor real de: x

Note que reemplazando en la Función Suma cualquier valor de: x, se obtendrán Expresiones Imaginarias La razón de esta incongruencia, está en que los Dominios de las Funciones f, g no poseen un elemento en común, es decir el Dominio común es el vacío (D_f: $x \geq 3$; D_g: $x \leq 2$ $\quad D_f \cap D_g = \emptyset$)

II-10 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

La Composición de Funciones Reales de Variable Real, es otra operación entre dos o mas Funciones, que se efectúa sobre un Dominio común, obteniendo por resultado a otra Función.

La Composición entre las Funciones: $f_{(x)}$; $g_{(x)}$ hace que la Función $g_{(x)}$ pase a ser variable de la Función: $f_{(x)}$. Simbólicamente la Composición se escribe:



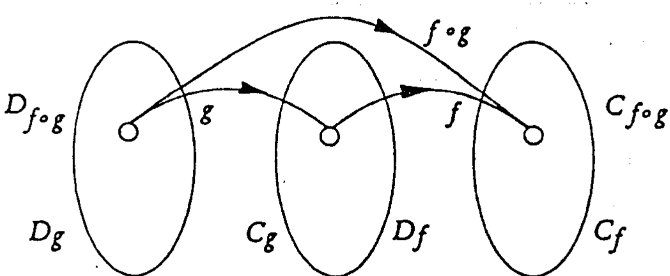
$$(f \circ g)_{(x)} = f_{[g_{(x)}]}$$

Comúnmente (Salvo casos especiales) se registra que: $(f \circ g)_{(x)} \neq (g \circ f)_{(x)}$

Ej 2-15 Si: $f_{(x)} = x^2 - 1$; $g_{(x)} = x + 3$ se efectuará la Composición: $f \circ g$

$(f \circ g)_{(x)} = f_{[g_{(x)}]}$	De la definición de Composición de Funciones.
$f_{(x)} = x^2 - 1$	Considerando a la Función original $f_{(x)}$, donde la Variable es x
$f_{(g)} = g^2 - 1$	La nueva Variable es g (En lugar de x)
$f_{[g_{(x)}]} = (x + 3)^2 - 1$	Reemplazando en $g_{(x)} = x + 3$; se obtiene la Composición requerida.

Esquemáticamente por Diagramas de Venn, la Composición entre f, g es la mostrada, donde se puede apreciar que el resultado de una Composición entre Funciones, es otra Función, que hace el trabajo simultáneo de las originales.



2-13 Hallar las Composiciones $f \circ g$; $g \circ f$ para los siguientes pares de Funciones:

a) $f_{(x)} = 3x + 2$; $g_{(x)} = 5x^2 + 4$

$(f \circ g)_{(x)} = f_{[g_{(x)}]}$

Si: $f_{(x)} = 3x + 2$

$f_{(g)} = 3g + 2$

$f_{[g_{(x)}]} = 3(5x^2 + 4) + 2$

$= 15x^2 + 14$

$(g \circ f)_{(x)} = g_{[f_{(x)}]}$

$g_{(x)} = 5x^2 + 4$

$g_{(f)} = 5f^2 + 4$

$g_{[f_{(x)}]} = 5(3x + 2)^2 + 4$

$= 45x^2 + 60x + 24$

Comparando resultados se aprecia que:

$f \circ g \neq g \circ f$

Usualmente la Composición de Funciones no es conmutativa.

b) $f_{(x)} = Log\, x$; $g_{(x)} = x$

$(f \circ g)_{(x)} = f_{[g_{(x)}]}$

Si: $f_{(x)} = Log\, x$

$f_{(g)} = Log\, g$

$f_{[g_{(x)}]} = Log\, x$

$(g \circ f)_{(x)} = g_{[f_{(x)}]}$

$g_{(x)} = x$

$g_{(f)} = f$

$g_{[f_{(x)}]} = Log\, x$

En este caso especial se verifica que:

$f \circ g = g \circ f$

Esta situación siempre se verificará si una de las Funciones es simplemente x

2-14 En los siguientes grupos de Funciones, calcular las operaciones requeridas

a) $f_{(x)} = Log(x^2 + 5x)$; $g_{(x)} = \dfrac{x+3}{x-3}$: Hallar: $f \circ g$: $g \circ f$

$$(f \circ g)_{(x)} = f_{(g_{(x)})}$$

$$\text{Si: } f_{(x)} = Log(x^2 + 5x)$$

$$f_{(g)} = Log(g^2 + 5g)$$

$$f_{(g_{(x)})} = Log\left|\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2 + 5\left(\frac{x+3}{x-3}\right)\right|$$

$$(g \circ f)_{(x)} = g_{(f_{(x)})}$$

$$\text{Si: } g_{(x)} = \frac{x+3}{x-3}$$

$$g_{(f)} = \frac{f+3}{f-3}$$

$$g_{(f_{(x)})} = \frac{Log(x^2 + 5x) + 3}{Log(x^2 + 5x) - 3}$$

Procediendo a la Composición, de acuerdo a Reglas indicadas anteriormente:

b) $f_{(x)} = \sqrt{x+1}$; $g_{(x)} = Sen\ x$; $h_{(x)} = x^3 - 5$ Hallar: $f \circ g \circ h$: $h \circ f \circ g$

$$(f \circ g \circ h)_{(x)} = (f \circ g)_{(h_{(x)})} = f_{(g_{(h_{(x)})})}$$

$$\text{Si: } f_{(x)} = \sqrt{x+1}$$

$$f_{(g)} = \sqrt{g+1}$$

$$f_{(g_{(x)})} = \sqrt{Sen\,x + 1}$$

$$f_{(g_{(h)})} = \sqrt{Sen\,h + 1}$$

$$f_{(g_{(h_{(x)})})} = \sqrt{Sen(x^3 - 5) + 1}$$

$$(h \circ f \circ g)_{(x)} = (h \circ f)_{(g_{(x)})} = h_{(f_{(g_{(x)})})}$$

$$\text{Si: } h_{(x)} = x^3 - 5$$

$$h_{(f)} = f^3 - 5$$

$$h_{(f_{(x)})} = (\sqrt{x+1})^3 - 5$$

$$h_{(f_{(g)})} = (\sqrt{g+1})^3 - 5$$

$$h_{(f_{(g_{(x)})})} = (\sqrt{Sen\,x + 1})^3 - 5$$

Generalizando las anteriores Reglas de Composición, para tres Funciones.

c) $f_{(x)} = 2x^3 + 7$: Hallar: $(f \circ f^{-1})_{(x)}$

Se determina previamente la Función Inversa (f^{-1}). (De acuerdo a definiciones y Reglas vistas anteriormente), para luego componer:

$$\text{Si: } f_{(x)} = 2x^3 + 7$$

$$y = 2x^3 + 7$$

$$x \to y \ ; \ y \to x$$

$$x = 2y^3 + 7$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{x-7}{2}}$$

$$f^{-1}_{(x)} = \sqrt[3]{\frac{x-7}{2}}$$

$$(f \circ f^{-1})_{(x)} = f_{(f^{-1}_{(x)})}$$

$$\text{Si: } f_{(x)} = 2x^3 + 7$$

$$f_{(f^{-1})} = 2(f^{-1})^3 + 7$$

$$f_{(f^{-1}_{(x)})} = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x-7}{2}}\right)^3 + 7$$

$$= x$$

Como era de esperarse, la sucesiva aplicación primero de una Función Inversa, luego de la misma Función sobre la Variable: x ; dejan a ésta en su misma situación original.

Es decir la Función y su Función Inversa anulan su acción recíprocamente.

Se generaliza la siguiente Regla válida para todos los casos:

$$(f \circ f^{-1})_{(x)} = (f^{-1} \circ f)_{(x)} = x$$

Este es uno de los casos especiales, donde la Composición de Funciones es conmutativa, ya que en el caso general la Composición no es conmutativa

II-11 CLASES DE FUNCIONES

Las Funciones para un mejor estudio, tradicionalmente se clasifican en:

FUNCIONES POLINÓMICAS	FUNCIONES ALGEBRAICAS
FUNCIONES EXPONENCIALES	FUNCIONES LOGARÍTMICAS
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS
FUNCIONES HIPERBÓLICAS	FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS
FUNCIONES ESPECIALES	

Todas estas Funciones se estudiaran separadamente, pese a ciertas relaciones existentes entre ellas.

II-12 FUNCIONES POLINÓMICAS

Son Funciones Polinómicas aquellas que responden a la Forma General:



$$f_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

Donde: a_n ; a_{n-1}.... son constantes reales; n es un Número Natural (Entero y positivo); n determina el Grado de la Función. El Dominio de todas las Funciones Polinómicas es de todos los Reales (D_f: $x \in R$)

Ej 2-16 Son Ejemplos de Funciones Polinómicas o no Polinómicas son las siguientes:

$f_{(x)} = 3x^5 + 2x^3 + 8x + 1$ Es Función Polinómica de Grado: 5

$f_{(x)} = \sqrt{2}\, x^7 - 4x^2 + 1$ Es Función Polinómica de Grado: 7

$f_{(x)} = 3\sqrt{x} - x^2$ No es Función Polinómica (Por $\sqrt{x}$)

$f_{(x)} = 5 + Log\, x + \dfrac{1}{x}$ No es Función Polinómica (Por Log ; $\dfrac{1}{x}$)

Las Funciones Polinómicas de acuerdo a su grado, a su vez se clasifican en Funciones Constantes, Lineales, Cuadráticas, etc.

FUNCIONES CONSTANTES

Las Funciones Constantes son Funciones Polinómicas de grado cero; su forma general es: $f_{(x)} = a_0$

Ej 2-17 Son Funciones Constantes:

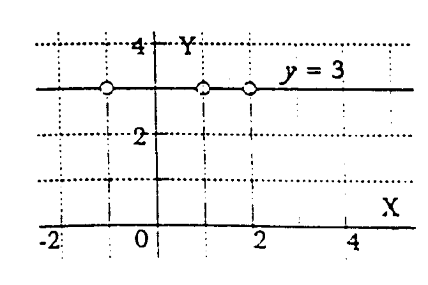
$f_{(x)} = 5$; $f_{(x)} = -\dfrac{1}{2}$; $f_{(x)} = \pi$ Las Funciones Constantes no son ni Inyectivas ni Suryectivas.

2-15 Graficar la Función Constante: $f_{(x)} = 3$

Para graficar se determinan algunos Pares ordenados o puntos. Se observa que la Ordenada 3 es constante

La gráfica es una Recta paralela al Eje de abscisas, como en toda Función Constante.

x	y
-1	3
0	3
1	3
2	3



FUNCIONES LINEALES

Las Funciones Lineales, son Funciones Polinómicas de grado 1; Su forma general es:

$$f_{(x)} = a_0 + a_1 x$$

Ej 2-18 $f_{(x)} = 2x + 5$ $\quad f_{(x)} = 3 - 2x$ $\quad$ Son Funciones Lineales

$f_{(x)} = \dfrac{3x + 1}{4}$ $\quad f_{(x)} = \dfrac{1}{2} x$ $\quad$ El grado de estas Funciones Polinómicas es de: 1

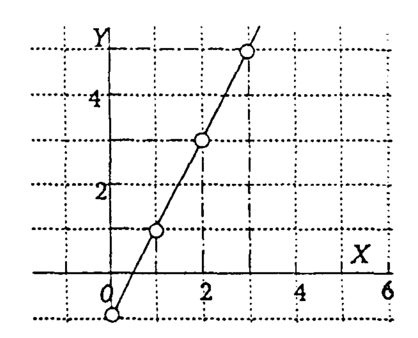
2-16 Analizar y graficar: $f_{(x)} = 2x - 1$

Para graficar se determinan algunos puntos.

Si: $y = f_{(x)} = 2x - 1$

La gráfica es una Recta, como en toda Función Lineal.

x	y
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5



FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las Funciones Cuadráticas, son Funciones Polinómicas de grado 2; Su Forma General es:

$$f_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Ej 2-19 $f_{(x)} = 3x^2 + 5x + 7$ $\quad f_{(x)} = x^2 + 1$ $\quad$ Son Funciones Cuadráticas

$f_{(x)} = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ $\quad f_{(x)} = 9 - x^2$ $\quad$ El grado de estas Funciones Polinómicas es: 2

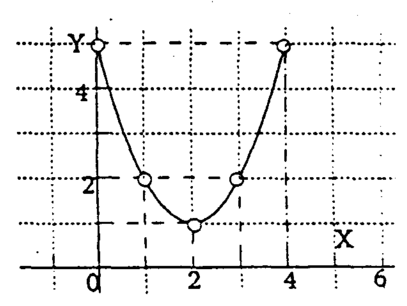
2-17 Analizar, graficar: $y = x^2 - 4x + 5$

Para graficar se calculan algunos puntos

Si: $f_{(x)} = y = x^2 - 4x + 5$

La gráfica es una Parábola, como toda gráfica de Función Cuadrática.

x	y
0	5
1	2
2	1
3	2
4	5



Siempre de acuerdo al grado, en la forma general de Funciones Polinómicas, se obtendrán Funciones de características generales parecidas.

Las restantes Funciones Polinómicas de grado superior, no reciben nombres especiales, pero sus características son equivalentes.

2-18 Analizar, graficar: $f_{(x)} = x^4 - 4x^2$

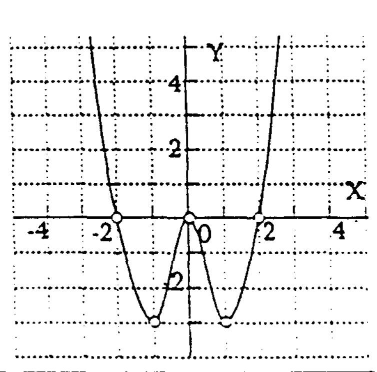
Para la gráfica se determinan algunos puntos:

Si: $y = f_{(x)} = x^4 - 4x^2$

La Función es también Polinómica de grado 4

La gráfica es la curva indicada

x	y
-2	0
-1	-3
0	0
1	-3
2	0
3	45



II-13 FUNCIONES ALGEBRAICAS

Las Funciones Algebraicas, son aquellas que responden a la forma general:



Donde: $P_{n(x)}, P_{n-1(x)}$.. Son Polinomios en: x ; n es un Número Natural.

Ej 2-20 Son Funciones Algebraicas o No Algebraicas las siguientes:

$$f_{(x)} = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \quad ; \quad f_{(x)} = 1 + x + \frac{1}{x^2+1}$$

Son Funciones Algebraicas.

$$f_{(x)} = 3x^2 + 6x^2 - 1 \quad ; \quad f_{(x)} = x + Log\,x$$

La 1[era] es Función Algebraica (Toda Función Polinómica es también Algebraica); la 2[da] No es Función Algebraica (Por el término *Log*)

Todos las Funciones Algebraicas, pueden llevarse a la forma general que las define. En la práctica se considera que toda Expresión Algebraica de una Variable, es también una Función Algebraica.

2-19 Demostrar que es una Función Algebraica: $f_{(x)} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$

$$f_{(x)} = y = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

$$yx - 1 = -\sqrt{x} \Rightarrow (yx-1)^2 = (-\sqrt{x})^2$$

$$y^2x^2 - 2yx + 1 = x$$

$$(x^2)y^2 + (-2x)y + (1-x) = 0$$

Para demostrar que la Función es Algebraica, será suficiente con expresarla en su forma general. Efectuando operaciones, elevando al cuadrado.

$P_{2(x)} = x^2$; $P_{1(x)} = -2x$; $P_{0(x)} = 1 - x$

Quedan determinados los Polinomios, esto demuestra que la Función es Algebraica.

GRÁFICAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Por la dificultad que poseen las gráficas de Funciones Algebraicas, se deben analizar los conceptos de: DOMINIO, INTERSECCIONES, SIMETRÍAS, ASINTOTAS.

Para el respectivo análisis, se tomará la siguiente notación: Si: $y = f_{(x)} \Rightarrow F_{(x,y)} = y - f_{(x)} = 0$

Ej 2-21 Si: $y = 3 + x^2 \Rightarrow F_{(x,y)} = y - 3 - x^2 = 0$

En esta notación, toda la Expresión se lleva a un miembro de la Igualdad.

DOMINIO

Para hallar el Dominio de las Funciones Algebraicas, se deben evitar las Expresiones siguientes:

$\dfrac{a}{0}$ División entre cero (Indefinido) $\quad$ $\sqrt[2n]{-a}$ Raíz par de negativo (Imaginario)

Ej 2-22 Se determinan los Dominios de dos Funciones Algebraicas.

$$f_{(x)} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} \qquad D_f: x \in \mathbb{R} \ ; \ x \neq 1, x \neq 3$$

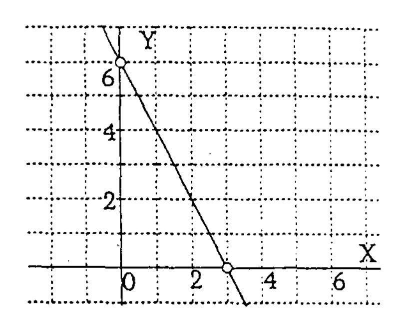
$$f_{(x)} = +\sqrt{x-3} \qquad \text{Si: } x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \ ; \ D_f: x \in \mathbb{R}, x \geq 3$$

INTERSECCIONES

Las Intersecciones con los Ejes Coordenados, de la curva de una Función, se determinan del siguiente modo

Con el Eje de abscisas (X): $y = 0$, $F_{(x,0)} = 0$ Con el Eje de ordenadas (Y): $x = 0$, $F_{(0,y)} = 0$

Ej 2-23 Considerando la Función: $y = 6 - 2x$



$$y = 6 - 2x \Rightarrow F_{(x,y)} = y - 6 + 2x$$

$$F_{(x,0)} = 0 - 6 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \qquad P1(3,0)$$

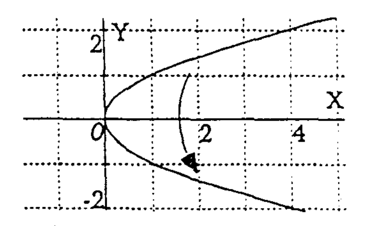
$$F_{(0,y)} = y - 6 + 2\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 6 \qquad P2(0,6)$$

Las Intersecciones de la curva con los Ejes Coordenados, son aquellos puntos donde la curva corta a los Ejes.

SIMETRÍAS

La gráfica de: F es Simétrica, respecto al Eje de abscisas si se verifica la siguiente igualdad: $F_{(x,y)} = F_{(x,-y)}$

Ej 2-24 Si: $F_{(x,y)} = x - y^2 = 0$



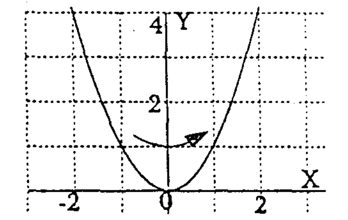
La curva de F es Simétrica al Eje X, ya que se cumple la igualdad que define tal simetría:

$$F_{(x,y)} = F_{(x,-y)}$$
$$x - y^2 = x - (-y)^2$$

Se entiende que una curva es simétrica al Eje X, si al girar sobre tal Eje, la curva no se modifica.

La gráfica de F es Simétrica respecto al Eje de ordenadas, si se verifica la siguiente igualdad: $F_{(x,y)} = F_{(-x,y)}$

Ej 2-25 Si: $F_{(x,y)} = x^2 - y$



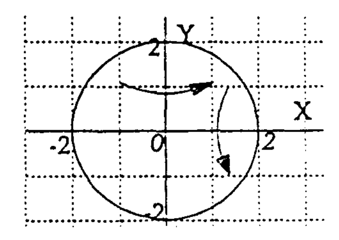
La curva es Simétrica al Eje Y, ya que se cumple la igualdad que define este tipo de simetría:

$$F_{(x,y)} = F_{(-x,y)}$$
$$x^2 - y = (-x)^2 - y$$

Se entiende que una curva es simétrica al Eje Y, si al girar sobre tal Eje, la curva no se modifica.

La gráfica de: F es Simétrica respecto al Origen si se verifica la siguiente igualdad: $F_{(x,y)} = F_{(-x,-y)}$

Ej 2-26 Si: $F_{(x,y)} = x^2 + y^2 - 4$



Es Simétrica al Eje X, Y ya que se cumple la Igualdad.

$$F_{(x,y)} = F_{(-x,-y)}$$
$$x^2 + y^2 - 4 = (-x)^2 + (-y)^2 - 4$$

Se entiende que una curva es simétrica al Origen si al girar sobre los Ejes X, Y; la curva no se modifica.

ASINTOTAS

Las Asíntotas son Rectas que limitan a las curvas, éstas se acercan pero sin intersectarlas, para su determinación se analizarán los numeradores y denominadores de la Función, tanto en términos de: x como de y

Las Asíntotas Verticales se obtienen despejando y en F, para luego igualar su denominador a cero:

$$F_{(x,y)} = 0 \Rightarrow y = \frac{N_{(x)}}{D_{(x)}} \qquad \text{Si: } D_{(x_1)} = 0 \quad \text{Entonces: } x_1 \text{ es Asíntota Vertical.}$$

Las Asíntotas Horizontales se obtienen despejando x en F, para luego igualar su denominador a cero:

$$F_{(x,y)} = 0 \Rightarrow x = \frac{N_{(y)}}{D_{(y)}} \qquad \text{Si: } D_{(y_1)} = 0 \quad \text{Entonces: } y_1 \text{ es Asíntota Horizontal.}$$

Ej 2-27 Determinando las Asíntotas de:

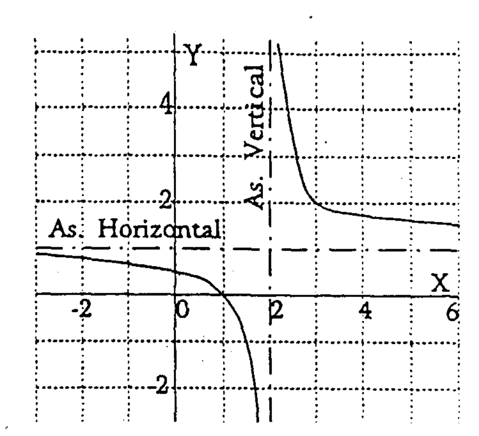
$$F_{(x,y)} = y - \frac{x-1}{x-2} = 0$$

$$y = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow \begin{matrix} x - 2 = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$$

$$x = \frac{2y-1}{y-1} \Rightarrow \begin{matrix} y - 1 = 0 \\ y = 1 \end{matrix}$$

Para obtener Asíntotas verticales, se despeja y de la Función F, para luego igualar su denominador a cero.

Así se obtiene $x = 2$, cuya gráfica es una Recta vertical. Procediendo similarmente para la Asíntota horizontal (Despejando x), se obtiene $y = 1$, cuya gráfica es una Recta horizontal.



2-20 Analizando sus características, graficar: $y = \frac{1}{x-3}$

Para el análisis, se tomará cuando convenga: $F_{(x,y)}$ Así: $y = \frac{1}{x-3} \Rightarrow F_{(x,y)} = y - \frac{1}{x-3} = 0$

DOMINIO Si: $y = \frac{1}{x-3}$; Evitando la división entre cero: D_f: $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 3$

INTERSECCIONES

Intersección al Eje X ($y = 0$)

Si: $F_{(x,y)} = y - \frac{1}{x-3} = 0$

$F_{(x,0)} = 0 - \frac{1}{x-3} = 0$

$1 = 0$??

No existe intersección con el Eje X, se presenta un absurdo.

Intersección al Eje Y ($x = 0$)

Si: $F_{(x,y)} = y - \frac{1}{x-3} = 0$

$F_{(0,y)} = y - \frac{1}{0-3} = 0$

$y = -1/3$

Existe intersección con el Eje Y

SIMETRÍAS

Simetria con Eje X

$F_{(x,y)} = F_{(x,-y)}$

$y - \frac{1}{x-3} \neq (-y) - \frac{1}{x-3}$

No existe Simetría

Simetría con Eje Y

$F_{(x,y)} = F_{(-x,y)}$

$y - \frac{1}{x-3} \neq y - \frac{1}{(-x)-3}$

No existe Simetría

Simetría al Origen

$F_{(x,y)} = F_{(-x,-y)}$

$y - \frac{1}{x-3} \neq (-y) - \frac{1}{(-x)-3}$

No existe Simetría

ASÍNTOTAS Asíntotas Verticales

$F_{(x,y)} = y - \frac{1}{x-3} = 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x-3}$

As. Vertical en: $x = 3$

Asíntotas Horizontales

$F_{(x,y)} = y - \frac{1}{x-3} = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3y+1}{y}$

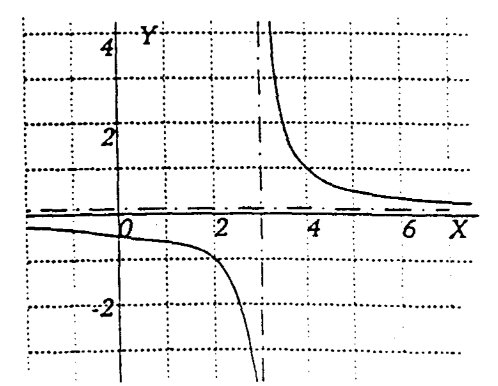
As. Horizontal en: $y = 0$

Finalmente, se conforma una tabla de Pares ordenados o puntos.

No hay valor para $x = 3$; se calcula para valores inmediatamente antes y después de: 3 en 2 9 ; 3.1

$y = \frac{1}{x-3}$ El Dominio excluye: $x = 3$; por tanto hay gráfica $\forall x \neq 3$

x	y
-2	-0.20
-1	-0.25
0	-0.33
1	-0.50
2	-1
3	??
2.9	-10
3.1	10
4	1
5	0.50



Las Intersecciones solo se dan con el Eje Y. (No hay intersección con el Eje X)

2-21 Analizando sus características, graficar: $y = \frac{x-1}{x-2}$

Para el análisis, se tomará cuando convenga: $F_{(x,y)}$

$$y = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow F_{(x,y)} = y - \frac{x-1}{x-2} = 0$$

DOMINIO

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$

Evitando la división entre cero: $D_f: x \in R\ .\ x \neq 2$

INTERSECCIONES

Intersección al Eje X ($y = 0$)

$$F_{(x,y)} = y - \frac{x-1}{x-2} = 0$$

$$F_{(x,0)} = 0 - \frac{x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Intersección al Eje Y ($x = 0$)

$$F_{(x,y)} = y - \frac{x-1}{x-2} = 0$$

$$F_{(0,y)} = y - \frac{0-1}{0-2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

SIMETRÍAS

Simetria con Eje X

$$F_{(x,y)} = F_{(x,-y)}$$

$$y - \frac{x-1}{x-2} \neq (-y) - \frac{x-1}{x-2}$$

No existe Simetría

Simetría con Eje Y

$$F_{(x,y)} = F_{(-x,y)}$$

$$y - \frac{x-1}{x-2} \neq y - \frac{x-1}{(-x)-2}$$

No existe Simetría

Simetría al Origen

$$F_{(x,y)} = F_{(-x,-y)}$$

$$y - \frac{x-1}{x-2} \neq (-y) - \frac{x-1}{(-x)-2}$$

No existe Simetría

ASÍNTOTAS

Asíntotas Verticales

Si: $F_{(x,y)} = y - \frac{x-1}{x-2} = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow x = 2$$

Asíntotas Horizontales

Si: $F_{(x,y)} = y - \frac{x-1}{x-2} = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-1} \Rightarrow y = 1$$

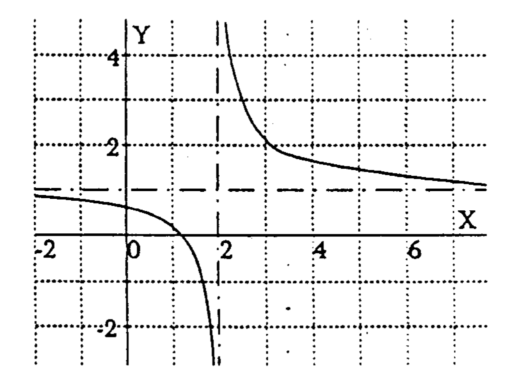
La gráfica misma se determina por la tabla a partir de:

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$

No se tiene el valor de la Función en: $x = 2$; se toman valores inmediatos, antes y después.

Se usan las característica antes determinadas.

x	y
-2	0.75
-1	0.67
0	0.50
1	0
2	??
1.9	-9
2.1	11
3	2
4	1.5
5	1.33



2-22 Usando una tabla de puntos, graficar y deducir características de la Función dada por: $y = \frac{1}{x^2+1}$

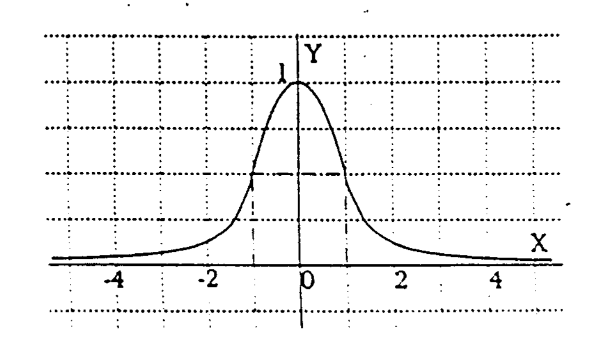
x	y
-5	0.04
-3	0.1
-2	0.2
-1	0.5
-0.5	0.8
0	1
0.5	0.8
1	0.5
2	0.2
3	0.1
5	0.04
10	0.009

Dominio: $x \in$ R (Sin restricción)

Intersecciones:
Eje X: ∄
Eje Y: En $y = 1$

Simetrías
Eje X: ∄ Simetría
Eje Y: Si ∃ Simetría
Origen: ∄ Simetría

Asíntotas
Asínt. Vert. No existen
Asínt. Horz. En $y = 0$



2-23 Analizando características, graficar: $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

Para el respectivo análisis, se tomará la expresión: $F_{(x,y)} = y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = 0$

DOMINIO $\quad$ Si: $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = \dfrac{x^2 - 4}{(x+3)(x-3)}$; D_f: $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$; $x \neq -3$

INTERSECCIONES

Con el Eje X ($y = 0$)

$F_{(x,y)} = y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = 0$

$F_{(x,0)} = 0 - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ x = -2 \end{matrix}$

Con el Eje Y ($x = 0$)

$F_{(x,y)} = y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = 0$

$F_{(0,y)} = y - \dfrac{0^2 - 4}{0^2 - 9} = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4}{9}$

SIMETRÍAS

Con el Eje X

$F_{(x,y)} = F_{(x,-y)}$

$y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \neq -y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

No existe Simetría

Con el Eje Y

$F_{(x,y)} = F_{(-x,y)}$

$y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = y - \dfrac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 - 9}$

Si existe Simetría

Con el Origen

$F_{(x,y)} = F_{(-x,-y)}$

$y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \neq -y - \dfrac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 - 9}$

No existe Simetría

ASÍNTOTAS $\quad$ Asíntotas Verticales

$F_{(x,y)} = y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ x = -3 \end{matrix}$

Asíntotas Horizontales

$F_{(x,y)} = y - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = 0$

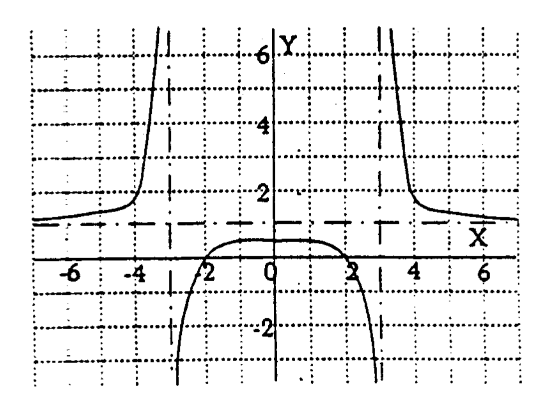
$\Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{9y - 4}{y - 1}} \Rightarrow y = 1$

La gráfica se obtendrá por la tabla. La gráfica es Simétrica sobre el Eje Y.

Entonces bastará con graficar sobre el Eje X positivo, para X negativo, la gráfica se refleja.

La gráfica sobre los Cuadrantes I, IV es como un espejo de los Cuadrantes II, III.

x	y
0	0.44
1	0.37
2	0
3	??
2.9	-7.47
3.1	9.20
4	1.71
5	1.31
6	1.18



2-24 Graficar la Función Algebraica: $2x^3 - yx^2 + y^2 - 2xy - x^2 + y = 0$

Ordenando y factorizando la expresión.

$2x^3 - yx^2 + y^2 - 2xy - x^2 + y = 0$

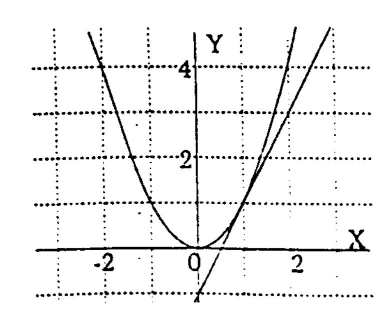
$2x^3 - yx^2 - x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$

$x^2(2x - y - 1) - y(-y + 2x - 1) = 0$

$(x^2 - y)(2x - y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = x^2 \quad ; \quad y = 2x - 1$

La gráfica final está conformada por una Parábola y una Recta.



2-25 Analizando sus características, graficar: $y^2 = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Para realizar el análisis, se tomará la siguiente notación: $F_{(x,y)} = y^2 - \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 0$

<u>DOMINIO</u>

Si: $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}}$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} > 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} > 0$$

-3 -2 -1 0 1 2 3 4

Si: $x = 0$

$$\frac{0^2 - 1}{0^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \geq 0 \quad (V)$$

V (-2) F (-1) V (1) F (2) V

-3 -2 -1 0 1 2 3 4

Para hallar el Dominio, se debe evitar la Raíz Cuadrada de negativos. Para ello debe cumplirse la Desigualdad.

Resolviendo por la Regla de los Signos.

Factorizando y ubicando Raíces tanto del numerador como denominador.

Reemplazando un valor cualquiera. Se obtiene una Proposición Verdadera. Luego por alternabilidad:

D_f: $-\infty < x < -2 \;,\; -1 \leq x \leq 1 \;,\; 2 < x < \infty$

<u>INTERSECCIONES</u>

Intersección al Eje X ($y = 0$)

$$F_{(x,0)} = 0^2 - \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$$

Intersección al Eje Y ($x = 0$)

$$F_{(0,y)} = y - \frac{0^2 - 1}{0^2 - 4} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} y = 1/2 \\ y = -1/2 \end{matrix}$$

<u>SIMETRÍAS</u>

Con el Eje X $\quad F_{(x,y)} = F_{(x,-y)}$

$$y^2 - \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \neq (-y)^2 - \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Si existe Simetría

Con el Eje Y $\quad F_{(x,y)} = F_{(-x,y)}$

$$y^2 - \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = y^2 - \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 4}$$

Si existe Simetría

Con el Origen $\quad F_{(x,y)} = F_{(-x,-y)}$

$$y^2 - \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = (-y)^2 - \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 4}$$

Si existe Simetría

<u>ASÍNTOTAS</u> Asíntotas Verticales

Si: $F_{(x,y)} = y^2 - \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 0$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ x = -2 \end{matrix}$$

Asíntotas Horizontales

Si: $f_{(x,y)} = y^2 - \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 0$

$$x = \sqrt{\frac{4y^2 - 1}{y^2 - 1}} \Rightarrow \begin{matrix} y = 1 \\ y = -1 \end{matrix}$$

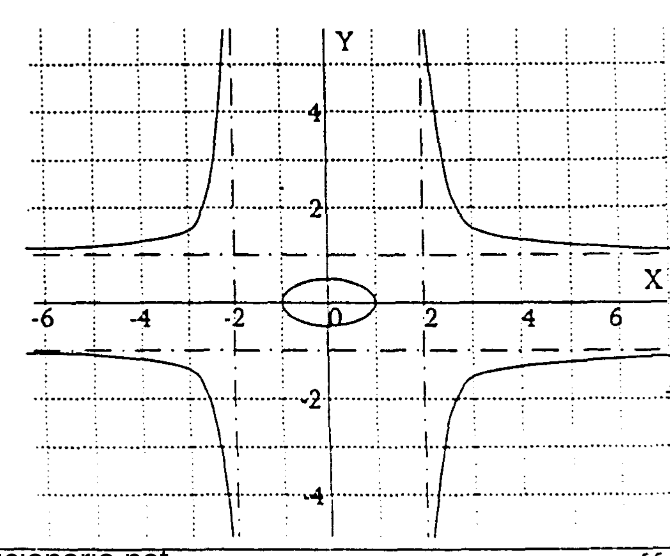
Complementando el análisis.

Se arma una tabla de puntos. (Note que se calcula antes y después de: 2, que determina división entre 0)

x	y
0	±0.50
1	0
2	??
1.9	??
2.1	±2.8
3	±1.26
4	±1.12
5	±1.07

Para los valores negativos de x, se reitera la misma gráfica.

Donde no está definido el Dominio, no hay gráfica. Ésta es plenamente simétrica en los 4 Cuadrantes.



II-14 FUNCIONES EXPONENCIALES

Las Funciones Exponenciales son aquellas que responden a la Forma General:



Donde: a (La base) es una constante positiva, la variable actúa como exponente. El Dominio de las Funciones Exponenciales es de todos los Reales D_f: $\mathbb{R}$; El Codominio de las Funciones Exponenciales es de los Reales positivos C_f: $\mathbb{R}^+$. Las Funciones Exponenciales son Inyectivas, pero no Suryectivas, por tanto no son Biyectivas.

Ej 2-28

$f_{(x)} = 3^x \qquad f_{(x)} = 10^x + 4^x + (\frac{1}{2})^x$ Son Funciones Exponenciales.

$f_{(x)} = 5^x + x^5 \qquad f_{(x)} = e^{x+1} + 1$ Son Funciones Exponenciales más Funciones Algebraicas.

Las siguientes son Propiedades de las Funciones Exponenciales, deducibles de las Leyes de Exponentes: (Considerando: $a > 0$)

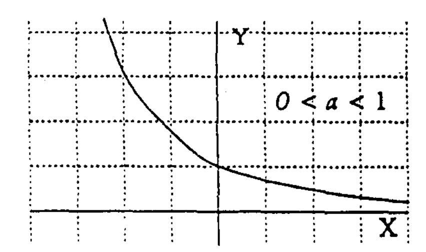
$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \Rightarrow \quad f_{(x)} f_{(y)} = f_{(x+y)} \qquad a^0 = 1$$

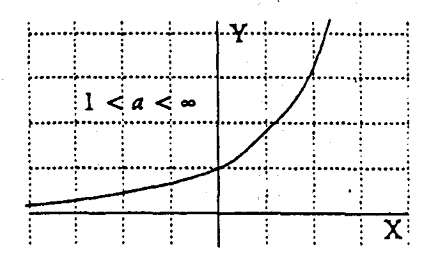
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_{(x)}}{f_{(y)}} = f_{(x-y)} \qquad 0^x = 0$$

$$1^x = 1$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \Rightarrow \quad [f_{(x)}]^y = f_{(xy)} \qquad a^1 = a$$

Las gráficas de las Funciones Exponenciales, se hallan por simples tablas de puntos, no requieren de un análisis especial (Tal como las Funciones Algebraicas). Las formas de gráfica de las Funciones Exponenciales son:





2-26 Analizar y graficar las siguientes Funciones Exponenciales:

a) $f_{(x)} = 2^x$

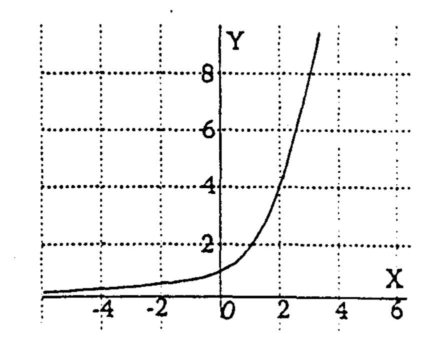
Se determina una tabla de puntos a partir de:

$f_{(x)} = y = 2^x \; ; \; a = 2 > 1$

Note que puede reemplazar cualquier valor de: x (Significa que D_f: $\mathbb{R}$)

Los valores de y obtenidos, son todos positivos (Significa que C_f: $\mathbb{R}^+$)

x	y
-2	0.25
-1	0.50
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16



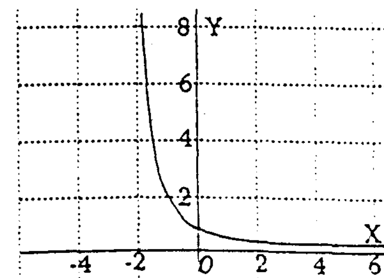
b) $f_{(x)} = (\frac{1}{3})^x$

Se determina una tabla a partir de:

$f_{(x)} = y = (\frac{1}{3})^x \; ; \; a = \frac{1}{3} < 1$

Las características de esta Función son equivalentes a la anterior.

x	y
-2	9
-1	3
0	1
1	0.33
2	0.11
3	0.04



Un caso particular de las Funciones Exponenciales, de gran aplicación, se verifica cuando la base es: "e"; Donde "e" es una constante, llamada Número Natural, cuyo valor puede determinarse por:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2.718281\dots$$

Esta Función normalmente usa las siguientes notaciones: $f_{(x)} = e^x = \exp(x)$

Las características de la Función son equivalentes a otras Funciones Exponenciales.

2-27 Analizar y graficar las siguientes Funciones Exponenciales de Base: e

a) $f_{(x)} = e^x$

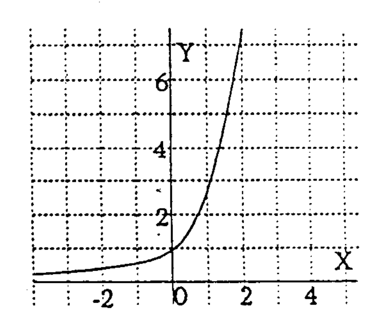
La gráfica puede determinarse, por una simple tabla de puntos, obtenido por calculadora

Si: $f_{(x)} = y = e^x$

$D_f: \mathbb{R}$; $C_f: \mathbb{R}^+$

La Función es Inyectiva, pero no Suryectiva.

x	y
-2	0.13
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39
3	20.08



b) $f_{(x)} = e^{+\sqrt{x-1}}$

La gráfica puede determinarse, por una simple tabla de puntos.

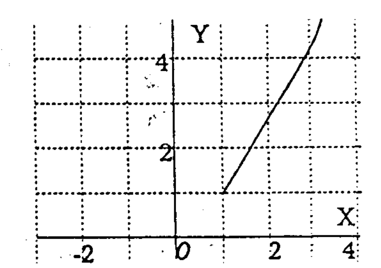
Si: $f_{(x)} = y = e^{+\sqrt{x-1}}$

$D_f: x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$C_f: y \in \mathbb{R}, y \geq 1$

El Dominio se determina por la raíz del exponente.

x	y
-1	??
0	??
1	1
2	2.72
3	4.11
4	5.65
5	7.40



c) $f_{(x)} = e^{-x^2/2}$

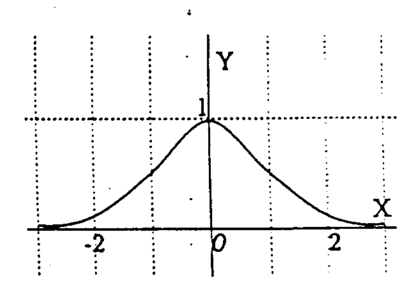
En la Teoría Estadística, ésta es una Función muy importante, la gráfica se llama curva de Gauss.

La gráfica puede determinarse, por una simple tabla de puntos.

$D_f: x \in \mathbb{R}$: $C_f: 0 < y \leq 1$

Un análisis mayor en: P-6-74

x	y
-3	0.01
-2	0.13
-1	0.61
0	1
1	0.61
2	0.13
3	0.01



d) $f_{(x)} = x^x$

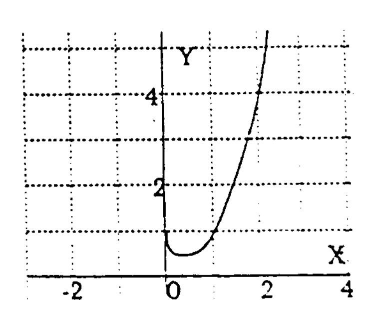
Esta no es una Función Exponencial, ya que la base no es una constante, se la incluye por su posterior importancia.

La gráfica puede determinarse, por una simple tabla de puntos.

Si: $f_{(x)} = y = x^x$

$D_f: x \in \mathbb{R}$, $x > 0$

x	y
0.01	0.95
0.10	0.79
0.37	0.69
0.90	0.91
1	1
2	4
3	27



II-15 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Las Funciones Logarítmicas son aquellas que responden a la forma general:



$$f_{(x)} = Log_a x \;;\; a > 0 \;;\; a \neq$$

Donde: Log_a es el Logaritmo en base a; La base debe cumplir con $a > 0 ; a \neq 1$; La Función $Log_a x$, se define como la Inversa de la Función Exponencial: a^x

El Dominio de las Funciones Logarítmicas es de los Reales positivos $D_f : x \in \mathbb{R}$; El Codominio es de Todos los Reales $C_f : y \in \mathbb{R}$. Las Funciones Logarítmicas son: Inyectivas, Suryectivas, por tanto son Biyectivas.

Los dos Tipos de Logaritmos mas usuales son:

LOGARITMOS DECIMALES (O Vulgares) Base: $a = 10$; se escribe: $Log\, x$

LOGARITMOS NEPERIANOS (O Naturales) Base: $a = e$; se escribe: $Ln\, x$

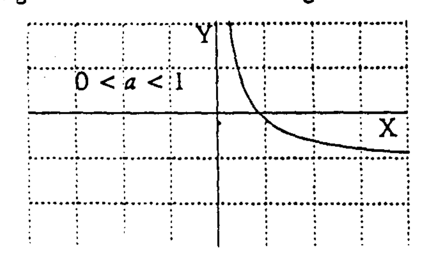
Las principales Propiedades de las Funciones Logarítmicas son:

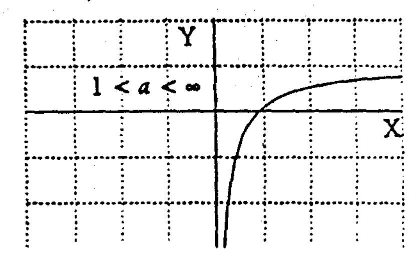
$$Log_a(xy) = Log_a x + Log_a y \quad \Rightarrow \quad f_{(xy)} = f_{(x)} + f_{(y)} \qquad Log_a 1 = 0$$

$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right) = Log_a x - Log_a y \quad \Rightarrow \quad f_{(\frac{x}{y})} = f_{(x)} - f_{(y)} \qquad Log_a 0 = -\infty$$

$$Log_a(x^y) = y\, Log_a x \quad \Rightarrow \quad f_{(x^y)} = y\, f_{(x)} \qquad Log_a a = 1$$

Las gráficas de las Funciones Logarítmicas se obtienen por simples tablas de puntos, sus dos Formas básicas son:



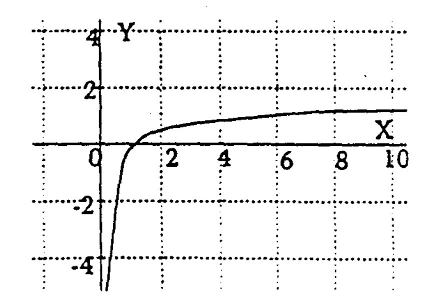


2-28 Analizar y graficar las siguientes Funciones Logarítmicas:

a) $f_{(x)} = Log\ x$

La gráfica se determinará encontrando algunos puntos (Usando calculadoras)
$f_{(x)} = y = Log_{10}\, x$
Existe *Log* solo de valores positivos de: x ($D_f : \mathbb{R}^+$) . Los valores obtenidos en: y son de todos los Reales.

x	y
0	-∞
0.1	-1
1	0
2	0.30
3	0.47
10	1
20	1.30



b) $f_{(x)} = Ln\ x$

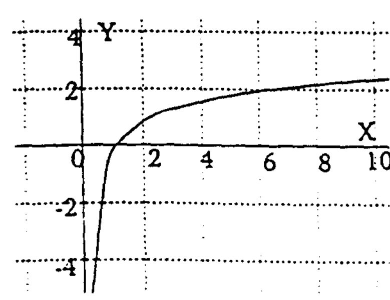
La gráfica se determinará mediante algunos puntos.

$f_{(x)} = y = Ln\ x = Log_e\ x$

$D_f: \mathbb{R}^+ \ ; \ C_f: \mathbb{R}$

Note que las gráficas son semejantes.

x	y
0	-∞
0.1	-2.3
1	0
2	0.60
e	1
3	1.10
10	2.30



El Logaritmo de un número: x es un Exponente: y , al que se debe elevar determinada base, para obtener el Número indicado: x

Ej 2-29 La definición de Logaritmo, puede ejemplificarse del siguiente modo:

Base: 10 $\quad Log\ 100 = y \Rightarrow 100 = 10^y \Rightarrow y = 2 = Log\ 100$

$Log\ 2 = y \Rightarrow 2 = 10^y \Rightarrow y = 0.301 = Log\ 2$

Base: 2 $\quad Log_2 8 = y \Rightarrow 8 = 2^y \Rightarrow y = 3 = Log_2 8$

$Log_2 512 = y \Rightarrow 512 = 2^y \Rightarrow y = 9 = Log_2 512$

La definición permite el cálculo de algunos Logaritmos, en cualquier Base, sin embargo es mucho mas conveniente el uso de la siguiente Fórmula de conversión de Base de Logaritmos:

$$Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b}$$

a: Base conocida de Logaritmos: (10 o e)

b: Nueva Base de Logaritmos

Ej 2-30 Usando 10 como Base conocida de Logaritmos se tendrá:

$$Log_3 81 = \frac{Log_{10} 81}{Log_{10} 3} = \frac{1.908}{0.477} = 4 \qquad Log_2 512 = \frac{Log_{10} 512}{Log_{10} 2} = \frac{2.709}{0.301} = 9$$

$$Log_5 3 = \frac{Log_{10} 3}{Log_{10} 5} = \frac{0.477}{0.699} = 0.688 \qquad Log_7 12 = \frac{Log_{10} 12}{Log_{10} 7} = \frac{1.079}{0.845} = 1.277$$

2-29 Desarrollar las siguientes expresiones, aplicando Propiedades de Logaritmos:

a) $Log(x^5y^3) = Log(x^5) + Log(y^3) = 5\,Log\,x + 3\,Log\,y$

b) $Log(\frac{x^4y}{z^7}) = Log(x^4y) - Log(z^7) = Log(x^4) + Log(y) - Log(z^7)$

$= 4\,Log\,x + Log\,y - 7\,Log\,z$

Desarrollando previamente por la Regla de Log de un producto, luego por el Log de una potencia.

c) $Log\frac{x^3}{y^2+z^5} = Log(x^3) - Log(y^2+z^5) = 3\,Log\,x - Log(y^2+z^5)$

Note la imposibilidad de desarrollar el último Logaritmo de una suma.

d) $Log^3(x^5) = [Log(x^5)]^3 = (5\,Log\,x)^3 = 5^3(Log\,x)^3 = 125\,Log^3 x$

2-30 Resolver las siguientes Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas:

a)
$$2^{x-4} = 8$$
$$Log(2^{x-4}) = Log(8)$$
$$(x-4)\,Log\,2 = Log\,8$$
$$x = \frac{Log\,8}{Log\,2} + 4$$
$$x = \frac{0.903}{0.301} + 4 = 7$$

b)
$$e^{1-x^2} = 2$$
$$Ln(e^{1-x^2}) = Ln\,2$$
$$(1-x^2)\,Ln\,e = Ln\,2$$
$$(1-x^2)\,1 = 0.69$$
$$x = \pm\sqrt{1-0.69}$$
$$x = \pm 0.55$$

Para resolver las Ecuaciones exponenciales, se aplican Logaritmos y sus Propiedades.

c)
$$Log(9x-8) = 2$$
$$9x - 8 = Antilog\,2$$
$$9x - 8 = 10^2$$
$$x = \frac{10^2+8}{9} = 12$$

d)
$$Log(x^3+7) = 3$$
$$x^3 + 7 = Antilog\,3$$
$$x^3 + 7 = 10^3$$
$$x = \sqrt[3]{10^3 - 7} = 9.98$$

En las últimas Ecuaciones se usa:

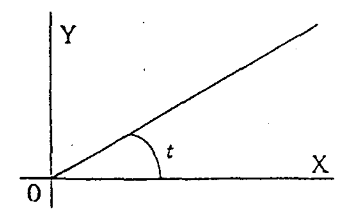
$Antilog\,u = 10^u$

$Antiln\,u = e^u$

II-16 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

ÁNGULOS Se considera que un ángulo es la unión de dos Semirrectas, con un punto común inicial.

Es conveniente tomar el Semieje positivo de las abscisas, como una de las Semirrectas, así el ángulo quedará determinado por la otra Semirrecta.



Para medir ángulos existen tres Sistemas básicos:

SEXAGESIMAL (DEG) En este Sistema, una Circunferencia posee 360° (360 Grados Sexagesimales)

Un Grado sexagesimal (°) posee 60 Minutos ('), un Minuto posee 60 Segundos (")

CENTESIMAL (GRAD) En este Sistema una Circunferencia posee 400^g (400 Grados Centesimales)

Un Grado (^{g}) posee 100 Minutos (^{m}), Un Minuto posee 100 Segundos (^{s})

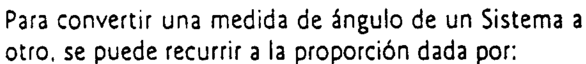
RADIÁNICO (RAD) En este Sistema una Circunferencia posee 2π Radianes.

90° 100^g $\pi/2$ Rad

180° 200^g π Rad

0° 0^g 0 Rad

270° 300^g $3\pi/2$ Rad



Para convertir una medida de ángulo de un Sistema a otro, se puede recurrir a la proporción dada por:

$$360° = 400^g = 2\pi \text{ Rad}$$

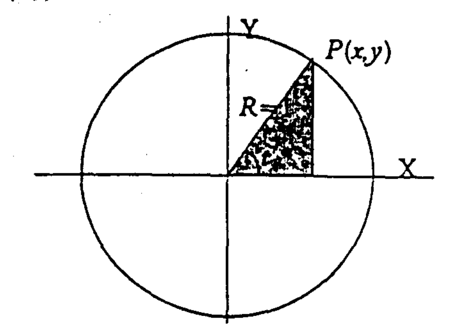


En Cálculo es preferible trabajar con Radianes y, salvo aclaración, cualquier medida de ángulos supondrá que está en Radianes.

Tomando una Circunferencia con Centro en el Origen de Coordenadas de Radio: $R = 1$; donde t es un ángulo en Radianes, cuyo lado terminal intersecta a la Circunferencia en: $P(x,y)$; entonces:

Si: $x = Cos\ t$
$y = Sen\ t$ $\Rightarrow$

$$Tan\ t = \frac{Sen\ t}{Cos\ t}$$
$$Cot\ t = \frac{Cos\ t}{Sen\ t}$$
$$Sec\ t = \frac{1}{Cos\ t}$$
$$Csc\ t = \frac{1}{Sen\ t}$$



De acuerdo a estas definiciones, se hace fácil verificar las Relaciones:

$$Sen^2 t + Cos^2 t = 1$$
$$Sec^2 t = 1 + Tan^2 t$$
$$Csc^2 t = 1 + Cot^2 t$$

$$Sen(a \pm b) = Sen\,a\ Cos\,b \pm Sen\,b\ Cos\,a$$
$$Cos(a \pm b) = Cos\,a\ Cos\,b \mp Sen\,a\ Cos\,b$$
$$Tan(a \pm b) = \frac{Tan\ a \pm Tan\,b}{1 \mp Tan\,a\ Tan\,b}$$

$$Sen\ 2t = 2\ Sen\,t\ Cos\,t$$
$$Cos\ 2t = Cos^2 t - Sen^2 t$$
$$Tan\ 2t = \frac{2\ Tan\,t}{1 - Tan^2 t}$$

$$Sen(-t) = -Sen\,t$$
$$Cos(-t) = Cos\,t$$
$$Tan(-t) = -Tan\,t$$

$$Sen^2 t = \frac{1 - Cos\ 2t}{2}$$
$$Cos^2 t = \frac{1 + Cos\ 2t}{2}$$

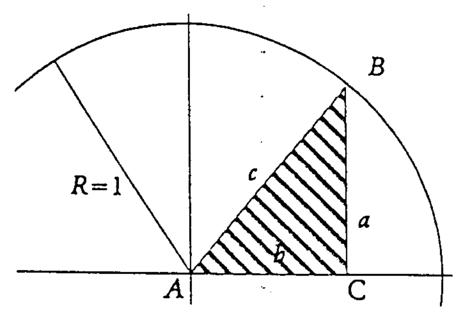
Estas Relaciones Trigonométricas, son demostrables por las anteriores definiciones.

Permiten simplificar procedimientos de cálculo con las Funciones Trigonométricas.

2-31 Demostrar: $Sen^2 t + Cos^2 t = 1$; $Sec^2 t = 1 + Tan^2 t$; $Csc^2 t = 1 + Cot^2 t$

Trabajando con el triángulo rectángulo entre ABC inscrito al Círculo Trigonométrico (Radio 1)

$a^2 + b^2 = 1$	Aplicando Pitágoras
$(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1$	Dividiendo entre c^2 simplificando, por definición.
$Sen^2 t + Cos^2 t = 1$	1^{era} Identidad
$\frac{Sen^2 t}{Cos^2 t} + 1 = \frac{1}{Cos^2 t}$	Dividiendo entre: $Cos^2 t$ y simplificando
$Tan^2 t + 1 = Sec^2 t$	2^{da} Identidad.
$1 + \frac{Cos^2 t}{Sen^2 t} = \frac{1}{Sen^2 t}$	Dividiendo la 1^{era} Identidad entre $Sen^2 t$
$1 + Cot^2 = Csc^2 t$	3^{era} Identidad.



$Sen\, t = \frac{a}{c}$; $Cos\, t = \frac{b}{c}$; $Tan\, t = \frac{a}{b}$

$Csc\, t = \frac{c}{a}$; $Sec\, t = \frac{c}{b}$; $Cot\, t = \frac{b}{a}$

2-32 Demostrar: $Sen(\alpha + \beta) = Sen\,\alpha\, Cos\,\beta + Sen\,\beta\, Cos\,\alpha$; $Cos(\alpha + \beta) = Cos\,\alpha\, Cos\,\beta + Sen\,\alpha\, Sen\,\beta$

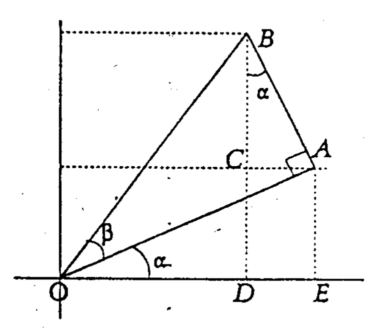
Por la construcción geométrica adjunta, se tiene:

$$Sen(\alpha + \beta) = \frac{DB}{OB} = \frac{DC + CB}{OB} = \frac{EA + CB}{OB} = \frac{EA}{OA}\frac{OA}{OB} + \frac{BA}{OB}\frac{CB}{BA}$$

$$= Sen\,\alpha\, Cos\,\beta + Sen\,\beta\, Cos\,\alpha$$

$$Cos(\alpha + \beta) = \frac{OD}{OB} = \frac{OE - DE}{OB} = \frac{OE - CA}{OB} = \frac{OE}{OA}\frac{OA}{OB} - \frac{CA}{BA}\frac{BA}{OB}$$

$$= Cos\,\alpha\, Cos\,\beta - Sen\,\alpha\, Sen\,\beta$$



Similarmente pueden demostrarse las relaciones:

$Sen(\alpha - \beta) = Sen\,\alpha\, Cos\,\beta - Sen\,\beta\, Cos\,\alpha$; $Cos(\alpha - \beta) = Cos\,\alpha\, Cos\,\beta + Sen\,\alpha\, Sen\,\beta$

2-33 Demostrar las siguientes Relaciones Trigonométricas:

a) $Sen\, 2t = 2\, Sen\, t\, Cos\, t$

$Sen(\alpha + \beta) = Sen\,\alpha\, Cos\,\beta + Sen\,\beta\, Cos\,\alpha$

$Sen(t + t) = Sen\, t\, Cos\, t + Sen\, t\, Cos\, t$

$\Rightarrow Sen\, 2t = 2\, Sen\, t\, Cos\, t$

b) $Cos\, 2t = Cos^2 t - Sen^2 t$

$Cos(\alpha + \beta) = Cos\,\alpha\, Cos\,\beta + Sen\,\alpha\, Sen\,\beta$

$Cos(t + t) = Cos\, t\, Cos\, t - Sen\, t\, Sen\, t$

$\Rightarrow Cos\, 2t = Cos^2 t - Sen^2 t$

Seno y Coseno de un ángulo doble

Se demuestra por las fórmulas de *Sen*, *Cos* de una suma antes demostrados, tomando: $\alpha = \beta = t$

c) $Sen(-t) = -Sen\, t$ — Seno de un ángulo negativo

$Sen(\alpha - \beta) = Sen\,\alpha\, Cos\,\beta - Sen\beta\, Cos\,\alpha$ — Fórmula del Seno de una resta

$Sen(0 - \beta) = Sen\, 0\, Cos\, t - Sen\, t\, Cos\, 0$

$\Rightarrow Sen(-t) = 0 \cdot Cos\, t - Sen\, t \cdot 1 = -Sen\, t$ — Si: $\alpha = 0$; $\beta = t$

d) $Sen^2 t = \frac{1 - Cos\, 2t}{2}$

Por la Fórmula del Coseno de un ángulo doble, desarrollando.

$Cos\, 2t = Cos^2 t - Sen^2 t = (1 - Sen^2 t) - Sen^2 t$

$Cos\, 2t = 1 - 2\, Sen^2 t \Rightarrow Sen^2 t = \frac{1 - Cos\, 2t}{2}$

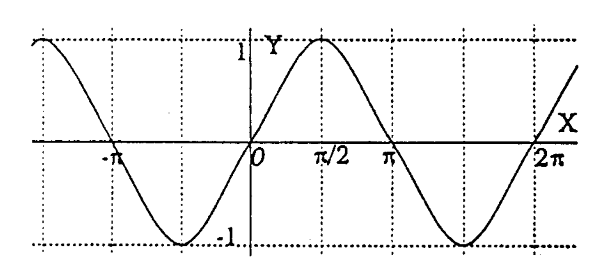
Las gráficas de las Funciones Trigonométricas, presentan características variadas, éstas gráficas pueden obtenerse a partir de una tabla de puntos.

La siguiente es una tabla de los ángulos notables, de todas las Funciones Trigonométricas. Los ángulos están expresados en Grados Sexagesimales y Radianes:

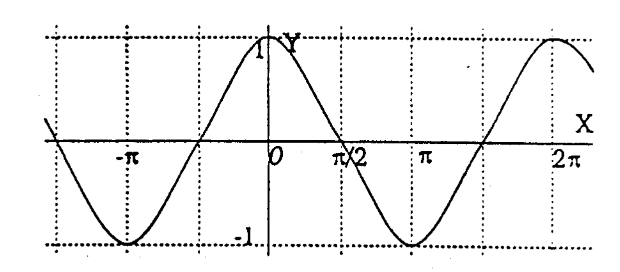
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Rad	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π
Sen	0	0.50	0.71	0.87	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0
Cos	1	0.87	0.71	0.50	0	-0.71	-1	-0.71	0	0.71	1
Tan	0	0.58	1	1.75	∞	-1	0	1	-∞	-1	0
Cot	∞	1.73	1	0.58	0	-1	∞	1	0	-1	∞
Sec	1	1.15	1.41	2	∞	-1.41	-1	-1.41	∞	1.41	1
Csc	∞	2	1.41	1.15	1	1.41	∞	1.41	-1	-1.41	∞

Tomando radianes sobre el Eje de abscisas, se obtienen las gráficas:

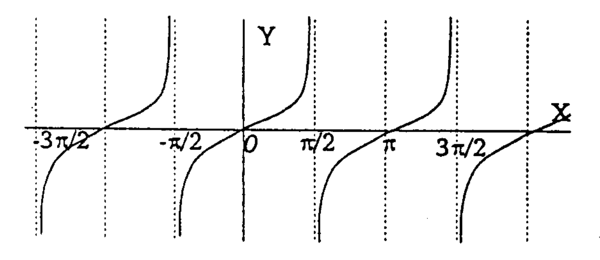
$y = Sen\,x$



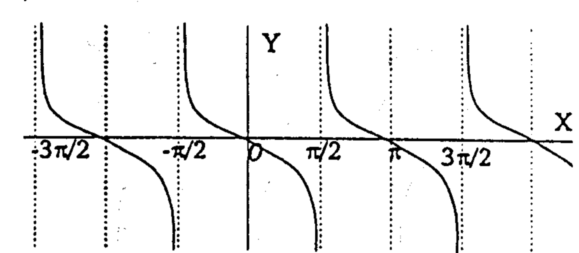
$y = Cos\,x$



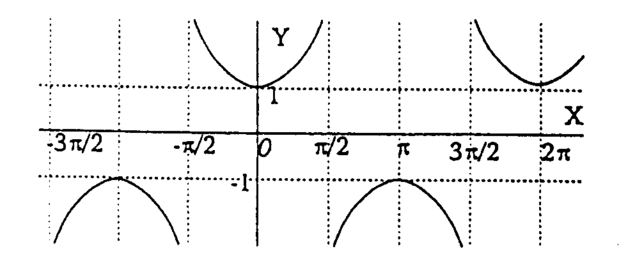
$y = Tan\,x$



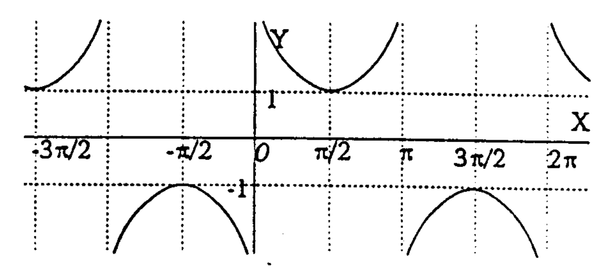
$y = Cot\,x$



$y = Sec\,x$



$y = Csc\,x$



Los Dominios de las Funciones Trigonométricas son los siguientes:

$f_{(x)} = Sen\,x \quad D_f: x \in \mathbb{R}$

$f_{(x)} = Cos\,x \quad D_f: x \in \mathbb{R}$

$f_{(x)} = Tan\,x \quad D_f: x \in \mathbb{R}\ ;\ x \neq \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$

$f_{(x)} = Cot\,x \quad D_f: x \in \mathbb{R}\ ,\ x \neq n\pi$

$f_{(x)} = Sec\,x \quad D_f: x \in \mathbb{R}\ ;\ x \neq \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$

$f_{(x)} = Csc\,x \quad D_f: x \in \mathbb{R}\ ,\ x \neq n\pi$

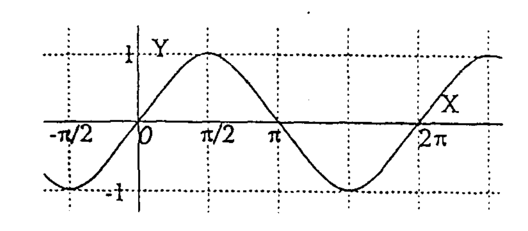
Las gráficas de las Funciones Trigonométricas, pueden detallarse de mejor manera, escribiendolas como:

$$f_{(x)} = A\,Sen(Bx + C)$$

A: Amplitud (Valor Máximo)
B: Frecuencia (Ciclos por 2π Rad)
C: Fase (Ángulo de inicio: $-C$)

Si A; B; C fuesen constantes (Lo que no siempre ocurre), se tendría una gráfica generalizada con: $A = 1$; $B = 1$; $C = 0$

La gráfica del caso se muestra como la curva conocida de la Función Seno. El tratamiento que se hace con la Función Seno, puede generalizarse a las otras Funciones Trigonométricas.



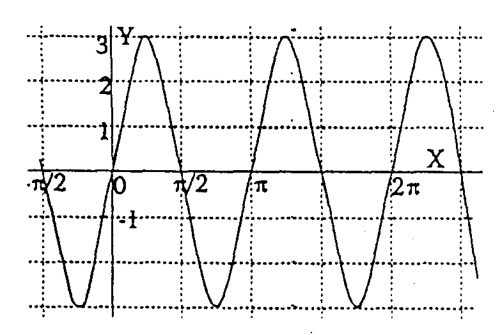
2-34 Graficar las siguientes Funciones Trigonométricas

a) $f_{(x)} = 3\,Sen\,2x$

Si: $f_{(x)} = 3\,Sen\,2x = A\,Sen(Bx + C)$

$\Rightarrow A = 3$; $B = 2$; $C = 0$

Por: $A = 3$; el Valor máximo que alcanza es: 3 (A su vez el mínimo es -3)
Por: $B = 2$; se tendrá dos ciclos (Dos ondas comple tas) cada 2π Rad de ángulo sobre el Eje X.
Por: $C = 0$; el inicio de la 1[era] onda será en: 0

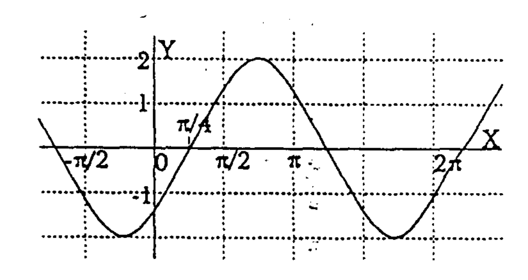


b) $f_{(x)} = 2\,Sen(x - \frac{\pi}{4})$

Si: $f_{(x)} = 2\,Sen(x - \frac{\pi}{4}) = A\,Sen(Bx + C)$

$\Rightarrow A = 2$; $B = 1$; $C = -\pi/4$

Por: $A = 2$; el máximo y mínimo son 2 y -2
Por: $B = 1$; hay un ciclo cada 2π Rad
Por: $C = -\pi/4$; el ciclo se inicia en: $\pi/4$

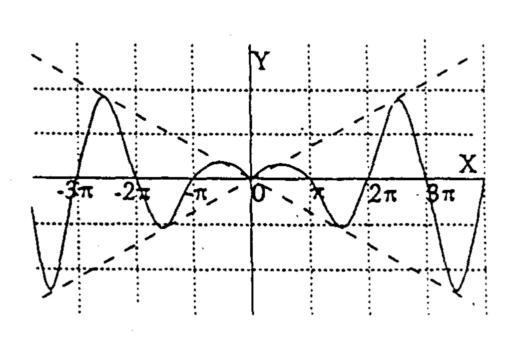


c) $f_{(x)} = x\,Sen\,x$

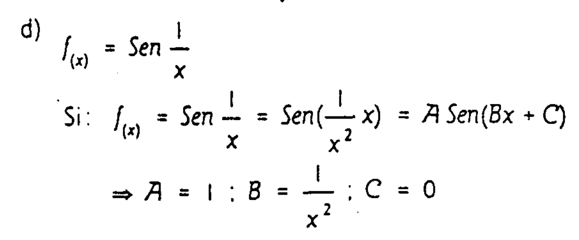
Si: $f_{(x)} = x\,Sen\,x = A\,Sen(Bx + C)$

$\Rightarrow A = x$; $B = 1$; $C = 0$

Por: $A = x$; la Amplitud es variable (De acuerdo a la Recta: $y = x$); el máximo, mínimo estarán comprendidas entre las Rectas de: x ; $-x$
Por: $B = 1$; hay un ciclo cada 2π Rad
Por: $C = 0$; el ciclo se inicia en 0



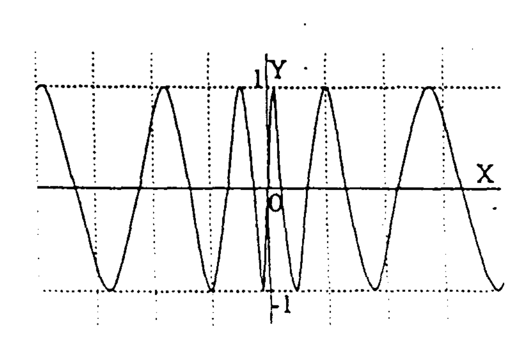
d) $f_{(x)} = Sen\,\frac{1}{x}$



Si: $f_{(x)} = Sen\,\frac{1}{x} = Sen(\frac{1}{x^2}\,x) = A\,Sen(Bx + C)$

$\Rightarrow A = 1$; $B = \frac{1}{x^2}$; $C = 0$

Ordenando de modo que se presente la forma general: Por: $A = 1$; el máximo, mínimo son 1; -1
Por: $B = 1/x^2$ La Frecuencia es variable, a medida que x es mayor, la Frecuencia es menor.
Por: $C = 0$, el ciclo se inicia en 0.



II-17 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Estas Funciones, tal como su nombre lo indica, son Inversas de las Funciones Trigonométricas, se definen

$y = Arcsen\, x$	Si: $x = Sen\, y$	$y = Arccsc\, x$	Si: $x = Csc\, y$
$y = Arccos\, x$	Si: $x = Cos\, y$	$y = Arcsec\, x$	Si: $x = Sec\, y$
$y = Arctan\, x$	Si: $x = Tan\, y$	$y = Arccot\, x$	Si: $x = Cot\, y$

Suele emplearse también la siguiente notación: $y = Arcsen\, x = Sen^{-1}x$ Donde: $Sen^{-1}x \neq \dfrac{1}{Sen\, x}$

De similar modo se nombran a las otras Funciones:

Las Funciones Trigonométricas Inversas, proceden así "Dado un número: x, se trata de hallar el ángulo: y que corresponde, de acuerdo a una Función Trigonométrica"

2-35 Analizar y graficar las siguientes Funciones Trigonométricas Inversas:

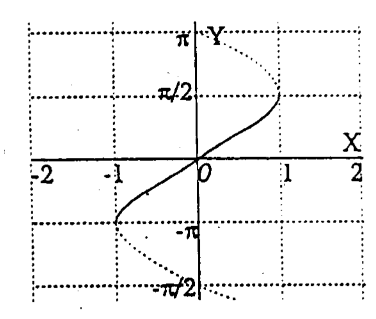
a) $f_{(x)} = Arcsen\, x$

La Expresión: $y = Arcsen\, x$, tendría la gráfica segmentada, sin embargo para que sea Función, se restringe al trazo continuo.

Dominio: $D_f \quad -1 \leq x \leq 1$

Codominio: $C_f \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

x	y
-1	-1.37=-π/2
-0.5	-0.52=-π/6
0	0
0.5	0.52=π/6
1	1.57=π/2



Si se intercambiaran los Ejes: X; Y la gráfica seria equivalente a la de: $y = Sen\, x$

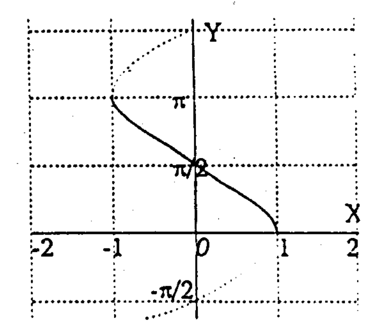
b) $f_{(x)} = Arccos\, x$

La gráfica de: $y = Arccos\, x$, es la curva segmentada, sin embargo para que sea Función se restringe.

Dominio: $D_f \quad -1 \leq x \leq 1$

Codominio: $C_f \quad 0 \leq y \leq \pi$

x	y
-1	3.14 = π
-0.5	2.09 =2π/3
0	1.57 = π/2
0.5	1.05 = π/6
1	0



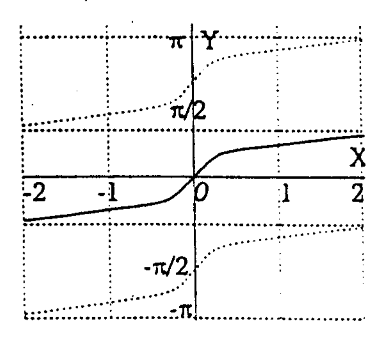
c) $f_{(x)} = Arctan\, x$

Las curvas segmentadas corresponden a $y = Arctan\, x$, sin embargo para que sea Función se restringe.

Dominio: $D_f \quad -\infty \leq x \leq \infty$

Codominio: $C_f \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

x	y
-2	-1.10
-1	-0.78 =-π/4
0	0
1	0.78 = π/4
2	1.10



Las Propiedades de las restantes Funciones Trigonométricas Inversas son:

$Arccot x = Arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - Arctan\, x \quad ; \quad D_f: \quad -\infty < x < \infty$

$Arcsec\, x = Arccos\dfrac{1}{x} \quad ; \quad D_f: \quad -\infty < x \leq -1 \,,\, 1 \leq x < \infty$

$Arccsc\, x = Arcsen\dfrac{1}{x} \quad ; \quad D_f: \quad -\infty < x \leq -1 \,,\, 1 \leq x \infty$

Usando Funciones Trigonométricas Inversas, se resuelven Ecuaciones Trigonométricas, donde la variable está afectada por alguna Función Trigonométrica, comúnmente como medida de ángulos se usan Radianes.

2-36 Resolver las siguientes Ecuaciones Trigonométricas:

a) $2\,Sen\,x - 1 = 0$

$$Sen\,x = \frac{1}{2}$$

$$x = Arcsen\,\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}\,Rad = 30°$$

Ordenando la Ecuación, La Función *Seno* pasa de un miembro de la ecuación al otro como *Arcoseno*.

b) $2\,Tan^2 x + 3$ [illegible]

Tan^2 [illegible]

Tan [illegible]

x [illegible] $\sqrt{2}$

x [illegible] $Rad = 54.73°$

c) $3\,Arccos\,x - 1 = 0$

$$Arccos\,x = \frac{1}{3}$$

$$x = Cos\,\frac{1}{3}$$

$$x = 0.94$$

Ordenando la Ecuación, La Función *Coseno* pasa de un miembro de la ecuación al otro como *Arcocoseno*.

d) $5\,Arctan\,\sqrt[3]{x}$ [illegible] $= 6$

$Arctan$ [illegible] $= 1$

[illegible] $= Tan\,1 = 1.56$

[illegible] $= (1.56)^3 = 3.78$

Otras Propiedades importantes de las Funciones Trigonométricas Inversas son:

$$Arcsen\,x + Arcsen\,y = Arcsen(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

$$Arccos\,x + Arccos\,y = Arccos(x\,y + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2})$$

$$Arctan\,x + Arctan\,y = Arctan\,\frac{x+y}{1-xy}$$

2-37 Demostrar las siguientes Propiedades de las Funciones Trigonométricas:

a) $Arcsen\,x + Arcsen\,y = Arcsen(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-x^2})$

Si: $a = Arcsen\,x \Rightarrow Sen\,a = x \Rightarrow Cos\,a = \sqrt{1-x^2}$

$b = Arcsen\,y \Rightarrow Sen\,b = y \Rightarrow Cos\,b = \sqrt{1-y^2}$

Por la definición de Inversas Trigonométricas

$Sen(a+b) = Sen\,a\,Cos\,b + Sen\,b\,Cos\,a$

Seno de una Suma

$\Rightarrow\ a + b = Arcsen(Sen\,a\,Cos\,b + Sen\,b\,Cos\,a)$

Despejando.

$Arcsen\,x + Arcsen\,y = Arcsen(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$

Reemplazando, queda demostrada la Propiedad.

b) $$Sen(Arctan\,x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Si: $Sen(Arctan\,x) = y \Rightarrow Cos(Arctan\,x) = \sqrt{1-y^2}$

Por Identidad Trigonométrica: $Cos\,A = \sqrt{1 - Sen^2 A}$

$$\frac{Sen(Arctan\,x)}{Cos(Arctan\,x)} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Dividiendo y simplificando por relaciones conocidas.

$$Tan(Arctan\,x) = x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Rightarrow\ y = Sen(Arctan\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Despejando de la última igualdad, la expresión para y, queda demostrada la Propiedad.

II-18 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las Funciones Hiperbólicas se definen en términos de las Funciones Exponenciales

$f_{(x)} = Senh\ x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ Seno Hiperbólico

$f_{(x)} = Cosh\ x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ Coseno Hiperbólico

$f_{(x)} = Tanh\ x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{Senh\ x}{Cosh\ x}$ Tangente Hiperbólica

$f_{(x)} = Coth\ x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \dfrac{Cosh\ x}{Senh\ x}$ Cotangente Hiperbólica

$f_{(x)} = Sech\ x = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{1}{Cosh\ x}$ Secante Hiperbólica

$f_{(x)} = Csch\ x = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}} = \dfrac{1}{Senh\ x}$ Cosecante Hiperbólica

De acuerdo a estas definiciones, es posible demostrar las siguientes Relaciones:

$Cosh^2x - Senh^2x = 1$

$Sech^2x = 1 - Tanh^2x$

$Csch^2x = Coth^2x - 1$

$Senh(a \pm b) = Senh\,a\ Cosh\,b \pm Senh\,b\ Cosh\,a$

$Cosh(a \pm b) = Cosh\,a\ Cosh\,b \pm Senh\,a\ Senh\,b$

$Tanh(a \pm b) = \dfrac{Tanh\,a \pm Tanh\,b}{1 \pm Tanh\,a\ Tanh\,b}$

2-38 Analizar y graficar las siguientes Funciones Hiperbólicas:

a) $f_{(x)} = Senh\ x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

El análisis efectuado sobre las Funciones Exponenciales es aplicable a las Hiperbólicas (II-14)

Dominio: $D_f\ x \in R$

Codominio $C_f\ y \in R$

La tabla obtenida, determina la curva.

x	y
-5	-74.2
-2	-3.68
-1	-1.17
0	0
1	1.17
2	3.63
3	10.02

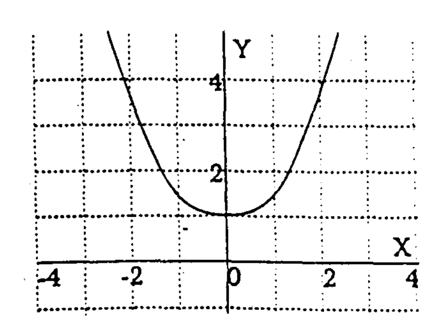
b) $f_{(x)} = Cosh\ x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

Observando las Exponenciales que definen la Función, se concluye:
Dominio: $D_f\ x \in R$

Codominio $C_f\ y \in R,\ y \geq 1$

La tabla adjunta, determina la gráfica. A la curva de esta Función se llama Catenaria.

x	y
-3	10.07
-2	3.76
-1	1.54
0	1
1	1.54
2	3.76
3	10.07



Las Funciones analizadas de *Senh x*, *Cosh x* , son las principales, las demás Funciones Hiperbólicas derivan sus Propiedades de éstas.

2-39 Analizar: $f_{(x)} = Tanh\,x$

Si: $f_{(x)} = Tanh\,x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

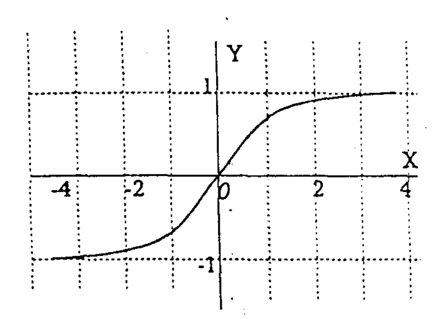
Observando la expresión con Exponenciales se concluye que:

Dominio $D_f\ x \in \mathbb{R}$

Codominio $C_f\ y \in \mathbb{R},\ -1 < y < 1$

La tabla obtenida determina la gráfica, se desarrolla de -1 a 1 sobre el Eje Y.

x	y
-3	-0.99
-2	-0.96
-1	-0.76
0	0
1	0.76
2	0.96
3	0.99



2-40 Demostrar las siguientes Relaciones entre Funciones Hiperbólicas:

a) $Cosh^2 x - Senh^2 x = 1$

$$(Cosh\ x)^2 - (Senh\ x)^2 = 1$$

Proposición que se demostrará.

$$\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

Reemplazando las Funciones por sus Expresiones con Exponenciales.

$$\frac{(e^{x})^2 + 2e^{x}e^{-x} + (e^{-x})^2}{2^2} - \frac{(e^{x})^2 - 2e^{x}e^{-x} + (e^{-x})^2}{2^2} = 1$$

Desarrollando los Cuadrados de suma y diferencia que se encuentran en los numeradores.

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

Simplificando y ordenando

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

En la simplificación final se llega a una Identidad

b) $Senh(x + y) = Senh\ x\ Cosh\ y + Senh\ y\ Cos\ h\ x$

$$Senh(x + y) = Senh\ x\ Cosh\ y + Senh\ y\ Cos\ h\ x$$

$$\frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\,\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\,\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

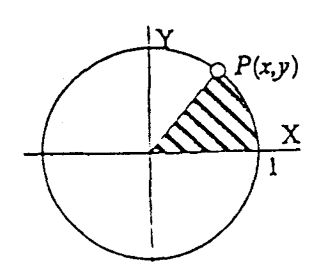
$$= \frac{e^{x}e^{y} + e^{x}e^{-y} - e^{-x}e^{y} - e^{-x}e^{-y}}{4} + \frac{e^{y}e^{x} + e^{y}e^{-x} - e^{-y}e^{x} - e^{-y}e^{-x}}{4}$$

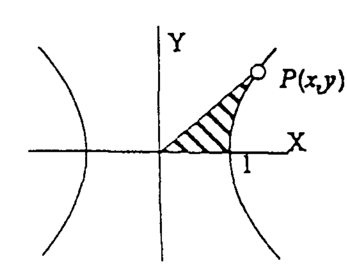
$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{y+x} + e^{y-x} - e^{-y+x} - e^{-y-x}}{4}$$

$$= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

La Proposición a demostrar se expresa en términos de Exponenciales, para luego desarrollando, llegar a una Identidad.

Las Funciones Trigonométricas se relacionaban con puntos de una Circunferencia. Las Funciones Hiperbólicas se relacionan con puntos de una Hipérbola (Ver IV-7)





Comparando las gráficas, se aprecian las relaciones indicadas.

II-19 FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Las Funciones Hiperbólicas inversas, tal y como su nombre lo indica, son las Inversas de las Funciones Hiperbólicas y se definen del siguiente modo:

$$y = Arcsenh\,x \;;\; Si:\; x = Senh\,y \qquad y = Arccoth\,x \;;\; Si:\; x = Coth\,y$$
$$y = Arccosh\,x \;;\; Si:\; x = Cosh\,y \qquad y = Arcsech\,x \;;\; Si:\; x = Sech\,y$$
$$y = Arctanh\,x \;;\; Si:\; x = Tanh\,y \qquad y = Arccsch\,x \;;\; Si:\; x = Csch\,y$$

En la 1^era^ y restantes Funciones Hiperbólicas Inversas, suele usarse además la siguiente notación:

$$y = Arcsenh\,x = Senh^{-1}x \;;\quad Donde:\; Senh^{-1}x \neq \frac{1}{Senh\,x}$$

Para fines de cálculo, las Hiperbólicas Inversas, pueden expresarse también como:

$$Arcsenh\,x = Ln(x + \sqrt{x^2+1}) \;;\; -\infty < x < \infty \qquad Arccoth\,x = \frac{1}{2}\,Ln\frac{x+1}{x-1} \;;\; \begin{matrix} -\infty < x < -1 \\ 1 < x < \infty \end{matrix}$$

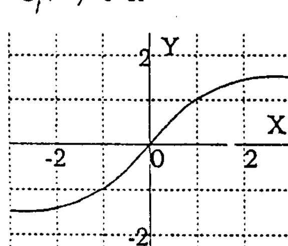
$$Arccosh\,x = Ln(x + \sqrt{x^2-1}) \;;\; 1 < x < \infty \qquad Arcsech\,x = Ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \;;\; 0 < x < 1$$

$$Arctanh\,x = \frac{1}{2}\,Ln\frac{1+x}{1-x} \;;\; -1 < x < 1 \qquad Arccsch\,x = Ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \;;\; 0 < x < \infty$$

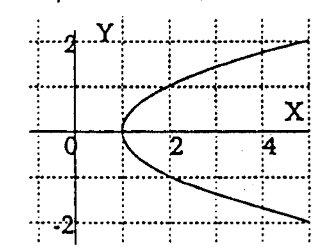
Los Dominios, se calculan en forma equivalente a: P-2-5-e; P-2-5-f

Las gráficas de las Funciones Hiperbólicas Inversas son las siguientes:

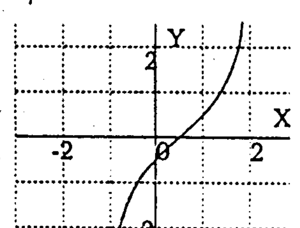
$f_{(x)} = Arcsenh\,x$
$D_f:\; x \in \mathbb{R}$
$C_f:\; y \in \mathbb{R}$



$f_{(x)} = Arccosh\,x$
$D_f:\; x \in \mathbb{R}\,,\; 1 < x < \infty$
$C_f:\; y \in \mathbb{R}^*$



$f_{(x)} = Arctanh\,x$
$D_f:\; x \in \mathbb{R}\,,\; -1 < x < 1$
$C_f:\; y \in \mathbb{R}$



2-41 Demostrar la relación de: $Arcsenh\,x = Ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$y = Arcsenh\,x$ — Partiendo de la Hiperbólica Inversa.

$x = Senh\,y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ — Despejando: x luego aplicando la definición del Seno Hiperbólico adaptada al caso.

$e^y - 2x - e^{-y} = 0$ — Reordenando y llevando todo al Primer miembro de la Igualdad

$(e^y - 2x - e^{-y})e^y = 0 \cdot e^y$ — Multiplicando ambos miembros de la Igualdad por e^y

$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$ — Ordenando como expresión de 2^do^ Grado

$\Rightarrow\; e^y = \dfrac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4\cdot 1(-1)}}{2\cdot 1}$ — Aplicando la fórmula para Ecuaciones de 2^do^ Grado cuya incógnita es e^y

$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$

$Ln(e^y) = Ln(x + \sqrt{x^2+1})$ — Simplificando, aplicando Logaritmos Neperianos, lo que obliga a tomar la Raíz positiva únicamente (Solo así existe el Logaritmo)

$y = Ln(x + \sqrt{x^2+1})$

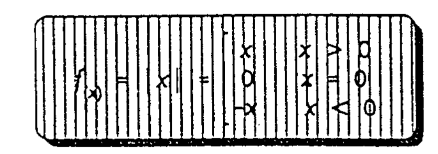
II-20 FUNCIONES ESPECIALES

Las Funciones Especiales, son aquellas que brindan una aplicación específica, particularmente teórica, las principales son:

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO (ABS) — FUNCIÓN DISTANCIA (DIST)
FUNCIÓN PARTE ENTERA (INT) — FUNCIÓN SIGNO (SGN)

II-21 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO (ABS)

La Función Valor Absoluto se denota y define de la siguiente manera:



Las Propiedades detalladas del Valor Absoluto en I-10, se hacen extensivas a la Función Valor Absoluto.

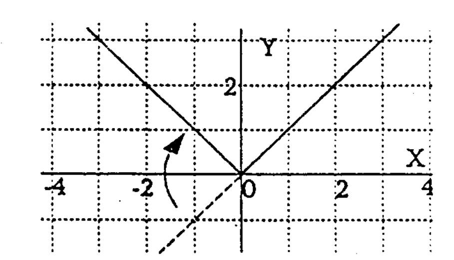
Su Dominio es: $D_f\ x \in \mathbf{R}$; Su Codominio: $C_f\ y \in \mathbf{R}^+$; Es Función de: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$. La Función Valor Absoluto no es Inyectiva ni Suryectiva.

La gráfica de la Función Valor Absoluto, puede determinarse por su definición o por tabla de puntos. $y = |x|$

La porción negativa de la Recta: $y = x$ se convierte en positiva.

En: $x = 0$ se tiene un Punto Anguloso.

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3



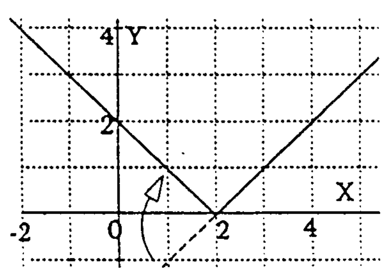
2-42 Analizar y graficar las siguientes Funciones que contienen Valor Absoluto.

a) $f_{(x)} = |x - 2|$

Por definición
$$f_{(x)} = |x-2| = \begin{cases} (x-2) & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

La porción negativa de la Recta: $y = x - 2$ se convertirá en positiva. El Punto Anguloso está en: $x = 2$

x	y
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	1
4	2



b) $f_{(x)} = |x^2 - 1|$

Por definición
$$y = |x^2-1| = \begin{cases} (x^2-1) & x^2-1 > 0 \\ 0 & x^2-1 = 0 \\ -(x^2-1) & x^2-1 < 0 \end{cases}$$

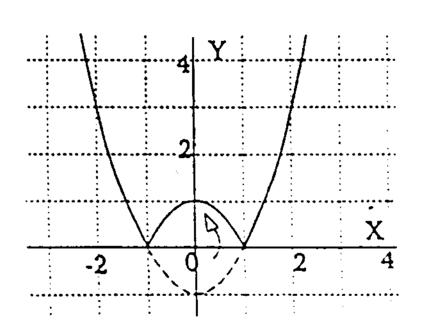
$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow -\infty < x < -1;\ 1 < x < \infty$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1\ ;\ x = 1$

$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$

Usando resultados de P-1-10

x	y
-2	3
-1	0
0	1
1	0
2	3



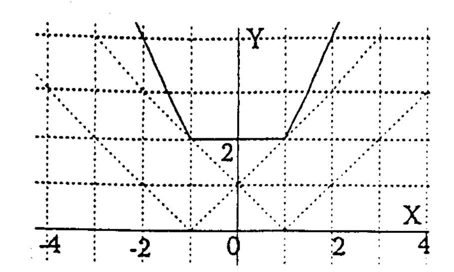
2-43 Analizar y graficar las siguientes Funciones que contienen Valor Absoluto.

a) $y = |x - 1| + |x + 1|$

Convendría graficar separadamente cada Valor Absoluto, para luego sumar punto a punto. También es posible el uso de la tabla de puntos anexa.

Los Puntos Angulosos se encuentran en: $x = 1 ; x = -1$

x	y
-2	4
-1	2
0	2
1	2
2	4
3	6



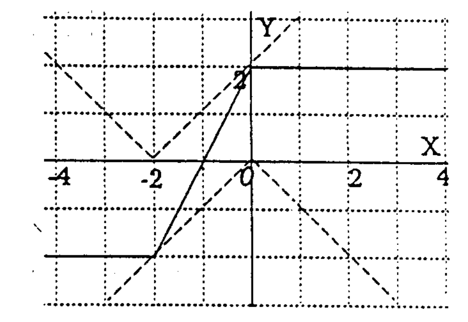
b) $y = |x + 2| - |x|$

Graficando en forma separada cada Valor Absoluto, para luego sumar punto a punto.

Los Puntos Angulosos siguen en: $x = -2 ; x = 0$

Se grafica también por tabla.

x	y
-4	-2
-3	-2
-2	-2
-1	0
0	2
1	2

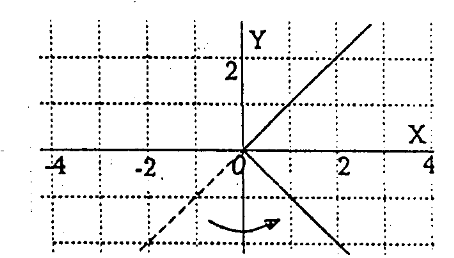


c) $|y| = x$

Analizando por la definición de Valor Absoluto:

$$|y| = x = \begin{cases} y = x & y > 0 \\ 0 = x & y = x \\ -y = x & y < 0 \end{cases}$$

x	y
-1	??
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4



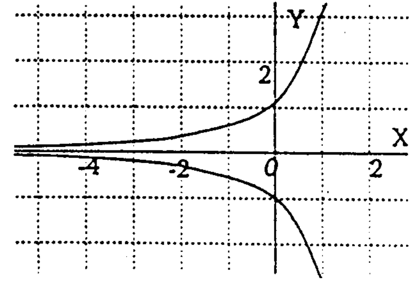
Se torna en positiva, la porción negativa de la Recta: $y = x$; en el sentido de las abscisas (X). También es posible el uso de la tabla para obtener la gráfica.

d) $|y| = e^x$

Analizando por la definición de Valor Absoluto:

$$|y| = e^x = \begin{cases} y = e^x & y > 0 \\ 0 = e^x & y = x \\ -y = e^x & y < 0 \end{cases}$$

x	y
-1	±0.37
0	±1
1	±2.72
2	±7.39
3	±20.1



La porción negativa, en sentido de las abscisas de la curva $y = e^x$ se reitera (También la positiva). Se grafica también por tabla.

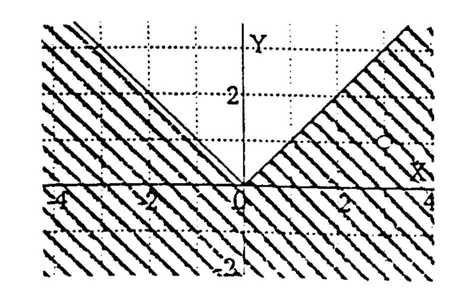
e) $y \leq |x|$

Graficando en principio: $y = |x|$, el Plano se divide en 2 regiones.

Tomando un punto cualquiera y observando si se cumple la Desigualdad.

Si: $P(3,1) \Rightarrow 1 \leq |3|$

La Desigualdad se cumple, entonces el punto y la región satisfacen la Inecuación y son su solución.



II-22 FUNCIÓN PARTE ENTERA (INT)

La Función Parte Entera, asigna a todo Número Real, el entero inmediato inferior, su notación es: $f_{(x)} = [\![x]\!]$

Ej 2-31 $[\![3]\!] = 3$ $\quad [\![2.4]\!] = 2$ $\quad [\![1.01]\!] = 1$ $\quad [\![0.99]\!] = 0$

$[\![-5]\!] = -5$ $\quad [\![-2.4]\!] = -3$ $\quad [\![\pi]\!] = 3$ $\quad [\![-0.01]\!] = -1$

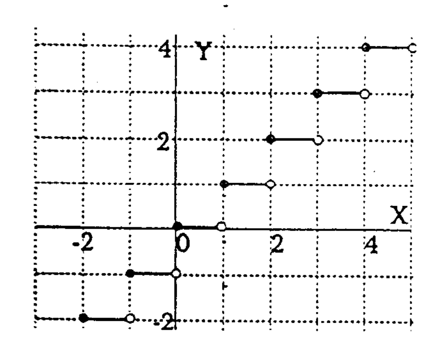
Se calcula la Parte Entera de algunos Números Reales

Otra manera de plantear la definición es:

$$f_{(x)} = [\![x]\!] = \begin{cases} \dots & \dots\dots\dots \\ -2 & -2 \le x < -1 \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \dots & \dots\dots \end{cases}$$

A su vez la gráfica de la Función Parte Entera es un conjunto de segmentos rectos:

Cada segmento de la gráfica incluye al extremo inferior, pero no al superior.



El Dominio de la Función D_f: $x \in R$; El Codominio C_f: $y \in Z$ (Enteros); Luego es posible afirmar que esta es una Función de Reales en Enteros f: R → Z. La Función Parte Entera no es Inyectiva ni Suryectiva.

2-44 Demostrar o refutar: A) $[\![a + b]\!] = [\![a]\!] + [\![b]\!]$ $\qquad$ B) $[\![\,|x|\,]\!] = |[\![x]\!]|$

A) Si: $a = 2.7$; $b = 3.5$

$$[\![a + b]\!] = [\![a]\!] + [\![b]\!]$$
$$[\![2.7 + 3.5]\!] = [\![2.7]\!] + [\![3.5]\!]$$
$$[\![6.2]\!] = 2 + 3$$
$$6 \neq 5$$

B) Si: $x = -2.3$

$$[\![\,|x|\,]\!] = |[\![x]\!]|$$
$$[\![\,|-2.3|\,]\!] = |[\![-2.3]\!]|$$
$$[\![2.3]\!] = |-3|$$
$$2 \neq 3$$

Para demostrar falsedades (Refutar), es suficiente con usar un contraejemplo. (Ejemplo que muestra una falsedad)

Las dos Propiedades son Falsas (Serán válidas solo para enteros)

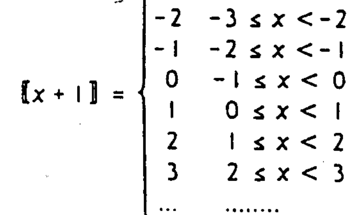
2-45 Graficar, luego de analizar las siguientes Funciones, que contienen Parte Entera

a) $y = [\![x + 1]\!]$

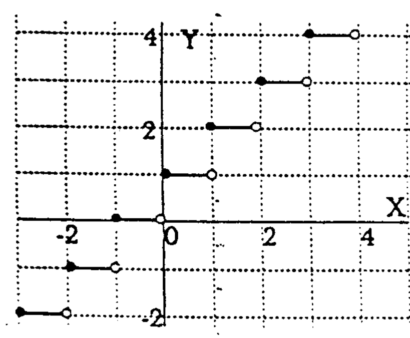
La gráfica se corre a izquierda en una unidad.

La expresión interna es cero, cuando $x = -1$

Volviendo a definir.



$$[\![x + 1]\!] = \begin{cases} \dots & \dots\dots\dots \\ -2 & -3 \le x < -2 \\ -1 & -2 \le x < -1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 1 \\ 2 & 1 \le x < 2 \\ 3 & 2 \le x < 3 \\ \dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$



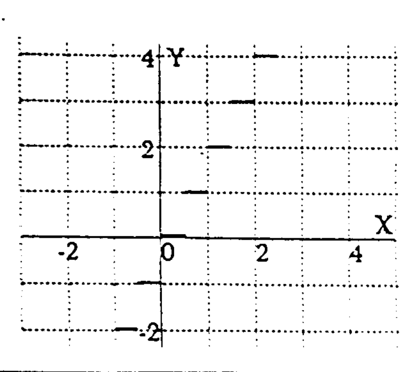
b) $y = [\![2x]\!]$

Cada segmento de la gráfica se completará cuando: $x = 1/2$ (O múltiplos)

En este caso es conveniente elaborar una tabla. El método de la tabla también era aplicable en el caso anterior.

En todas los casos, la gráfica debe incluir al extremo inferior de los segmentos.

x	y
-2.1	-5
-1.5	-3
-1	-2
0	0
0.5	1
1	2
1.2	2



2-46 Graficar las siguientes Funciones que contienen a la Parte Entera

a) $y = [\![x/3]\!]$

$$[\![\frac{x}{3}]\!] = \begin{cases} \dots & \dots\dots\dots \\ -1 & -3 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < 6 \\ 2 & 6 \le x < 9 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

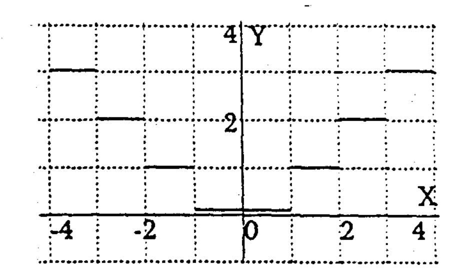
x	y
-1	-1
0	0
1	0
2	0
3	1
4	1

Un segmento de Recta, de los que
componen la gráfica se completa, cuando la expresión interior es: 1 (Cuando x es: 3 o un múltiplo)

c) $y = [\![|x|]\!]$

$$[\![|x|]\!] = \begin{cases} \dots & \dots\dots\dots \\ 1 & -2 \le x < -1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ \dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

x	y
-2	2
-1	1
0	0
0.5	0
1	1
2	2



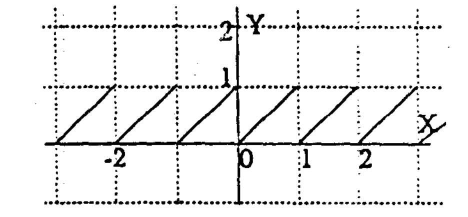
Se toma la Parte Entera solo de positivos, debido al Valor Absoluto interior.

d) $y = x - [\![x]\!]$

Es práctico graficar separadamente: x ; $[\![x]\!]$ para luego restar punto a punto.

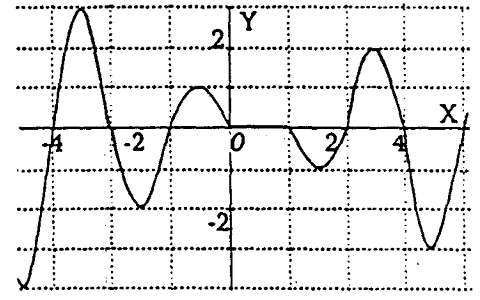
$$x - [\![x]\!] = \begin{cases} \dots & \dots\dots\dots \\ x+1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ x-2 & 2 \le x < 3 \\ \dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

x	y
-1	0
0	0
0.5	0.5
0.9	0.9
1	0



d) $y = [\![\frac{x}{\pi}]\!] \, Sen\, x$

$$[\![\frac{x}{\pi}]\!] Sen\, x = \begin{cases} \dots & \dots\dots\dots \\ -2\, Sen\, x & -2\pi \le x < -\pi \\ -1\, Sen\, x & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < \pi \\ 1\, Sen\, x & \pi \le x < 2\pi \\ 2\, Sen\, x & 2\pi \le x < 3\pi \\ \dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

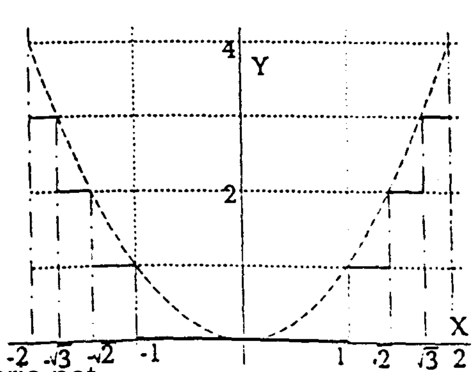


La Amplitud de la Función Trigonométrica es variable, cambia cada vez que: x es múltiplo de π

e) $y = [\![x^2]\!]$

$$[\![x^2]\!] = \begin{cases} \dots & \dots\dots\dots \\ 2 & -\sqrt{3} \le x < -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \le x < -1 \\ 0 & -1 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \le x < 2 \\ 4 & 2 \le x < \sqrt{5} \\ \dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

x	y
-2	4
-1.8	3
-.3	3
-1.5	2
- 2	2
-1	1
0	1
1	1
1.6	2
1.9	3



II-23 FUNCIÓN DISTANCIA (DIST)

La Función Distancia, asigna a todo Número Real, su distancia al entero más próximo, su notación: $f_{(x)} = \{x\}$

Ej 2-32 $\{0.2\} = 0.2$ El entero mas próximo es 0 está a distancia de 0.2

$\{1.4\} = 0.4$ El entero mas próximo es 1 está a distancia de 0.4

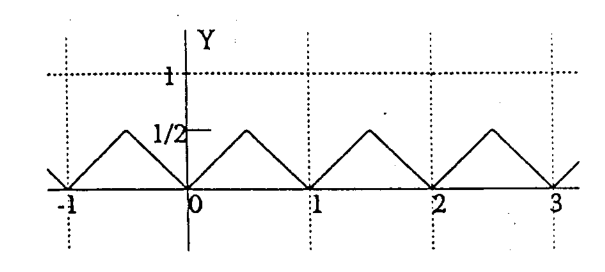
$\{1\} = 0$ El entero mas próximo es 1 está a distancia de 0

$\{-2\} = 0$ El entero más próximo es -2 está a distancia de 0

Otro modo de plantear la definición es:

$$\{x\} = \begin{cases} \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x+1 & -1 \le x \le -1/2 \\ -x & -1/2 \le x \le 0 \\ x & 0 \le x \le 1/2 \\ 1-x & 1/2 \le x \le 1 \\ x-1 & 1 \le x \le 3/2 \\ 2-x & 3/2 \le x \le 2 \\ x-2 & 2 \le x \le 5/2 \\ \ldots & \ldots\ldots \end{cases}$$

Se indica la gráfica de la Función Distancia:



Una característica de la gráfica de la Función Distancia (Una Onda Triangular) es la de poseer infinitos Puntos Angulosos (En los múltiplos de: 1/2)

El Dominio de la Función D_f: $x \in R$; El Codominio C_f: $y \in R$, $0 \le y \le 1/2$. La Función Distancia no es Inyectiva ni Suryectiva.

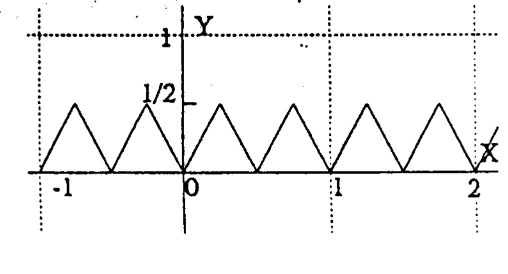
2-47 Graficar las siguientes expresiones de la Función Distancia

a) $y = \{2x\}$

Para completar un Ciclo (Un Triángulo), en $\{x\}$, se precisa llegar hasta: $x = 1$ pero en esta Función: $\{2x\}$ basta llegar hasta: ½

$$\{2x\} = \begin{cases} \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 2x+1 & -2/4 \le x \le -1/4 \\ -2x & -1/4 \le x \le 0 \\ 2x & 0 \le x \le 1/4 \\ 1-2x & 1/4 \le x \le 2/4 \\ 2x-1 & 2/4 \le x \le 3/4 \\ 2-2x & 3/4 \le x \le 1 \\ \ldots & \ldots\ldots \end{cases}$$

x	y
-0.1	0.2
0	0
0.2	0.4
0.6	0.2
0.9	0.2
1	0
1.3	0.4

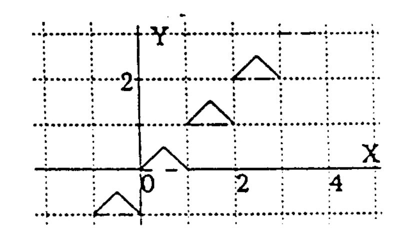


b) $y = [\![x]\!] + \{x\}$

Conviene graficar separadamente las Funciones: $[\![x]\!]$, $\{x\}$; Para luego sumar punto a punto.

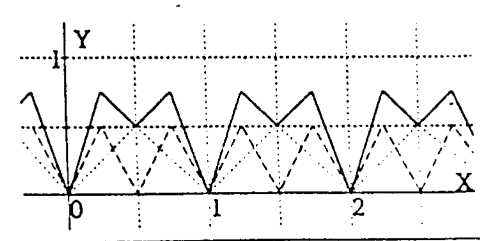
Note que cuando la Parte Entera completa un Segmento, la Distancia, completa a su vez un Triángulo.

x	y
0	0
0.1	0.1
0.2	0.2
0.6	0.4
1	1
1.2	1.2
1.6	1.4



c) $y = \{x\} + \{2x\}$

Graficando separadamente, cada una de las Funciones y sumando punto a punto, se obtendrá la gráfica final Se toma en cuenta la gráfica inicial de la Función Distancia y la obtenida en el inciso: a)

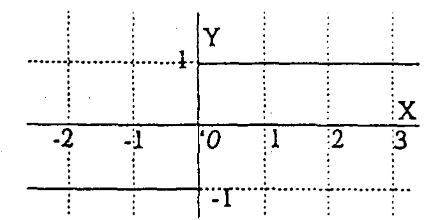


II-24 FUNCIÓN SIGNO (SGN)

La Función Signo (O Signum), asigna a todo Número Real positivo: +1 (Signo positivo); a todo Número Real negativo: -1 (Signo negativo)

$$f_{(x)} = SGN(x) = \frac{|x|}{x} \quad : \quad x \neq 0$$

Otra modo de definir y la gráfica de esta Función son:

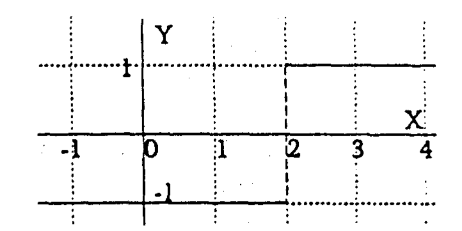


$$f_{(x)} = SGN(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

La Función no está definida en $x = 0$. Sin embargo ocasionalmente, suele asignarse $SGN(0) = 0$ (Lo que no se hará en este Texto) $D_f: x \in \mathbb{R}\ .\ x \neq 0\ ;\ C_f: -1,\ 1$

2-48 Analizar y graficar: $f_{(x)} = \frac{|x-2|}{x-2}$

Esta Función es equivalente a la forma general de la Función Signo. La indefinición se da esta vez en $x = 2$



Dominio: $D_f: x \in \mathbb{R}\ .\ x \neq 2$

Codominio: $y = -1,\ y = 1$ (El Codominio posee solo dos elementos)

II-25 OTRAS FUNCIONES

FUNCIONES PARES Son aquellas Funciones que poseen la Propiedad: $f_{(x)} = f_{(-x)}$

Ej 2-33 Si: $f_{(x)} = x^2 \Rightarrow f_{(x)} = f_{(-x)}$
$x^2 = (-x)^2$

$f_{(x)} = Cos\,x \Rightarrow f_{(x)} = f_{(-x)}$
$Cos(x) = Cos(-x)$

Las dos Funciones son Pares, ya que verifican la definición.

FUNCIONES IMPARES Son aquellas Funciones que poseen la Propiedad: $f_{(-x)} = -f_{(x)}$

Ej 2-34 Si: $f_{(x)} = x^3 \Rightarrow f_{(-x)} = -f_{(x)}$
$(-x)^3 = -(x^3)$

$f_{(x)} = Sen\,x \Rightarrow f_{(-x)} = -f_{(x)}$
$Sen(-x) = -Sen(x)$

Las dos Funciones son Impares, ya que verifican la definición.

FUNCIONES PERIÓDICAS Son aquellas Funciones que poseen la Propiedad:

$$f_{(x)} = f_{(x+T)} \quad : \quad T \text{ es el Periodo}$$

Ej 2-35 $f_{(x)} = Sen\,x \Rightarrow f_{(x)} = f_{(x+T)}$
$Sen(x) = Sen(x + 2\pi)$

$f_{(x)} = \{x\} \Rightarrow f_{(x)} = f_{(x+T)}$
$\{x\} = \{x+1\}$

Las dos Funciones son Periódicas, ya que verifican la definición.

Todas las Funciones Trigonométricas son Periódicas (Periodo: $T = 2\pi$); también es Periódica la Función Distancia (Periodo: $T = 1$).

II.- PROBLEMAS PROPUESTOS

2-1 Indicar si los Conjuntos de Pares ordenados, forman una Función (F o No F)

$\{(3,0), (5,0), (7,0)\}$ $\quad$ $\{(2,3), (3,4), (5,6)\}$ $\quad$ F ; F

$\{(1,2), (1,3), (1,4)\}$ $\quad$ $\{(0,0), (2,2), (4,4)\}$ $\quad$ No F ; F

2-2 Hallando el Producto Cartesiano: $A \times B$; ¿Se obtiene o no una Función?

$A = \{0,1\} ; B = \{2,3\}$ $\quad$ $A = \{9,8,7,6\} ; B = \{5\}$ $\quad$ No F ; F

2-3 Graficar las siguientes Relaciones y Funciones en el Plano Coordenado

$y = 6 - 2x \qquad y = \dfrac{(x-1)}{3} \qquad y = x^2 - 1 \qquad y = x^3 - 3x \qquad y = \sqrt{1-x} \qquad y = \sqrt[3]{x}$

2-4 Hallar D_f (Dominios de definición) de las siguientes Funciones:

$y = 3x + 1 \qquad y = x^2 - 4 \qquad y = 10^x + 1$ $\quad$ $\mathbb{R} ; \mathbb{R} ; \mathbb{R}$

$y = \dfrac{1}{x-7} \qquad y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5} \qquad y = \dfrac{1}{+\sqrt{x-5}}$ $\quad$ $x \neq 7 ; x \neq 1, x \neq 5 ; x > 5$

$y = +\sqrt{x^2 - 6x + 8} \qquad y = +\sqrt{x-2} \qquad y = Log(x-6)$ $\quad$ $x \leq 2, x \geq 4 ; x \geq 2 ; x > 6$

$y = Log(4 - x^2) \qquad y = Log(x^2 + 1) \qquad y = \sqrt{x^2 - 4} + Log\,x$ $\quad$ $-2 < x < 2 ; \mathbb{R} ; x \geq 2$

2-5 Hallar los Dominios y Codominios de las siguientes Funciones:

$y = 3x + 6 \qquad y = \dfrac{5x}{x-3} \qquad y = \dfrac{4x}{x-4}$ $\quad$ $\mathbb{R}, \mathbb{R} ; x \neq 3, y \neq 5 ; x \neq 4, y \neq 4$

$y = +\sqrt{x^2 + 1} \qquad y = 10^x + 3 \qquad y = Log(x-3)$ $\quad$ $\mathbb{R}, y \leq -1, y \geq 1 ; \mathbb{R}, y > 3 ; x > 3, \mathbb{R}$

$y = x^2 - 2x + 5 \qquad y = +\sqrt{x-3} \qquad y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad$ $\mathbb{R}, y \geq 4 ; x \geq 3, \mathbb{R} ; \mathbb{R}, y \geq 1$

2-6 Indicar si las siguientes Funciones son: Inyectivas (I), Suryectivas (S) ; Biyectivas (B) o ninguna (?)

$f = 2x + 1 \qquad f = x^2 + 1 \qquad f = 2^x$ $\quad$ B ; ? ; I

$f = x^3 - 3x \qquad f = \sqrt{x-1} \qquad f = Log\,x$ $\quad$ S ; ? ; B

2-7 Hallar las Funciones Inversas (f^{-1}) de las siguientes Funciones:

$f = 3x + 7 \qquad f = +\sqrt{x-4} \qquad f = x^3 - 1$ $\quad$ $\dfrac{x-7}{3} ; x^2 + 4 ; \sqrt[3]{x+1}$

$f = \dfrac{3x}{x-5} \qquad f = \dfrac{3}{x^2 - 1} \qquad f = \dfrac{4x-7}{7x-4}$ $\quad$ $\dfrac{5x}{x-3} ; \sqrt{\dfrac{3+x}{x}} ; \dfrac{4x-7}{7x-4}$

$f = e^{x-1} \qquad f = \sqrt{x^2 + 1} \qquad f = x^2 - 2x + 5$ $\quad$ $1 + Ln\,x ; +\sqrt{x^2 - 1} ; 1 + \sqrt{x-4}$

2-8 Hallar $(f+g)_{(0)} ; (f-g)_{(-1)} ; (f\,g)_{(1)} ; (f/g)_{(3)}$ Si: $f_{(x)} = 3x^2 - 5x + 1 ; g_{(x)} = x^2 + 4$ $\quad$ 5 ; 4 ; -5 ; 1

2-9 Hallar $f \circ g ; g \circ f$ (Si no existen, indicar: ?) Las Funciones son:

$f = x^2 - 1 \qquad g = 2x + 4$ $\quad$ $4x^2 + 16x + 15 , 2x^2 + 2$

$f = \dfrac{x-4}{x-1} \qquad g = x^2 + 3x + 1$ $\quad$ $\dfrac{x^2 + 3x - 3}{x^2 + 3x} , \dfrac{5x^2 - 25x + 29}{x^2 - 2x + 1}$

$f = \{(1,6), (3,7), (5,8)\} \qquad g = \{(0,1), (2,3), (4,5)\}$ $\quad$ $\{(0,6), (2,7), (4,8)\}$; ?

2-10 Hallar: $f \circ g \circ h ; g \circ f \circ h$ Si las Funciones son:

$f = x^5 \qquad g = 2x \qquad h = Sen\,x$ $\quad$ $32\,Sen^5 x ; 2\,Sen^5 x$

2-11. Graficar las siguientes Funciones Polinómicas:

$f_{(x)} = 3$; $f_{(x)} = 3 + 2x$; $f_{(x)} = 3 - 4x + x^2$; $f_{(x)} = x^3 - 3x + 1$

2-12 Indicando si existe Simetría (S), o no existe Simetría (NS) respecto de: X, Y, Origen, respectivamente y hallando Asíntotas Verticales , Horizontales. Graficar las siguientes Funciones Algebraicas:

$y = \dfrac{1}{x-2}$ $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$ NS, NS, NS; NS, NS, NS; NS, S, NS
2, 0; 2, 1; ±2, 1

$y = \dfrac{x}{x^2-4}$ $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ $y^2 = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ NS, NS, NS; NS, NS, NS; S, S, S
±2, 0 1, ∄; ±3, ±1

2-13 Graficar las Funciones Exponenciales: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = e^{-x}$; $y = e^{(x-1)/2}$

2-14 Graficar las Funciones Logarítmicas: $f = Log(x-2)$ $f = Log(4-x^2)$ $f = Log_2 x$

2-15 Demostrar: $10^{3\,Log\,x} = x^3$; $e^{Ln(x^2-1) - Ln(x-1)} = x+1$; $Log_b x = (Log_a x)/(Log_a b)$

2-16 Resolver: $3^{x-2} - 81 = 0$ $2^{\sqrt{x^2-16}} - 8 = 0$ $e^{5x-3} - 9 = 0$ 6 ; ±5 ; 1.04

$Log(5x) - 2 = 0$ $Log^2 x - 4\,Log\,x = -3$ $e^{3Ln\,x} - 8 = 0$ 20; 10, 1000; 2

2-17 Graficar las Funciones Trigonométricas:

$f = 2\,Sen\,3x$ $f = 3\,Sen(x - \pi/6)$ $f = x^2 Sen\,x$ $f = x\,Cos\,x$

$f = Sen(1/x^2)$ $f = Sen\,x + Cos\,x$ $f = 2\,Arcsen\,x$ $f = Sen\,x + Arcsen\,x$

2-18 Demostrar: $Sen(a-b) = Sen\,a\,Cos\,b - Sen\,b\,Cos\,a$ $Cos(-t) = Cos\,t$

$Cos(a-b) = Cos\,a\,Cos\,b + Sen\,a\,Sen\,b$ $Tan(-t) = -Tan\,t$

$Arccos\,x + Arccos\,y = Arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2})$

$Arctan\,x + Arctan\,y = Arctan(\dfrac{x+y}{1-xy})$ $Cos^2 t = \dfrac{1 + Cos\,2t}{2}$

2-19 Resolver: $6\,Cos\,x - 3 = 0$ $7\,Sen\,x - 3\,Cos\,x = 0$ 60° , 23.27°

$2\,Arcsen\,x - 5 = 0$ $9\,Arctan^2 x - 2 = 0$ 0.60 , ±0.51

2-20 Demostrar las siguientes Propiedades de las Funciones Hiperbólicas:

$Sech^2 x = 1 - Tanh^2 x$ $Csch^2 x = Coth^2 x - 1$ $Senh(-x) = -Senh\,x$

$Cosh(x+y) = Cosh\,x\,Cosh\,y + Senh\,x\,Senh\,y$ $Cosh(-x) = Cosh\,x$

$Arccosh\,x = Ln(x + \sqrt{x^2-1})$ $Arctanh\,x = \dfrac{1}{2}\,Ln\,\dfrac{1+x}{1-x}$

2-21 Graficar las siguientes Funciones Especiales:

$f = |x-1|$ $f = |1-x^2|$ $f = |x-1| + |x+1|$ $f = Sen(x + |x|)$

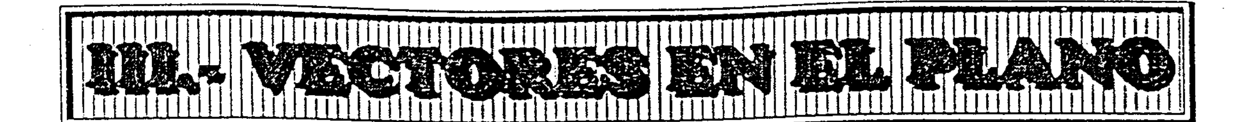
$f = [\![x-1]\!]$ $f = [\![3x]\!]$ $f = x + [\![x]\!]$ $f = [\![x/2\pi]\!]\,Sen\,x$

$f = \{x - 1/2\}$ $f = \{3x\}$ $f = SGN(x-1)$ $f = SGN(x^2-1)$

2-22 De las siguientes Funciones, indicar cuales son Pares (P), cuales Impares (I)

$f = x^5 + x$ $f = x^6 - x^2$ $f = x^2 + Cos\,x$ $f = |x|$ I; P; P; P

$f = x^2 + 1$ $f = 3$ $f = x + Tan\,x$ $f = \{x\}$ P; P; I; P





Los conceptos físicos, que para su determinación requieren de una sola cantidad, se llaman Magnitudes Escalares (Ej. la Temperatura, el Tiempo, etc.). Los conceptos que para su determinación, requieren de mas de una cantidad, se llaman Magnitudes Vectoriales (Ej. la Velocidad, la Fuerza, etc.)

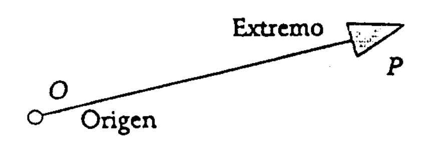
Todas las Propiedades Vectoriales, pueden obtenerse analíticamente, a partir de las siguientes definiciones de Vectores en: V^2 (En dos Dimensiones, en el Plano)

Un Vector en el Plano Coordenado Real, es un Par Ordenado de Números Reales.

La notación usual de un Vector es $\vec{A} = (a_1, a_2)$; Donde a_1, a_2 son el Primer y Segundo Componentes respectivamente del Vector: $\vec{A}$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Geométricamente un Vector se representa como un Segmento orientado:

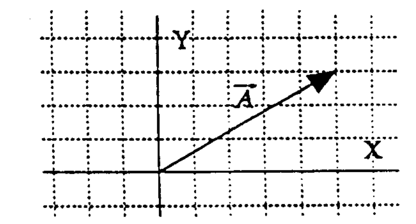


O es el origen, *P* es el Extremo del Vector
La Longitud *OP* representa el MÓDULO
La Inclinación, representa la DIRECCIÓN
La posición de la flecha, indica el SENTIDO
Por tanto un Vector posee, Módulo, Dirección y Sentido.

Para graficar un Vector, sobre un Sistema de Coordenadas, se hace coincidir su Origen con el Origen de Coordenadas.

Su Extremo coincidirá con un Punto de Coordenadas equivalentes a las Componentes del Vector.

Así se establece una relación entre Vector y Punto.

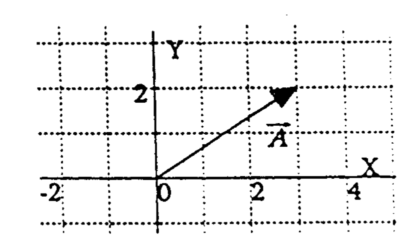


Ej 3-1 Se grafica al Vector: $\vec{A} = (3,2)$

Los Componentes son $a_1 = 3$; $a_2 = 2$

Se coloca el Origen del Vector en el Punto (0,0) y su Extremo en el Punto (3,2)

Así queda expresado geométricamente el Vector.



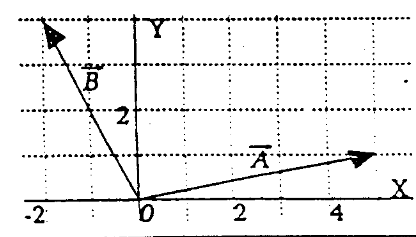
3-1 Representar geométricamente los Vectores $\vec{A} = (5,1)$; $\vec{B} = (-2,4)$

Si: $\vec{A} = (5,1) = (a_1, a_2) \Rightarrow a_1 = 5 ; a_2 = 1$

Se ubica el extremo de $\vec{A}$ en el Punto (4,1)

Si: $\vec{B} = (-2,4) = (b_1, b_2) \Rightarrow b_1 = -2 ; b_2 = 4$

Se ubica el extremo de: $\vec{B}$ en el Punto (-2,4)



MÓDULO DE UN VECTOR

El Módulo de un Vector, (O Longitud de Segmento Orientado), se determina por:



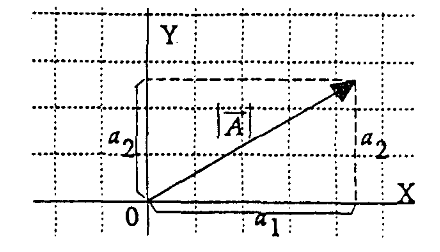
$$\text{Si: } \vec{A} = (a_1, a_2) \Rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La demostración de esta relación es simple. Graficando $\vec{A} = (a_1, a_2)$

Trasladando el segundo Componente: a_2 como en la gráfica.

Así se obtiene un Triángulo rectángulo, donde la longitud del Vector es la hipotenusa, los Componentes: a_1, a_2 son los catetos

Por Pitágoras: $|\vec{A}|^2 = a_1^2 + a_2^2 \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

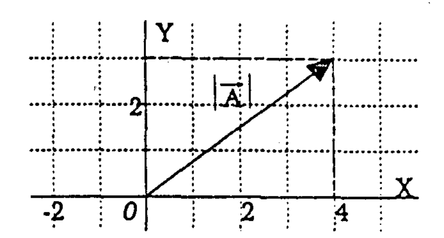


Ej 3-2 Si el Vector es: $\vec{A} = (4,3)$

El Módulo se calcula por la relación:

$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Se toma solamente la Raíz positiva del radical.



III-2 OPERACIONES DE VECTORES

Las Operaciones entre Vectores, se definen de la manera siguiente:

Si: $\vec{A} = (a_1, a_2)$; $\vec{B} = (b_1, b_2) \Rightarrow -\vec{B} = (-b_1, -b_2)$; k es un Escalar (Un Número Real)

SUMA: $\vec{A} + \vec{B} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

DIFERENCIA: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

PRODUCTO POR UN ESCALAR: $k\vec{A} = k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$

Note que en todos los casos, el resultado es también un Vector de: V^2

TEOREMAS

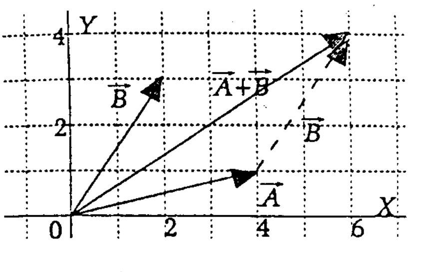
Si: $\vec{A}$, $\vec{B}$ Son Vectores en el Plano; $\vec{O} = (0,0)$; k, r son Escalares. De acuerdo a las anteriores definiciones, se cumplen los siguientes Teoremas:

T3-1)	$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$	Conmutatividad de la Suma
T3-2)	$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$	Asociatividad de la Suma
T3-3)	$\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$	Existencia de Neutro Aditivo
T3-4)	$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$	Existencia de Opuesto, para la Suma
T3-5)	$(kr)\vec{A} = k(r\vec{A})$	Asociatividad, para el Producto por un Esclar
T3-6)	$k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$	Distributividad sobre Suma Vectorial
T3-7)	$(k + r)\vec{A} = k\vec{A} + r\vec{A}$	Distributividad sobre Suma Escalar
T3-8)	$1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$	Existencia de Neutro Escalar Multiplicativo.

La veracidad de estos Teoremas, puede demostrarse usando las definiciones de Operaciones entre Vectores

3-2 Efectuar las siguientes Operaciones, entre los Vectores indicados:

a) $\vec{A} + \vec{B}$; $\vec{A} - \vec{B}$; Si: $\vec{A} = (4,1)$; $\vec{B} = (2,3)$



Aplicando las definiciones de Suma y Diferencia:

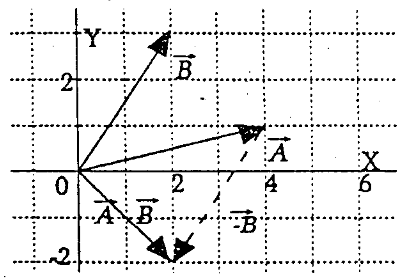
Suma: $\vec{A} + \vec{B} = (4,1) + (2,3) = (4+2, 1+3)$
$= (6,4)$

Diferencia: $\vec{A} - \vec{B} = (4,1) - (2,3) = (4-2, 1-3)$
$= (2,-2)$

Gráficamente el Vector Suma, se obtiene trasladando el Origen de $\vec{B}$ sobre el Extremo de: $\vec{A}$

Gráficamente el Vector Diferencia, se obtiene trasladando el Origen del Vector $-\vec{B}$ sobre el Extremo de: $\vec{A}$

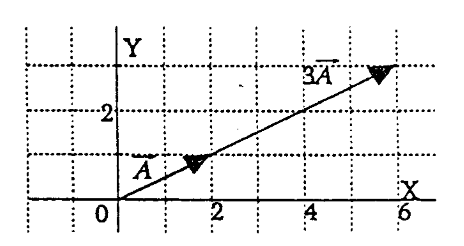
En las gráficas se observa la traslación de Vectores, para las operaciones.



b) $k\vec{A}$; Si: $\vec{A} = (2,1)$; $k = 3$

Producto por un Escalar: $k\vec{A} = 3(2,1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1) = (6,3)$

Gráficamente el Vector Producto por un Escalar, puede obtenerse amplificando: k veces el Vector: $\vec{A}$ (Manteniendo su misma Dirección)

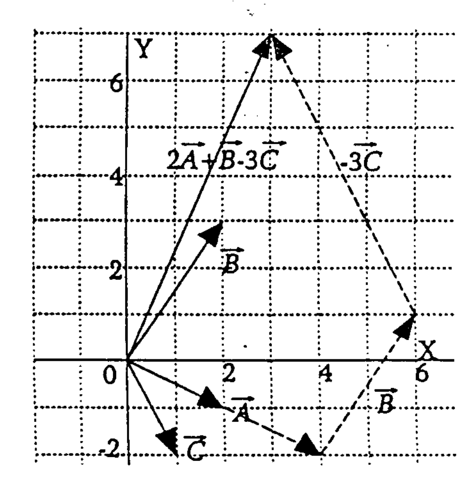


c) $2\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}$; $\vec{A} = (2,-1)$; $\vec{B} = (2,3)$; $\vec{C} = (1,-2)$

Aplicando las respectivas definiciones:

$2\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C} = 2(2,-1) + (2,3) - 3(1,-2)$
$= (4,-2) + (2,3) - (3,-6)$
$= (4+2-3, -2+3+6)$
$= (3,7)$

La gráfica del resultado, se obtiene como la resultante del traslado de Vectores, de sus orígenes al Extremo del otro Vector.



3-3 Demostrar T3-1) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$; T3-2) $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

Si: $\vec{A} = (a_1, a_2)$; $\vec{B} = (b_1, b_2)$; $\vec{0} = (0,0)$

T3-1: $\vec{A} + \vec{B} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2)$
$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2)$
$= \vec{B} + \vec{A}$

T3-2: $\vec{A} + \vec{0} = (a_1, a_2) + (0,0)$
$= (a_1 + 0, a_2 + 0)$
$= (a_1, a_2)$
$= \vec{A}$

En la 1era Demostración, se aplica la Propiedad Conmutativa de la Suma de Números Reales (Por el Axioma A1), de esa manera se demuestra la Conmutatividad de la Suma de Vectores.

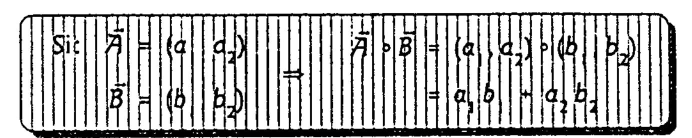
En la 2da Demostración, se aplica la Propiedad de la Existencia del Neutro aditivo (Cero: 0) de los Números Reales (Axioma A3). Todas las aplicaciones de los Axiomas de los Números Reales, son posibles, debido a que los Componentes de los Vectores son Números Reales.

ESPACIOS VECTORIALES

Un Espacio Vectorial, es un Conjunto de Elementos llamados Vectores, junto a otro Conjunto de Elementos, llamados Escalares, con dos Operaciones: La Suma Vectorial y la Multiplicación por un Escalar; tales que para todo Vector $\vec{A}$, $\vec{B}$ y todo Escalar k; Los Vectores: $\vec{A} + \vec{B}$; $k\vec{A}$ satisfacen los ocho Teoremas de Operaciones con Vectores, citados anteriormente en III-4

III-3 PRODUCTO ESCALAR

El Producto Escalar (O Producto Punto, o Producto Interior); es otra Operación entre Vectores, cuyo resultado es un Escalar, se define y denota de la siguiente manera:



$$\text{Si: } \vec{A} = (a_1, a_2) \quad \vec{B} = (b_1, b_2) \Rightarrow \vec{A} \circ \vec{B} = (a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Las principales Propiedades del Producto Escalar son:

T3-9 $\vec{A} \circ \vec{B} = \vec{B} \circ \vec{A}$

T3-10 $(k\vec{A}) \circ \vec{B} = k(\vec{A} \circ \vec{B})$

T3-11 $\vec{A} \circ (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \circ \vec{B} + \vec{A} \circ \vec{C}$

T3-12 $\vec{A} \circ \vec{A} = |\vec{A}|^2$; Si: $\vec{A} \circ \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$

T3-13 $\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$; θ Ángulo entre $\vec{A}$, $\vec{B}$

T3-14 $\vec{A} \circ \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$; Si: $\vec{A} \neq \vec{0}$; $\vec{B} \neq \vec{0}$

Ej 3-3 Si: $\vec{A} = (3,1)$; $\vec{B} = (2,4)$; se calculará el Producto Escalar:

$\vec{A} \circ \vec{B} = (3,1) \circ (2,4)$ Por definición, se multiplican los Componentes correspondientes entre sí.

$= 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 10$ Sumando se obtiene por resultado a un Escalar.

3-4 Demostrar las siguientes Propiedades del Producto Escalar:

a) T3-9: $\vec{A} \circ \vec{B} = \vec{B} \circ \vec{A}$

Si: $\vec{A} = (a_1, a_2)$; $\vec{B} = (b_1, b_2)$

$$\begin{aligned} \vec{A} \circ \vec{B} &= (a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 \\ &= (b_1, b_2) \circ (a_1, a_2) = \vec{B} \circ \vec{A} \end{aligned}$$

b) T3-12: $\vec{A} \circ \vec{A} = |\vec{A}|^2$

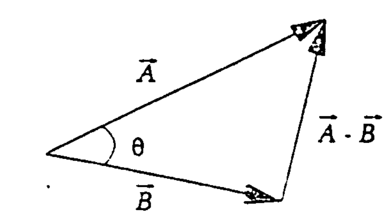
Si: $\vec{A} = (a_1, a_2)$

$$\begin{aligned} \vec{A} \circ \vec{A} &= (a_1, a_2) \circ (a_1, a_2) \\ &= a_1^2 + a_2^2 \\ &= |\vec{A}|^2 \end{aligned}$$

c) T3-13: $\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$

De acuerdo al gráfico adjunto, por el Teorema del Coseno de Trigonometría y por T3-12 antes demostrado.

$$\begin{aligned} |\vec{A} - \vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \\ (\vec{A} - \vec{B}) \circ (\vec{A} - \vec{B}) &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \\ |\vec{A}|^2 - 2\vec{A} \circ \vec{B} + |\vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \\ \Rightarrow -2\vec{A} \circ \vec{B} &= -2|\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \\ \vec{A} \circ \vec{B} &= |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \end{aligned}$$



De acuerdo a esta Propiedad es inmediata la conclusión de la Propiedad: T3-14

III-4 PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

El Vector $\vec{A}$ es Paralelo a $\vec{B}$ Si: $\vec{A} = k\vec{B}$; $\vec{A} \neq 0$; $\vec{B} \neq 0$; $k \neq 0$; Lo anterior significa que los Vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ poseen la misma Dirección.

Ej 3-4 Los Vectores: $\vec{A} = (-6,2)$; $\vec{B} = (3,-1)$ son Paralelos.

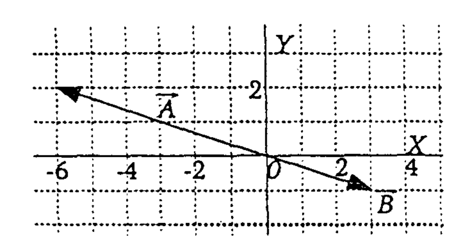
Si: $\vec{A} = (-6,2)$

$= -2(3,-1)$

$= -2\vec{B} \Rightarrow k = -2$

Se llega a la expresión de:

$\vec{A} = k\vec{B}$



Otras maneras de verificar el Paralelismo entre Vectores, consiste en verificar las siguientes igualdades:

$\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|$; $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

La 1^era^ relación proviene de T3-11 del Producto Escalar: $\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,Cos\,\theta$; pero al ser Paralelos los Vectores se cumple que $\theta = 0°$; $Cos\,0° = 1 \Rightarrow \vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|$. La 2^da^ relación proviene del desarrollo por Componentes de la 1^era^.

Ej 3-5 Los Vectores: $\vec{A} = (-2,1)$; $\vec{B} = (4,-2)$ son Paralelos, por:

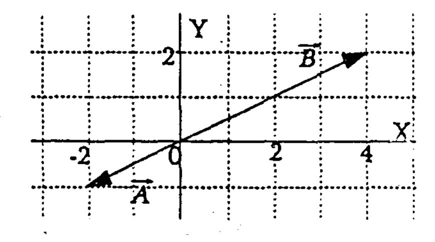
$\vec{A} = (a_1, a_2)$; $\vec{B} = (b_1, b_2)$

Si: $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

$(-2)(-2) - (1)(4) = 0$

$0 = 0$

Se verifica una relación de Paralelismo entre los Vectores.



El Vector: $\vec{A}$ es Perpendicular (U Ortogonal o Normal) al Vector: $\vec{B}$ Si se verifica:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$$

Lo anterior significa que entre los Vectores: $\vec{A}$, $\vec{B}$ existen 90° de ángulo.

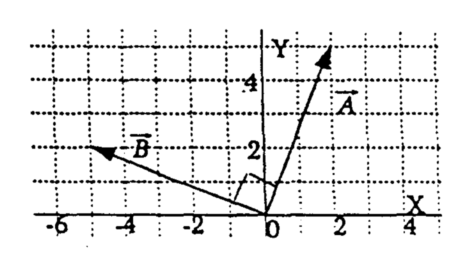
Ej 3-6 Los Vectores: $\vec{A} = (2,5)$; $\vec{B} = (-5,2)$ son Perpendiculares

Si: $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

$|(2,5) + (-5,2)| = |(2,5) - (-5,2)|$

$\sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{7^2 + 3^2}$

$\sqrt{58} = \sqrt{58}$



Lo anterior lleva a una conclusión general, de: $\vec{A} = (a_1, a_2)$ el Vector Perpendicular es: $\vec{A}^{\perp} = (-a_2, a_1)$ (Los Módulos serán iguales). Otro modo de verificar la Perpendicularidad es: $\vec{A} \circ \vec{B} = 0$ (T3-14 del Producto Escalar)

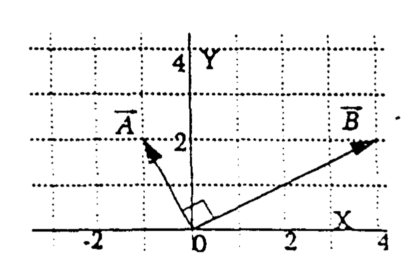
Ej 3-7 Los Vectores: $\vec{A} = (-1,2)$; $\vec{B} = (4,2)$ son Perpendiculares entre sí, verificando:

Si: $\vec{A} \circ \vec{B} = 0$

$\Rightarrow (-1,2) \circ (4,2) = 0$

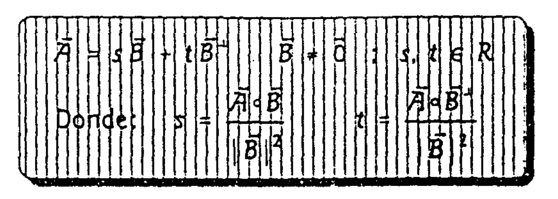
$0 = 0$

Toda vez que dos Vectores determinan un Producto Escalar cero, son perpendiculares.



III-5 PROYECCIÓN ORTOGONAL

Todo Vector $\vec{A}$ puede expresarse en términos de un Vector $\vec{B}$ en la forma:

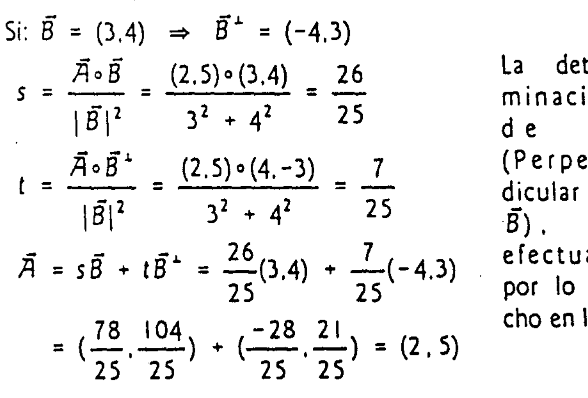


$$\vec{A} = s\vec{B} + t\vec{B}^{\perp} \quad \vec{B} \neq \vec{0} \; ; \; s, t \in R$$

$$\text{Donde:} \quad s = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \qquad t = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}^{\perp}}{|\vec{B}|^2}$$

Es decir que el Vector: $\vec{A}$ se expresa como una Suma del Vector $\vec{B}$ y su Perpendicular, multiplicados ambos por los Escalares s, t

<u>Ej 3-8</u> Si $\vec{A} = (2,5)$; se expresará en términos de $\vec{B} = (3,4)$



Si: $\vec{B} = (3,4) \Rightarrow \vec{B}^{\perp} = (-4,3)$

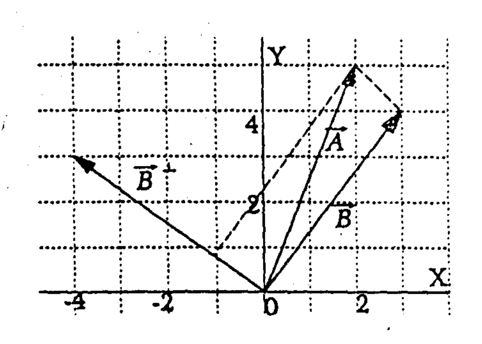
$$s = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \frac{(2,5)\circ(3,4)}{3^2+4^2} = \frac{26}{25}$$

$$t = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}^{\perp}}{|\vec{B}|^2} = \frac{(2,5)\circ(4,-3)}{3^2+4^2} = \frac{7}{25}$$

$$\vec{A} = s\vec{B} + t\vec{B}^{\perp} = \frac{26}{25}(3,4) + \frac{7}{25}(-4,3)$$

$$= \left(\frac{78}{25},\frac{104}{25}\right) + \left(\frac{-28}{25},\frac{21}{25}\right) = (2,5)$$

La determinación de $\vec{B}^{\perp}$ (Perpendicular a $\vec{B}$), se efectuará por lo dicho en III-6



La demostración de las relaciones, se efectúa por Multiplicaciones Escalares:

Si: $\vec{A} = s\vec{B} + t\vec{B}^{\perp}$

$$\vec{A}\circ\vec{B} = (s\vec{B} + t\vec{B}^{\perp})\circ\vec{B}$$
$$= s(\vec{B}\circ\vec{B}) + t(\vec{B}^{\perp}\circ\vec{B})$$
$$= s|\vec{B}|^2 + 0$$
$$\Rightarrow s = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}}{|\vec{B}|^2}$$

Si: $\vec{A} = s\vec{B} + t\vec{B}^{\perp}$

$$\vec{A}\circ\vec{B}^{\perp} = (s\vec{B} + t\vec{B}^{\perp})\circ\vec{B}^{\perp}$$
$$= s(\vec{B}\circ\vec{B}^{\perp}) + t(\vec{B}^{\perp}\circ\vec{B}^{\perp})$$
$$= 0 + t|\vec{B}|^2 \; ; \; |\vec{B}| = |\vec{B}^{\perp}|$$
$$\Rightarrow t = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}^{\perp}}{|\vec{B}|^2}$$

La primera y segunda expresión se multiplican escalarmente en forma respectiva por: $\vec{B}$, $\vec{B}^{\perp}$

La Proyección Ortogonal de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$, (Que se expresa como $Proy_{\vec{B}}\vec{A}$) es el Vector determinado por:

$$Proy_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}}{|\vec{B}|^2}$$

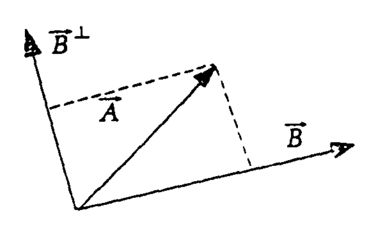
Por tanto todo Vector $\vec{A}$ puede expresarse en términos del Vector $\vec{B}$ en la forma:

$$\vec{A} = Proy_{\vec{B}}\vec{A} + Proy_{\vec{B}^{\perp}}\vec{A} \; ; \; \vec{B} \neq \vec{0}$$

El Componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$ es el Escalar determinado por:

$$Comp_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}}{|\vec{B}|} \Rightarrow Proy_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}Comp_{\vec{B}}\vec{A}$$

Por tanto se cumple la relación: $\vec{A} = s\vec{B} + t\vec{B}^{\perp}$



Puede entonces concluirse que todo Vector puede expresarse como la Combinación Lineal de otro Vector y su correspondiente Vector perpendicular. La Proyección de $\vec{A}$, es un Vector en la dirección de $\vec{B}$

La Componente de $\vec{A}$ es una longitud (Longitud dirigida) que indica la magnitud de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$.

ÁREAS ENTRE VECTORES

El Área *Sp* del Paralelogramo que conforman los Vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ se determina por:



De acuerdo a la gráfica, se tiene:

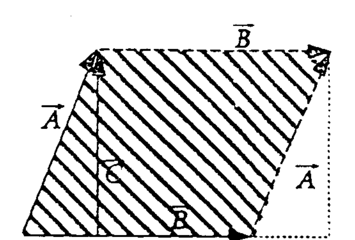
$$|\vec{C}| = |Comp_{\vec{B}^{\perp}} \vec{A}| = \left| \frac{\vec{A} \circ \vec{B}^{\perp}}{|\vec{B}^{\perp}|} \right|$$

$$S_p = |\vec{C}||\vec{B}| = \left| \frac{\vec{A} \circ \vec{B}^{\perp}}{|\vec{B}^{\perp}|} \right| |\vec{B}| = |\vec{A} \circ \vec{B}^{\perp}|$$

$|\vec{C}|$ representa la Altura del Paralelogramo.

El Área es la Altura por la Base:

Note que: $|\vec{B}| = |\vec{B}^{\perp}|$



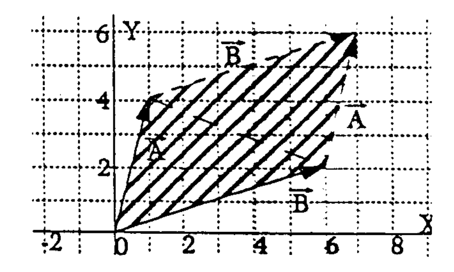
Ej 3-9 Si: $\vec{A} = (1,4)$; $\vec{B} = (6,2)$ se calculan las Áreas del Paralelogramo y Triángulo: *Sp*, *St*

$$\text{Si: } \vec{B} = (6,2) \Rightarrow \vec{B}^{\perp} = (-2,6)$$

$$S_p = |\vec{A} \circ \vec{B}^{\perp}| = |(1,4) \circ (2,-6)| = 22$$

$$S_t = \frac{1}{2} S_p = \frac{1}{2} |\vec{A} \circ \vec{B}^{\perp}| = \frac{1}{2} 22 = 11$$

El Área del Triángulo (*St*) será la mitad del Área del Paralelogramo.



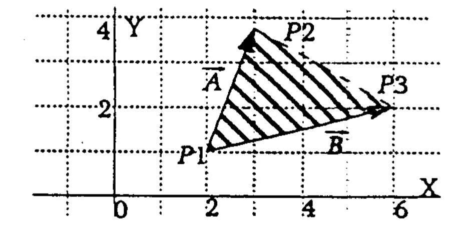
3-5 Hallar el Área del Triángulo entre los Puntos *P1*(2,1); *P2*(3,4); *P3*(6,2)

Determinando dos Vectores del Triángulo:

$$\vec{A} = P2 - P1 = (3,4) - (2,1) = (1,3)$$

$$\vec{B} = P3 - P1 = (6,2) - (2,1) = (4,1)$$

$$S_t = \frac{1}{2} |\vec{A} \circ \vec{B}^{\perp}| = \frac{1}{2} |(1,3) \circ (-1,4)| = 5.5$$



3-6 Demostrar que el Área de un Triángulo, puede calcularse por un Determinante, si está ubicado entre tres Puntos $P1(x_1,y_1)$; $P2(x_2,y_2)$; $P3(x_3,y_3)$

$$S_t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinando dos Vectores del Triángulo:

$$\vec{A} = P2 - P1 = (x_2,y_2) - (x_1,y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\vec{B} = P3 - P1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1) \Rightarrow \vec{B}^{\perp} = (y_1 - y_3, x_3 - x_1)$$

$$S_t = \frac{1}{2} |\vec{A} \circ \vec{B}^{\perp}| = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \circ (y_1 - y_3, x_3 - x_1)|$$

$$= \frac{1}{2} |x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_1|$$

Por el Valor Absoluto también se escribe:

$$S_t = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

A su vez desarrollando por reglas conocidas de Determinantes:

$$S_t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$$

Como los resultados son coincidentes, queda demostrada la Fórmula.

III-6 LA RECTA (FORMA VECTORIAL)

Identificando como Puntos del Plano Cartesiano R^2; A los Vectores de V^2 (Dimensión dos). La Recta en el Plano R^2 es el Conjunto L de Puntos tales que:



$$L = \{P_0 + t\vec{A}\}$$

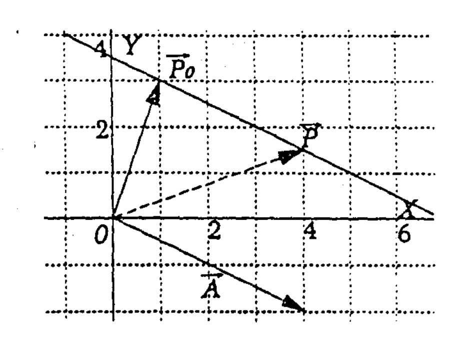
Donde P_0 es un Punto conocido, t es un Escalar, $\vec{A}$ es el Vector de Dirección.

Ej 3-10 La Recta: $L = \{(1,3) + t(4,-2)\}$

El Punto conocido es: $Po(1,3)$. El Vector de Dirección es $\vec{A} = (4,-2)$

La Recta pasa por el Punto Po, siguiendo una Dirección Paralela al Vector $\vec{A}$

Los Puntos de la Recta pueden obtenerse, asignando valores arbitrarios en t (Parámetro de la Recta)



3-7 Hallar las Ecuaciones de Recta, que satisfacen las siguientes condiciones:

L pasa por $Po(1,4)$; Dirección: $\vec{A} = (3,1)$

Reemplazando datos en la Ecuación Vectorial:

$L = \{Po + t\vec{A}\}$

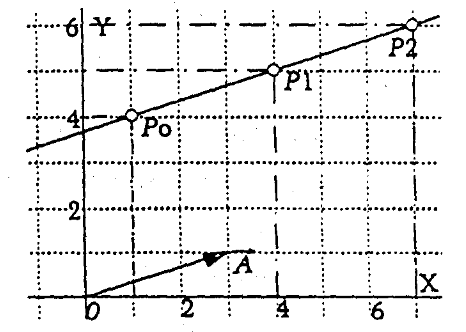
$L = \{(1,4) + t(3,1)\}$

Para obtener otros Puntos de la Recta:

$(x,y) = (1,4) + t(3,1)$

Si: $t = 1 \Rightarrow \quad (x,y) = (4,5) = P1$

Si: $t = 2 \Rightarrow \quad (x,y) = (7,6) = P2$



b) L pasa por los Puntos: $P1(1,3)$; $P2(4,2)$

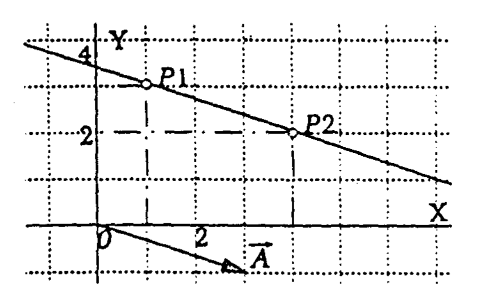
Obteniendo la Dirección de la Recta:

$\vec{A} = P2 - P1 = (4,2) - (1,3) = (3,-1)$

Tomando a $P1$ como Punto conocido: $P1 = Po$

$L = \{Po + t\vec{A}\} \quad \Rightarrow \quad L = \{(1,3) + t(3,-1)\}$

Note que se han identificado los Puntos como Vectores.



FORMA PARAMÉTRICA Y GENERAL DE LA RECTA EN EL PLANO

A partir de la Forma Vectorial de la Recta:

$$L = \{P_0 + t\vec{A}\}$$

$$(x,y) = (x_0,y_0) + t(a_1,a_2)$$

$$= (x_0,y_0) + (ta_1,ta_2)$$

$$= (x_0 + ta_1, y_0 + ta_2)$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + ta_1$$

$$y = y_0 + ta_2$$

Reemplazando por sus componentes.

Así se logra la Ecuación Paramétrica de la Recta

A partir de la Ecuación Paramétrica de la Recta.

$$x = x_0 + ta_1$$

$$y = y_0 + ta_2$$

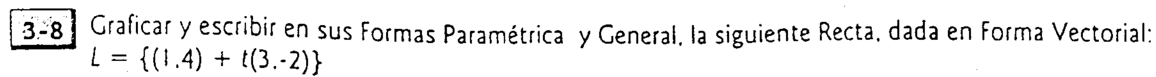
$$\Rightarrow t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

$$\Rightarrow -a_2x + a_1y + a_2x_0 - a_1y_0 = 0$$

$$(-a_2)x + (a_1)y + (a_2x_0 - a_1y_0) = 0$$

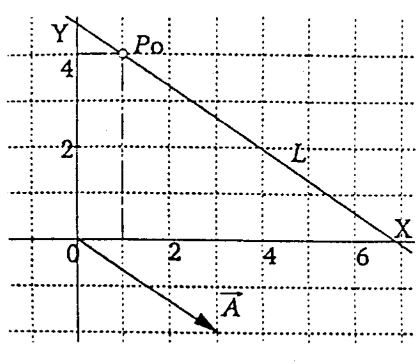
$$\Rightarrow Ax + By + C = 0$$

Se llega a la Ecuación general de la Recta.



3-8 Graficar y escribir en sus Formas Paramétrica y General, la siguiente Recta, dada en Forma Vectorial: $L = \{(1,4) + t(3,-2)\}$

Llevando previamente a la Forma Paramétrica, luego a la General:



$L = (1,4) + t(3,-2)$ — Recta en su Forma Vectorial

$(x,y) = (1,4) + t(3,-2)$

$= (1 + 3t, 4 - 2t)$ — Desarrollando y efectuando operaciones.

$\Rightarrow x = 1 + 3t \; ; \; y = 4 - 2t$ — Forma Paramétrica

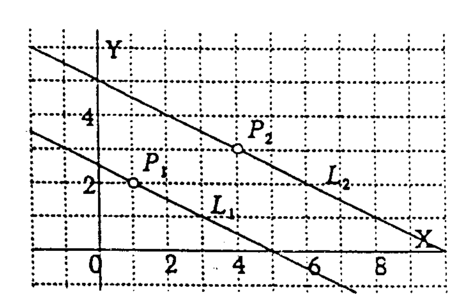
$\Rightarrow t = \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-4}{-2}$ — Despejando: t de las Ecuaciones anteriores

$\Rightarrow 2x + 3y - 14 = 0$ — Forma general.

PARALELISMO DE RECTAS

Dos Rectas: $L_1 = \{P_1 + t\vec{A}\}$; $L_2 = \{P_2 + t\vec{B}\}$ son Paralelas, si sus Vectores de Dirección son Paralelos entre sí. $(\vec{A} = k\vec{B})$

Ej 3-11 Las Rectas: $L_1 = \{(1,2) + t(4,-2)\}$
$L_2 = \{(3,3) + t(-2,1)\}$



Son Paralelas entre sí, ya que sus Vectores de Dirección son Paralelos entre sí.

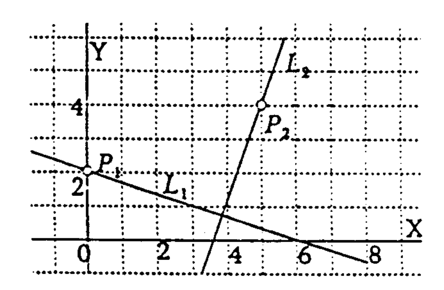
$\vec{A} = k\vec{B}$

$(4,-2) = k(-2,1) \;\Rightarrow\; k = -2$

PERPENDICULARIDAD DE RECTAS

Dos Rectas: $L_1 = \{P_1 + t\vec{A}\}$; $L_2 = \{P_2 + t\vec{B}\}$ son Perpendiculares, si sus Vectores de Dirección son Perpendiculares entre sí. $(\vec{A} \circ \vec{B} = 0)$

Ej 3-12 Las Rectas: $L_1 = \{(0,2) + t(-3,1)\}$
$L_2 = \{(2,5) + t(1,3)\}$



Son Perpendiculares entre sí, ya que sus Vectores de Dirección son Perpendiculares entre sí.

$\vec{A} \circ \vec{B} = (-3,1) \circ (1,3)$

$= -3 + 3 = 0$

3-9 Hallar las Ecuaciones de las Rectas Paralela y Perpendicular a la Recta: $L = \{(5,2) + t(2,1)\}$ que pasen por el Punto: $P_1(3,3)$

Si: $L = \{P_0 + t\vec{A}\} = \{(7,3) + t(2,1)\}$

La Recta Paralela pasará por el Punto dado P_1 con la misma Dirección de L dada.

Si: $\vec{A} = (2,1) \;\Rightarrow\; \vec{A}^{\prime} = (2,1)$

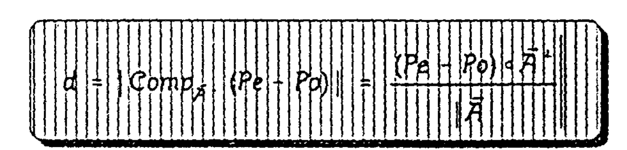
$L_1 = \{(3,3) + t(2,1)\}$

La Recta Perpendicular, pasará por el mismo Punto P_1 con una Dirección Perpendicular a L.

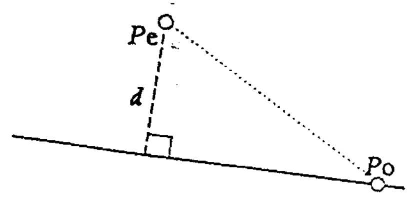
Si: $\vec{A} = (2,1) \;\Rightarrow\; \vec{A}^{\perp} = (-1,2) \;\Rightarrow\; L_2 = \{(3,3) + t(-1,2)\}$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La Distancia del Punto Pe a la Recta, seguirá una trayectoria perpendicular a $L = \{Po + t\vec{A}\}$ por tanto se calculará como:



$$d = \left| Comp_{\vec{A}^\perp} (Pe - Po) \right| = \left| \frac{(Pe - Po) \circ \vec{A}^\perp}{|\vec{A}|} \right|$$

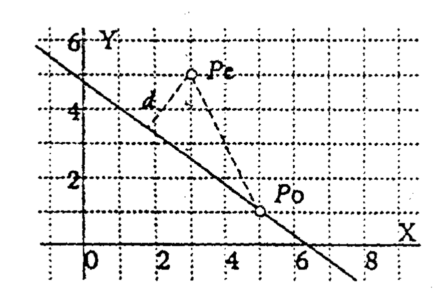


Ej 3-13 Calculando la distancia entre el Punto Pe y la Recta L

$Pe(3,5)$; $L = \{(5,1) + t(4,-3)\}$

Si: $\vec{A} = (4,-3) \Rightarrow \vec{A}^\perp = (3,4)$; $Po(5,1)$

$$d = \left| \frac{(Pe - Po) \circ \vec{A}^\perp}{|\vec{A}|} \right| = \left| \frac{[(3,5) - (5,1)] \circ (3,4)}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| = 2$$



La expresión de Distancia de Punto a Recta, es posible desarrollarla, hasta llegar a una Forma general.

$$d = \left| \frac{(Pe - Po) \circ \vec{A}^\perp}{|\vec{A}|} \right| = \left| \frac{[(x_e, y_e) - (x_o, y_o)] \circ (-a_2, a_1)}{|(-a_2, a_1)|} \right|$$

$$= \left| \frac{-a_2 x_e + a_1 y_e + a_2 x_o - a_1 y_o}{\sqrt{(-a_2)^2 + a_1^2}} \right| = \left| \frac{A x_e + B y_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

En la Recta, se desarrollan los Vectores por sus Componentes. $L = \{Po + t\vec{A}\}$:

$Po(x_o, y_o)$; $Pe(x_e, y_e)$; $\vec{A} = (a_1, a_2)$

$\vec{A}^\perp = (-a_2, a_1)$ Reemplazando en la Distancia.

Desarrollando las Operaciones Vectoriales. La Forma general de una Recta es: $Ax + By + C = 0$

(Ver P-3-8) Si: $A = -a_2$; $B = a_1$; $C = a_2 x_o - a_1 y_o$

Así se logra la Forma general de la Distancia de Punto a Recta. (En la Fórmula tome en cuenta la diferencia entre: A con $\vec{A}$)

ÁNGULO ENTRE RECTAS

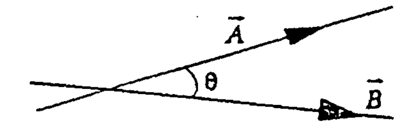
El ángulo entre Rectas en su Punto de intersección, es el ángulo entre los Vectores de dirección de las Rectas

El ángulo puede determinarse a partir de T3-13, del Producto Escalar (III-8)

Si: $\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$

$$\Rightarrow \theta = Arccos \frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}$$

Donde θ es el ángulo entre los Vectores.



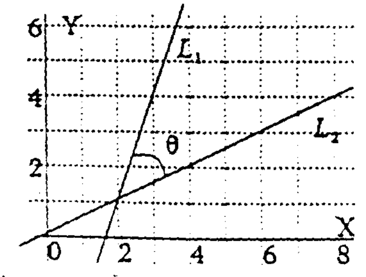
Ej 3-14 Se calcula el ángulo (θ) entre las Rectas $L_1 = \{(3,4) + t(1,3)\}$; $L_2 = \{(4,2) + t(2,1)\}$

Operando con los Vectores de Dirección:

$L_1 = \{(3,4) + t(1,3)\} \Rightarrow \vec{A} = (1,3)$

$L_2 = \{(4,2) + t(2,1)\} \Rightarrow \vec{B} = (2,1)$

Luego el ángulo entre Rectas es $\theta = Arccos \dfrac{\vec{A} \circ \vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|} = Arccos \dfrac{5}{\sqrt{50}} = 45°$



Si se trata de hallar ángulos entre una Recta y los Ejes Coordenados, se toma como dirección del Eje X al Vector (1,0); del Y a (0,1)

III.- PROBLEMAS PROPUESTOS

3-1 Graficar y hallar los Módulos de los Vectores: (8,6) ; (3,0) ; (-a,a) — $10 ; 3 ; 2\sqrt{a}$

3-2 Si: $\vec{A} = (x,4) \Rightarrow |\vec{A}| = 5$; $\vec{B} = (y^2,y) \Rightarrow |\vec{B}| = \sqrt{2}$ Hallar: x, y — $\pm 3 ; \pm 1$

3-3 Efectuar y graficar: $\vec{A}+\vec{B}$; $\vec{A}-\vec{B}$; $2\vec{A}+3\vec{B}$; Si: $\vec{A} = (1,3)$; $\vec{B} = (2,1)$ — (3,4); (-1,2); (8,9)

3-4 $\vec{A} = (3,-1)$; $\vec{B} = (5,1)$; $\vec{C} = (-1,2)$; efectuar: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$; $5\vec{A}+2\vec{B}-3\vec{C}$ — (7,2); (28,-9)

3-5 Demostrar: $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$; $\vec{A}+(-\vec{A}) = \vec{0}$; $k(\vec{A}+\vec{B}) = k\vec{A}+k\vec{B}$; $(k+r)\vec{A} = k\vec{A}+r\vec{A}$

3-6 Demostrar: $(k\vec{A})\circ\vec{B} = \vec{A}\circ(k\vec{B})$; $\vec{A}\circ(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\circ\vec{B}+\vec{A}\circ\vec{C}$

3-7 Hallar: $\vec{A}\circ\vec{B}$ Si: $\vec{A} = (2,3)$; $\vec{B} = (4,1)$ $\quad$ $\vec{A} = (2,-1)$; $\vec{B} = (3,-2)$
$= (3,-1)$ $\quad$ $= (2,6)$ $\quad$ $= (a_1,a_2)$ $\quad$ $= (-a_2,a_1)$ — 11; 8; 0; 0

3-8 Hallar el ángulo entre los siguientes pares de Vectores:
(4,3); (-2,5) $\quad$ (1,0); (1,1) $\quad$ (2,3); (4,6) — 74.91°; 45°; 0°

3-9 Si: $\vec{A} = (a_1,a_2)$; $\vec{B} = (b_1,b_2)$ Demostrar que: $\vec{A}$ es Paralelo a $\vec{B}$ si se cumple: $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

3-10 Determinar si existe Paralelismo (∥), Perpendicularidad (⊥) o ninguna de estas características (?), entre los siguientes pares de Vectores:
(2,-1); (-6,3) $\quad$ (-4,6); (3,2) $\quad$ (3,-1); (3,9) — ∥ ; ⊥ ; ⊥
(3,0); (-3,0) $\quad$ (1,4); (-1,4) $\quad$ (2,4); (0,0) — ∥ ; ? ; ?

3-11 Hallar: x para que sean Paralelos, luego Perpendiculares los Vectores:
$\vec{A} = (x,3)$; $\vec{B} = (4,12)$; $\vec{A} = (x,1)$; $\vec{B} = (4,x)$ — 1, -9 ; ±2, 0

3-12 A los Vectores: (3,5); (3,-2); (1,1); determinar un Vector Perpendicular — (-5,3); (2,3); (-1,1)

3-13 Efectuar la Proyección Ortogonal de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ Si:
$\vec{A} = (10,5)$ $\vec{B} = (1,2)$; $\vec{A} = (3,1)$ $\vec{B} = (4,0)$ — 4(1,2) - 3(-2,1) ; [3(4,0) + (0,4)]/4

3-14 Hallar Áreas del Paralelogramo y Triángulo entre los pares de Vectores:
(1,3); (5,2) $\quad$ (3,-2); (2,4) $\quad$ (0,2); (3,0) — 13, 6.5 ; 16, 8 ; 6, 3

3-15 Hallar el Área del Triangulo, que se encuentra entre los tríos de Puntos:
(1,1); (3,5); (6,2) $\quad$ (0,2), (3,4); (5,0) — 9 ; 8
(4,-1); (6,3); (2,4) $\quad$ (2,1); (1,6); (7,4) — 9 ; 14

3-16 Hallar el Área del Polígono entre los Puntos: (Polígono no regular)
(0,0); (-2,4); (1,5); (7,3); (2,0) $\quad$ (1,1); (-2,3); (2,5); (6,2); (5,0) — 26 ; 21

3-17 Demostrar:
$|\vec{A}| = |\vec{A}^{\perp}|$ $\quad$ $|\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2 \Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$
$(\vec{A}^{\perp})^{\perp} = -\vec{A}$ $\quad$ $|\vec{A}| = 1$; $|\vec{B}| = 1 \Rightarrow (\vec{A}+\vec{B})\perp(\vec{A}-\vec{B})$

3-18 Demostrar:
$|\vec{A}+\vec{B}| \le |\vec{A}|+|\vec{B}|$ $\quad$ $|\vec{A}-\vec{B}| \ge |\vec{A}|-|\vec{B}|$ $\quad$ $|k\vec{A}| = k|\vec{A}|$
$|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}| \le |\vec{A}|+|\vec{B}|+|\vec{C}|$ $\quad$ $\vec{A}\circ\vec{A} = |\vec{A}|^2$ $\quad$ $\vec{A}\circ\vec{0} = 0$

3-19 Hallar las Ecuaciones de Recta y graficarlas si cumplen con:

L pasa por Po(4,3) Dirección: $\vec{A} = (2,3)$	$\{(4,3) + t(2,3)\}$
L pasa por Po(0,0) Paralela a: $\vec{A} = (3,2)$	$[(0,0) + t(3,2)\}$
L pasa por P1(1,2); P2(5,4)	$\{(1,2) + t(4,2)\}$
L pasa por P1(2,3); P2(5,1)	$\{(2,3) + t(3,-2)\}$

3-20 Escribir en Forma general, las anteriores Rectas

$3x - 2y - 6 = 0$; $2x - 3y = 0$; $2x - 4y + 6 = 0$; $2x + 3y - 13 = 0$

3-21 Determinar si es Verdadero (V) o Falso (F) que los Puntos: (1,4); (2,5); (0,7); (1,10) pertenecen a la Recta: $L = \{(2,1) + t(-1,3)\}$ — V; F; V; F

3-22 Hallar las Rectas Paralela y Perpendicular a: L dada, que pasan por P dado.

$\{(1,3) + t(2,4)\}$; $P(6,5)$	$\{(6,5) + t(2,4)\}$; $\{(6,5) + t(-4,2)\}$
$\{(2,4) + t(1,-2)\}$; $P(5,4)$	$\{(5,4) + t(1,-2)\}$; $\{(5,4) + t(2,1)\}$
$\{(0,2) + t(1,0)\}$; $P(3,5)$	$\{(3,5) + t(1,0)$; $\{(3,5) + t(0,1)\}$

3-23 Hallar la Distancia entre la Recta: L y el Punto externo: Pe

$\{(2,3) + t(6,8\}$; $Pe(7,2)$	$\{(1,2) + t(4,3)\}$; $Pe(2,7)$	4.6 ; 2.2
$\{(3,2) + t(4,-3)\}$; $Pe(4,6)$	$\{(2,2) + t(1,2)\}$; $Pe(4,6)$	3.8 ; 0

3-24 Cual es el Punto P de la Recta L, que está mas cerca del Punto Pe dado:

$L = \{(1,3) + t(4,3)\}$; $Pe(8,2)$; $L = \{(1,2) + t(3,1)\}$; $Pe(4,6)$ — (5,6) ; (49/10,33/10)

3-25 Hallar el ángulo entre las Rectas:

$L1 = \{(5,2) + t(2,1)\}$; $L2 = \{(5,7) + t(1,3)\}$	44.80°
$L1 = \{(2,5) + t(3,-2)\}$; $L2 = \{(4,3) + t(2,3)\}$	90°
$L1 = \{(3,4) + t(4,3)\}$; $L2 = \{(2,5) + t(2,0)\}$	36.87°

3-26 Hallar el Cuarto Vértice del Cuadrado ubicado entre los Puntos:

a) (4,1); (3,6); (1,3) b) (5,3); (1,1); (4,0) — (6,4) : (2,4)

3-27 Hallar los dos Vértices faltantes a los cuadrados, que tienen por Vértices opuestos a los puntos:

a) (1,2); (5,4) b) (2,5); (5,0) — (2,5), (4,1) : (1,1), (6,4)

3-28 Si: $x\vec{A} + y\vec{B} = \bar{0}$; donde: $\vec{A} \neq \bar{0}$; $\vec{B} \neq 0$; $\vec{A}$ No es Paralelo a $\vec{B}$; Demostrar que la igualdad se verifica cuando: $x = y = 0$

3-29 Demostrar: $\vec{A} \neq \bar{0}$; $\vec{B} \neq \bar{0}$; $\vec{A}$ No es paralela a $\vec{B}$ Si:

$x_1\vec{A} + y_1\vec{B} = x_2\vec{A} + y_2\vec{B} \Rightarrow x_1 = x_2 ; y_1 = y_2$

3-30 Demostrar que las Diagonales de un Paralelogramo se intersectan en sus Puntos medios.

3-31 Demostrar que la Recta que une los Puntos medios de los lados de un Triángulo es Paralela al Tercer lado y posee la mitad de su Longitud.

3-32 Demostrar que las Medianas de un Triángulo, se cortan en un punto (Llamado Baricentro); ubicado a un tercio de un lado y a dos tercios del Vértice opuesto.

3-33 Demostrar que la Diagonal de un Paralelogramo, es dividida en tres partes iguales por dos Rectas, que partiendo de un Vértice lateral, van a los Puntos medios del lado opuesto.

3-34 Demostrar que la Mediana de un Triángulo Isósceles, que va al lado distinto, es perpendicular a ese lado

3-35 Demostrar que todo Triángulo inscrito en una Semicircunferencia es un Triángulo Rectángulo.

3-36 Demostrar que las Diagonales de un Rombo se intersectan en sus Puntos Medios.



IV.- GEOMETRÍA ANALÍTICA

El estudio de la GEOMETRÍA ANALÍTICA, es el estudio de la Geometría mediante un Sistema de Coordenadas, que lleva asociada un Álgebra. Los problemas básicos de la Geometría son:

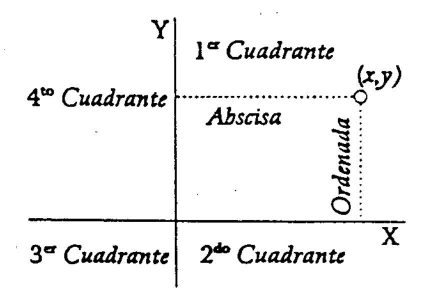
I.- Dada una Ecuación Matemática, hallar su Lugar Geométrico
II.- Dado un Lugar Geométrico, hallar su Ecuación Matemática.

Se entiende por Lugar Geométrico o gráfica de una Ecuación, al conjunto de puntos que satisfacen la Ecuación. En este Texto se estudia a la Geometría Analítica del Plano.



IV-1 SISTEMA DE COORDENADAS

Un Sistema de Coordenadas Cartesianas en el Plano es un Conjunto de dos Rectas Reales perpendicularmente dispuestas, que dividen al Plano en cuatro cuadrantes, donde un punto se asocia al Par ordenado (x,y)



La Recta Real en modo horizontal X'OX es el Eje de abscisas o Eje X. La Recta Real Vertical Y'OY es el Eje de ordenadas o Eje Y

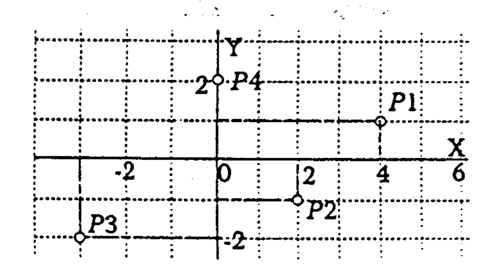
La distancia de un punto *P* al Eje de ordenadas se llama *Abscisa x*; La distancia al Eje de abscisas se llama *Ordenada y*

Para indicar un punto, se indica la *Abscisa*, luego la *Ordenada*: (x,y)

<u>Ej 4-1</u> Se grafican los puntos: $P1(4,1)$; $P2(2,-1)$; $P3(-3,-2)$; $P4(0,2)$

De acuerdo a las anteriores convenciones, se ubican los puntos en el Sistema de Coordenadas en el Plano.

Se elige una adecuada escala en los Ejes Coordenados.



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre los puntos: $P1(x_1,y_1)$; $P2(x_2,y_2)$ se determina por la Fórmula:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Verificando la fórmula, si: $A = P1(x_1,y_1)$; $B = P2(x_2,y_2)$

Las longitudes: $\overline{AC}$; $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ son:

$$\overline{AC} = x_2 - x_1 \ ; \ \overline{BC} = y_2 - y_1$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

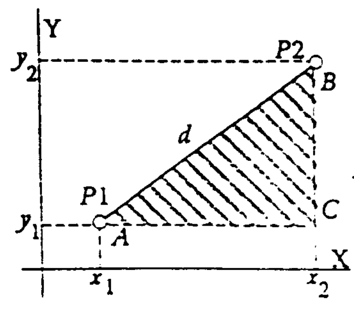
$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\overline{AB} = d$; Donde d es la distancia entre $P1$, $P2$

Por el Teorema de Pitágoras.

De la raíz cuadrada, se tomará la raíz positiva, por tanto la distancia se considera siempre positiva.



Ej 4-2 Se hallan las distancias entre los puntos: a) $P1(2,1)$; $P2(6,4)$ b) $P1(-2,0)$; $P2(0,-1)$

a) Si: $P1(2,1) \Rightarrow x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $P2(6,4) \Rightarrow x_2 = 6$; $y_2 = 4$

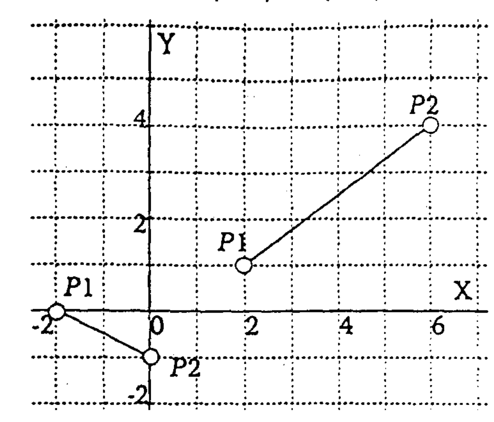
Si: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$

b) Si: $P1(-2,0) \Rightarrow x_1 = -2$; $y_1 = 0$; $P2(0,-1) \Rightarrow x_2 = 0$; $y_2 = -1$

Si: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{[0-(-2)]^2 + [-1-0]^2} = \sqrt{5} = 2.23$



4-1 Demostrar que el Triángulo entre los puntos $A(1,2)$; $B(4,3)$; $C(3,0)$ es Isósceles

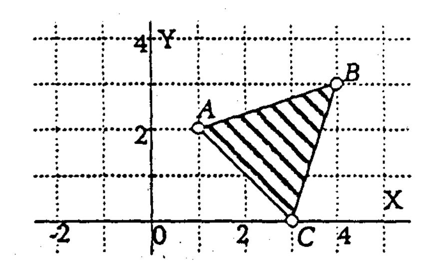
Para la demostración será suficiente con verificar que dos de los lados del Triángulo son de la misma longitud. Tomando a cualquiera de los puntos (A, B o C) como $P1$ o $P2$, la distancia entre puntos será:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$A(1,2)$; $B(4,3)$ $\quad d_{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$

$B(4,3)$; $C(3,0)$ $\quad d_{BC} = \sqrt{(3-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$

$C(3,0)$; $A(1,2)$ $\quad d_{CA} = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$



PUNTO DE DIVISIÓN

El Punto de División $P(x,y)$; que divide al Segmento comprendido entre los puntos: $P1(x_1,y_1)$; $P2(x_2,y_2)$ en determinada relación r, se calcula por:



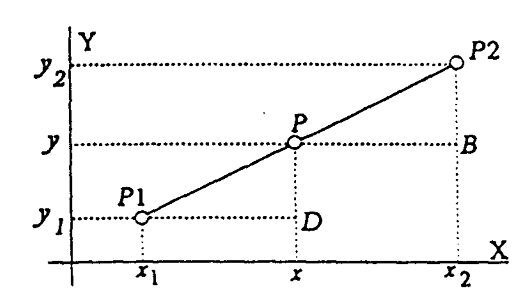
$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

Si la relación de Segmentos es: $r = \dfrac{P_1P}{PP_2}$

Por Triángulos Semejantes se verifica que:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1D}{PB} = \frac{x_1 - x}{x - x_2} \Rightarrow x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}$$

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{DP}{BP_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} \Rightarrow y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

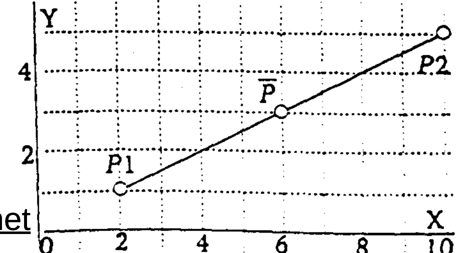


Ej 4-3 En el Segmento entre los puntos $P1(2,1)$; $P2(10,5)$: el punto que lo divide en relación: $r = 1$; se llama Punto medio $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ (Queda situado en la mitad)

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} = \frac{2 + 1 \cdot 10}{1 + 1} = 6 \Rightarrow \overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r} = \frac{1 + 1 \cdot 5}{1 + 1} = 3 \Rightarrow \overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

El Punto medio o Punto con relación $r = 1$ es $\overline{P}(6,3)$



IV-2 LA RECTA

La Recta es el Lugar Geométrico de puntos, que satisfacen a una Ecuación Lineal con dos variables de la forma:



Son características de una Recta:

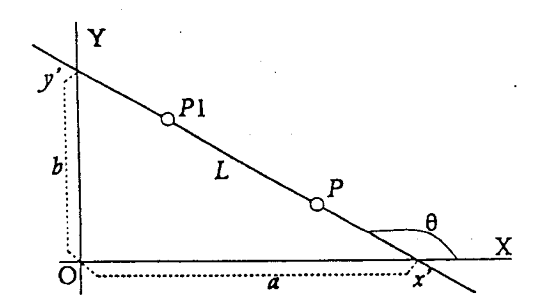
L: Es el Símbolo de la Recta

PENDIENTE: Es la Tangente del ángulo de inclinación de la Recta: $m = Tan\,\theta$

ABSCISA AL ORIGEN: Segmento x'O (a)

ORDENADA AL ORIGEN: Segmento y'O (b)

Los puntos: $P(x,y)$; $P_1(x_1,y_1)$ están sobre la Recta.



ECUACIONES DE LA RECTA

De acuerdo a las características de la Recta, sus principales Ecuaciones son:

EC. GENERAL	$Ax + By + C = 0$	A, B, C son constantes
EC. PUNTO-PENDIENTE	$y - y_1 = m(x - x_1)$	m es la pendiente (x_1,y_1) es punto conocido
EC. PENDIENTE-ORDENADA	$y = mx + b$	m es la pendiente b es la Ordenada al Origen
EC. CARTESIANA O DE DOS PUNTOS	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Dos puntos conocidos son: (x_1,y_1); (x_2,y_2)
EC. REDUCIDA O ABSCISA-ORDENADA	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a, b son la Abscisa y Ordenada al Origen.

Según se aprecia son suficientes dos datos, para especificar a una Recta.

Ej 4-4 La Recta expresada en Forma General: $3x + 4y - 12 = 0$; se la escribe en otras Formas.

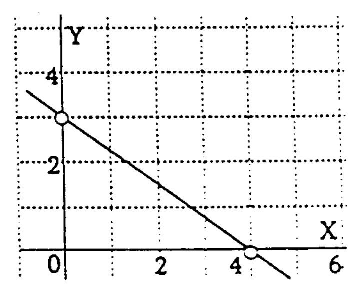
$3x + 4y - 12 = 0$ — Procediendo algebraicamente a partir de la Recta dada en Forma General

$\Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + 3$ — Forma Pendiente-Ordenada, despejando y ($m = -3/4$; $b = 3$)

$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4)$ — Forma Punto-Pendiente $(x_1,y_1) = (4,0)$

Si: $3x + 4y = 12$

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ — Dividiendo todo entre 12, ordenando se logra la Forma Reducida ($a = 4$; $b = 3$)



Si: $m = -\frac{3}{4} \Rightarrow Tan\,\theta = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad \theta = Arctan(-\frac{3}{4})$

$= -36.87° = 143.13°$

Para calcular el ángulo de inclinación, θ de la Recta, respecto al Eje positivo de las Abscisas: X

Considerando que: $m = Tan\,\theta$, despejando θ

El ángulo que se obtiene es: -36.87° , sin embargo su Complemento es: $\theta = 143.13°$

Otras formas de Ecuación de Recta son la ECUACIÓN NORMAL y la VECTORIAL (Ver Pág 98 y Cap. III-10)

4-2 Graficar la Recta de Ecuación: $2x + y - 6 = 0$

La gráfica se obtiene fácilmente a partir de una tabla:

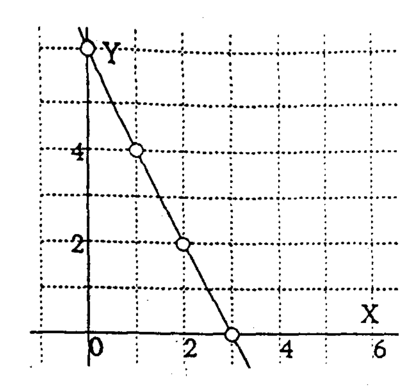
Si: $2x + y - 6 = 0$

Despejando: $y = 6 - 2x$

x	y
0	6
1	4
2	2
3	0

Para conformar la tabla, se asignan valores en: x, para así hallar: y

Luego reuniendo todos los puntos, se obtiene la gráfica requerida. En la práctica se precisan de solo dos puntos, para obtener la gráfica de una Recta.



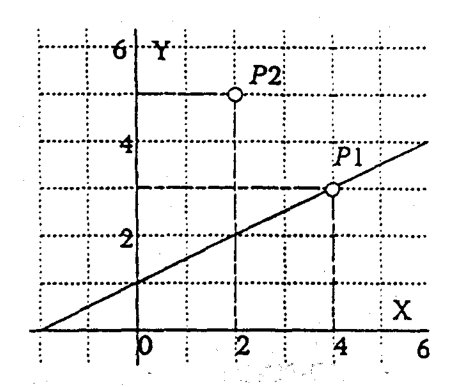
4-3 Determinar si los puntos: $P1(4,3)$; $P2(2,5)$; pertenecen a la Recta: $x - 2y + 2 = 0$

Para saber si un punto pertenece a una Recta, se reemplaza tal punto en la Ecuación, observando si la Ecuación se cumple.

$x - 2y + 2 = 0$ En la Ecuación de Recta:

$4 - 2\cdot 3 + 2 = 0$, $0 = 0$ Reemplazando $P1(4,3)$, se aprecia que la ecuación se cumple.

$2 - 2\cdot 5 + 2 = 0$, $-6 \neq 0$ Luego reemplazando $P2(2,5)$, la Ecuación no se cumple.



Por tanto $P1$ pertenece a la Recta (Ya que satisface su Ecuación); $P2$ no pertenece a la Recta (No satisface su Ecuación)

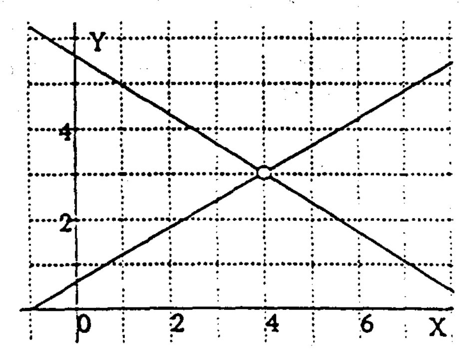
4-4 Hallar la Intersección entre las Rectas: $L1$: $2x + 3y - 17 = 0$; $L2$: $3x - 5y + 3 = 0$

El Lugar Geométrico de las Intersección de dos Rectas es un punto.

Este punto se halla resolviendo el Sistema de dos Ecuaciones, con dos Incógnitas, que conforman las dos Ecuaciones de Recta.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 17 &= 0 \\ 3x - 5y + 3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto el Punto de Intersección es $P(4,3)$; que satisface a ambas Ecuaciones de Recta.



4-5 Hallar los Puntos de Intersección con los Ejes Coordenados de la Recta L: $x + 2y - 6 = 0$

Para hallar las Intersecciones con los Ejes : X; Y se asignan valores de la siguiente manera:

Intersección con el Eje Y, haciendo: $x = 0$

Si: $x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow 0 + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$

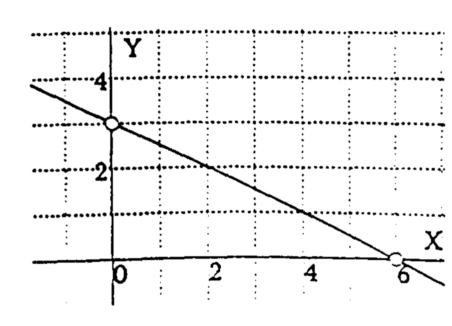
Punto de Intersección: (0,3)

Intersección con el Eje X, haciendo: $y = 0$

Si: $x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow x + 2\cdot 0 - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

Punto de Intersección: (6,0)

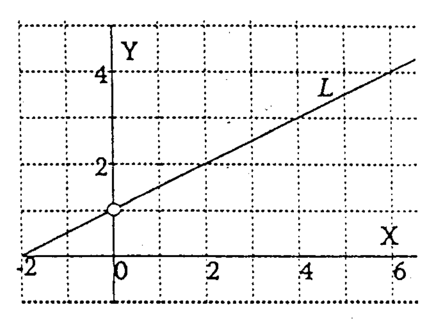
Se aplica el mismo procedimiento indicado en el Cap. II-5, para hallar Intersecciones con Ejes Coordenados.



4-6 Hallar las Ecuaciones Generales de las Rectas, que poseen las siguientes características:

a) Pendiente: $m = 1/2$; Ordenada al Origen: $b = 1$

Usando la Ecuación de Pendiente-Ordenada al Origen (Ya que se dispone de esos datos)



$$y = mx + b$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x - y + 1 = 0$$

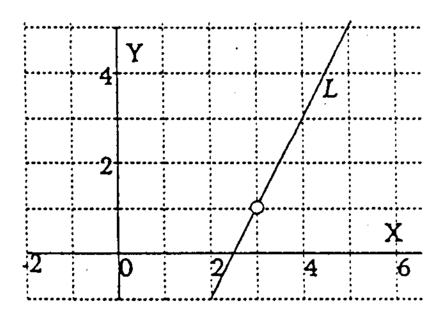
Reemplazando datos: $m = 1/2$; $b = 1$

Así se logra la Recta en su forma de Ecuación General.

La gráfica se obtiene por una tabla.

b) Pendiente: $m = 2$; Pasa por el punto $P1(3,1)$

Usando la Ecuación de Punto-Pendiente



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 3)$$

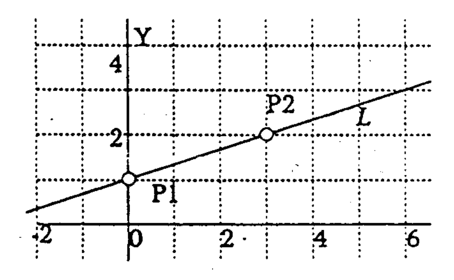
$$2x - y - 5 = 0$$

Reemplazando datos: $m = 2$; $P1(3,1)$

Ordenando se llega a la forma de Ecuación General de Recta.

c) Pasa por dos puntos: $P1(0,1)$; $P2(3,2)$

Usando la Ecuación Cartesiana o de Dos puntos



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 1}{x - 0} = \frac{2 - 1}{3 - 0}$$

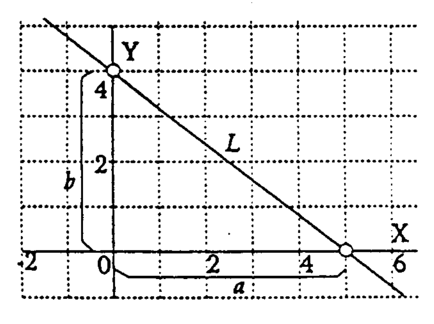
$$x - 3y + 3 = 0$$

Reemplazando datos: $P1(0,1)$; $P2(3,2)$

Simplificando y ordenando se llega a la Ecuación General.

d) Intersecta a la Abscisa y Ordenada en: 5; 4 respectivamente.

Por la Ecuación Reducida o de Abscisa-Ordenada



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$$

$$4x + 5y - 20 = 0$$

Reemplazando datos: $a = 5$; $b = 4$, son los valores de intersección con los Ejes coordenados.

Ecuación General.

e) Su Ordenada al Origen es 3 ; pasa por $P1(4,1)$

Si la Recta posee Ordenada al Origen: $b = 3$ puede suponerse que pasa por el punto: $(0,3)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 1}{x - 4} = \frac{3 - 1}{0 - 4}$$

$$\frac{y - 1}{x - 4} = -\frac{1}{2}$$

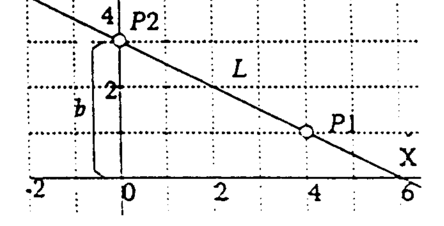
$$x + 2y - 6 = 0$$

Como además se sabe que la Recta pasa por $P1(4,1)$ se puede usar la Ecuación de los Dos puntos:

Reemplazando datos: $P1(4,1)$; $P2(0,3)$

Simplificando y ordenando

Ecuación General.



IV-3 PENDIENTE DE UNA RECTA

La Pendiente de una Recta, simbolizada por m: es la Tangente de su ángulo de inclinación, respecto al Semieje positivo de las Abscisas.

De acuerdo a la gráfica se define: $m = Tan\,\theta$. Por otro lado, partiendo de la Forma General de Ecuación de Recta:

$$Ax + By + C = 0$$

Despejando: y

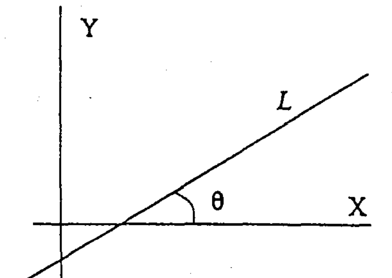
$$\Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$$

Comparando con la Ecuación de la forma de Punto-Pendiente.

$$y = mx + b$$

Entonces es posible conocer la pendiente de la Recta como el coeficiente de: x, cuando y está despejado.

$$\Rightarrow \quad m = -\frac{A}{B} = Tan\,\theta$$



Ej 4-5 Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la Recta: $2x - 3y - 2 = 0$

De: $2x - 3y - 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2}{3}$$

Despejando y en la Ecuación e Recta, así el coeficiente de x, se constituye en la pendiente.

De: $Tan\,\theta = m \quad \Rightarrow \quad \theta = Arctan\, m$

$$\theta = Arctan\,\frac{2}{3} = 33.39°$$

Para calcular el ángulo se emplea la definición de pendiente, luego despejando el ángulo θ.

4-7 Hallar la Ecuación de la Recta, que pasa por el punto: $P1(2,1)$ con un ángulo de inclinación de 60°

Considerando que la pendiente es la Tangente del ángulo de inclinación.

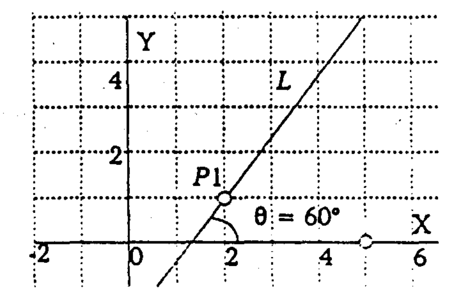
Si: $\theta = 60° \Rightarrow \quad m = Tan\,\theta = Tan\,60° = 1.73$

Utilizando la Ecuación del Punto-Pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 1.73(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad 1.73x - y - 2.46 = 0$$



ÁNGULO ENTRE RECTAS

Si: m_1, m_2 son las pendientes de las Rectas: $L1$, $L2$; El ángulo ϕ, entre ambas Rectas, se calcula por:

$$\phi = Arctan\,\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

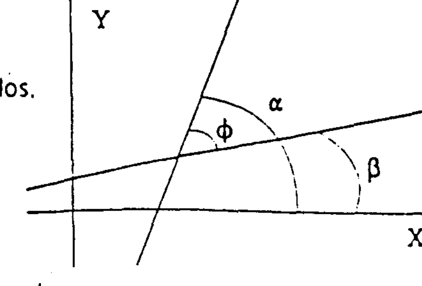
De acuerdo a la gráfica adjunta, se verifican las relaciones:

$$Tan\,\phi = Tan(\alpha - \beta) \quad ; \quad \begin{matrix} Tan\,\alpha = m_1 \\ Tan\,\beta = m_2 \end{matrix}$$

$$Tan\,\phi = \frac{Tan\,\alpha - Tan\,\beta}{1 + Tan\,\alpha\, Tan\,\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = Arctan\,\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Por la fórmula de la tangente de una resta de ángulos, reemplazando y despejando ϕ.



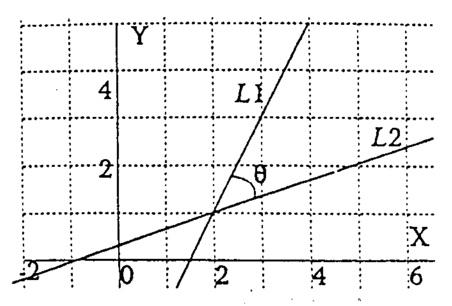
Ej 4-6 Se halla el ángulo entre las Rectas $L1: 2x - y - 3 = 0$; $L2: x - 3y + 1 = 0$

Se determinan las pendientes de las Rectas y se aplican las correspondientes Fórmulas:

$L1: 2x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow m_1 = 2$

$L2: x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3}$

$$\phi = Arctan\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = Arctan\frac{2 - 1/3}{1 + 2 \cdot 1/3} = Arctan\ 1 = 45°$$



IV-4 PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Dos Rectas son Paralelas, cuando sus ángulos de inclinación son iguales entre si, esto significa que también serán iguales sus pendientes entre sí.

Ej 4-7 Las Rectas: $L1$, $L2$ son Paralelas

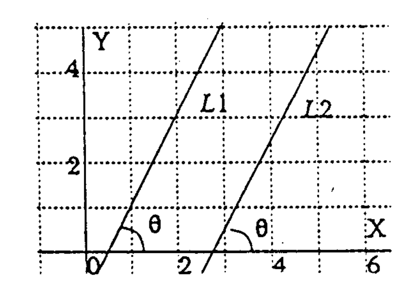
$L1: 2x - y - 1 = 0$; $L2: 4x - 2y - 11 = 0$

Para verificar, se determinan sus pendientes

$L1: 2x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow m_1 = 2$

$L2: 4x - 2y - 7 = 0 \Rightarrow y = 2x - \frac{7}{2} \Rightarrow m_2 = 2$

Como: $m_1 = m_2$, entonces las Rectas son Paralelas.



Dos Rectas son Perpendiculares, cuando sus ángulos de inclinación comprenden entre sí un ángulo de 90°, entonces por el Cap. IV-7 se tiene:

$$Tan\,\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad \text{Si:} \quad \phi = 90° \Rightarrow Tan\,90° = \infty$$

$$\infty = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Por tanto si las Rectas poseen pendientes que cumplan con: $m_1 = -1/m_2$; son Rectas Perpendiculares entre sí.

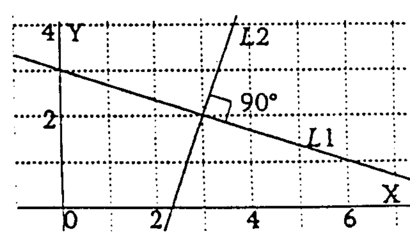
Ej 4-8 Las Rectas $L1$, $L2$ son Perpendiculares $L1: x + 3y - 9 = 0$; $L2: 3x - y - 7 = 0$

Para verificar, se determinan sus pendientes:

$L1: x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 3 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{3}$

$L2: 3x - y - 7 = 0 \Rightarrow y = 3x - 7 \Rightarrow m_2 = 3$

Se cumple con: $m_1 = 1/m_2$ Por tanto son Perpendiculares.



4-8 De la Recta: $x - 2y = 1$ Hallar su Paralela por $P1(2,2)$, su Perpendicular por $P2(6,5)$

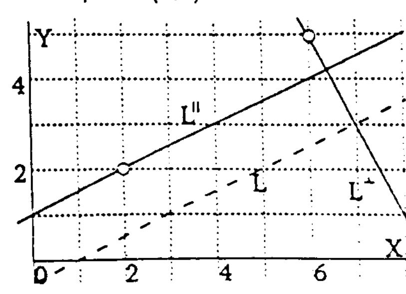
$L: x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

La Recta Paralela con: $m' = m = 1/2$

$y - y_1 = m'(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y = -2$

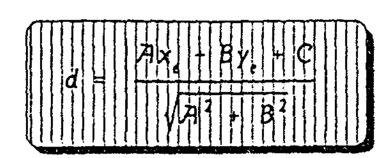
La Recta Perpendicular con $m^{\perp} = -1/m = -2$

$y - y_2 = m^{\perp}(x - x_2) \Rightarrow y - 5 = -2(x - 6) \Rightarrow 2x + y = 17$



DISTANCIA DE PUNTO A RECTA

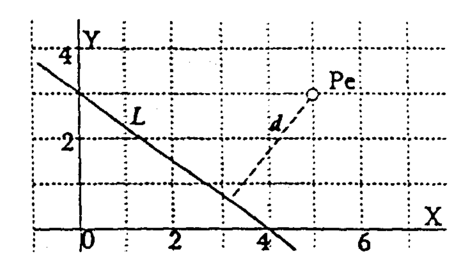
La Distancia entre el punto $Pe(x_e, y_e)$ a la Recta: $Ax + By + C = 0$, se determina por:



$$d = \left|\frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

El Valor Absoluto de la expresión de distancia, hace que se calcule la distancia, solo como positiva. (Ver demostración en III-10). La Mínima distancia de un punto a una Recta sigue una trayectoria perpendicular a la Recta.

Ej 4-9 Se calcula la mínima distancia entre el punto $Pe(5,3)$ a la Recta L: $3x + 4y - 12 = 0$

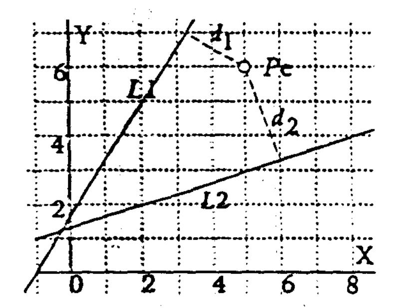


$$d = \left|\frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{3\cdot 5 + 4\cdot 3 - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = 3$$

Se toma: $A = 3$, $B = 4$, $C = -12$, $x_e = 5$, $y_e = 3$

4-9 Entre: $L1$: $3x - 2y + 3 = 0$; $L2$: $x - 3y + 4 = 0$ calcular cuál es la Recta más cercana al punto $Pe(5,6)$

Distancias de $Pe(5,6)$ a $L1$, $L2$



$$d_1 = \left|\frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{3\cdot 5 - 2\cdot 6 + 3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}\right| = 1.66$$

$$d_2 = \left|\frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{1\cdot 5 - 3\cdot 6 + 4}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}\right| = 2.84$$

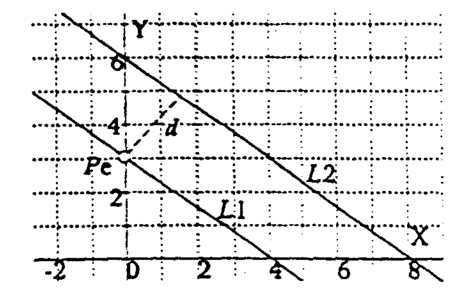
Se calculan las distancias del punto a cada Recta, para luego comparar. Por tanto $L1$ está más cerca de Pe.

4-10 Entre las Rectas Paralelas: $L1$: $3x + 4y - 12 = 0$; $L2$: $6x + 8y - 45 = 0$; Hallar la Mínima distancia.

Para hallar la distancia entre Rectas Paralelas, se toma un punto de una Recta, para hallar su distancia respecto a la otra Recta.

En $L1$: $3x + 4y - 12 = 0$; Si: $x = 0 \Rightarrow y = 3$

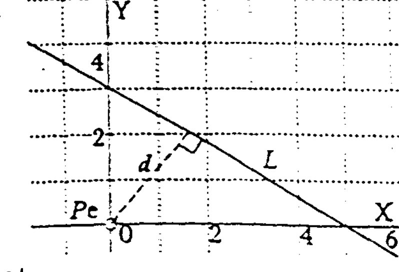
Distancia de $Pe(0,3)$ a $L2$: $6x + 8y - 45 = 0$



$$d = \left|\frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{6\cdot 0 + 8\cdot 3 - 45}{\sqrt{6^2 + 8^2}}\right| = 2.1$$

4-11 Hallar la distancia entre el Origen y la Recta $L1$: $3x + 5y - 15 = 0$

El Origen de Coordenadas es el punto: (0,0)



$$d = \left|\frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{3\cdot 0 + 5\cdot 0 - 15}{\sqrt{3^2 + 5^2}}\right| = 2.6$$

Una Fórmula general para determinar la distancia de una Recta al Origen de Coordenadas es:

$$d = \left|\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

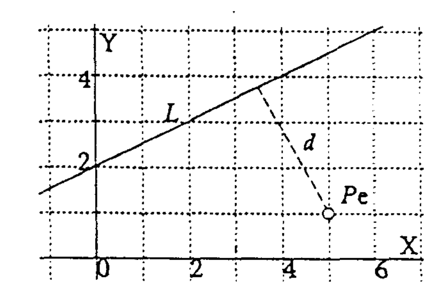
Cuando interesa determinar si un punto está encima o por debajo de la Recta, deberá calcularse:

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El signo a tomarse de la raíz, debe ser contrario al signo de: C

Si la distancia d es positiva, el punto $P_e(x_e,y_e)$ estará encima de la Recta. Si la distancia d es negativa, el punto $Pe(x_e,y_e)$ estará debajo de la Recta.

Ej 4-10 Distancia entre la Recta L: $x - 2y + 4 = 0$ Hasta $Pe(5,1)$



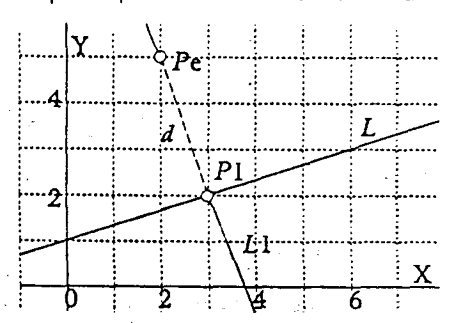
$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1 \cdot 5 + (-2)1 + 4}{-\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = -3.13$$

Como la distancia es negativa, el punto $P_e(5,1)$ está debajo de la Recta L. De la raíz se toma el signo negativa, porque C es positivo.

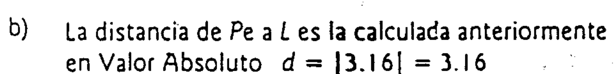
4-12 Con $Pe(2,5)$; L: $x - 3y + 3 = 0$; determinar:
a) P_e está encima o debajo L
b) La distancia de P_e a L
c) El punto P_1 de L que determina la distancia d

a) La ubicación de P_e respecto a L

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 3}{-\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = 3.16$$



La distancia es positiva, por tanto el punto $Pe(2,5)$ está encima de la Recta: L



b) La distancia de Pe a L es la calculada anteriormente en Valor Absoluto $d = |3.16| = 3.16$

c) La distancia antes calculada posee una trayectoria perpendicular a L; entonces determinando una Recta perpendicular a: L (Ver IV-8); que pase por $Pe(2,5)$

Si: $x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3} \Rightarrow m^{\perp} = -\frac{1}{m} = -3$

Si: $y - y_e = m^{\perp}(x - x_e) \Rightarrow y - 5 = -3(x - 2) \Rightarrow L1$: $3x + y - 11 = 0$

Despejando en la Recta: L, se obtiene su pendiente y su pendiente perpendicular.

Usando la Ecuación del Punto-pendiente, para $L1$.

$$\begin{matrix} L: & x - 3y + 3 = 0 \\ L1: & 3x + y - 11 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix} \Rightarrow P_1(3,2)$$

Intersectando la Recta dada: L con su Recta perpendicular: $L1$

4-13 Hallar las Ecuaciones de las Bisectrices a: $2x - 5y + 5 = 0$; $5x - 2y - 19 = 0$

Una Bisectriz entre dos Rectas, tendrá puntos situados a la misma distancia de las dos Rectas; Si $P(x,y)$ pertenece a la Recta Bisectriz sus distancias a $L1$, $L2$ serán:

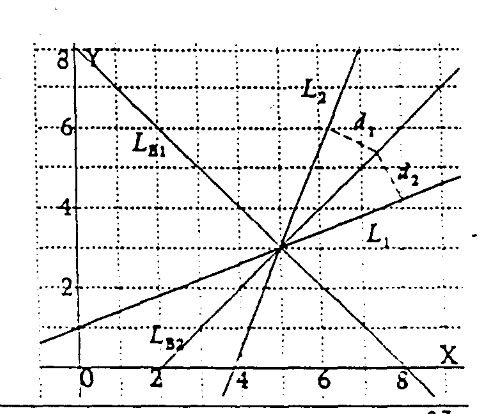
De $P(x,y)$ a $L1$ $\quad d_1 = \frac{2x - 5y + 5}{\pm\sqrt{29}}$

$2x - 5y + 5 = 0$

De $P(x,y)$ a $L2$ $\quad d_2 = \frac{5x - 2y - 19}{\pm\sqrt{29}}$

$5x - 2y - 19 = 0$

Si: $d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{2x - 5y + 5}{\pm\sqrt{29}} = \frac{5x - 2y - 19}{\pm\sqrt{29}}$



Igualando las distancias y simplificando. De acuerdo a los signos de las raíces, las bisectrices son:

L_{B1}: $x + y - 8 = 0$, L_{B2}: $x - y - 2 = 0$

ECUACIÓN NORMAL DE LA RECTA

La Ecuación Normal de la Recta es: $x \, Cos \, w + y \, Sen \, w = p$

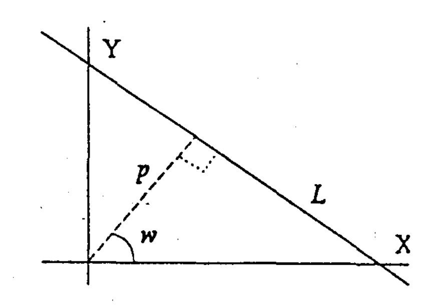
p es la distancia de la Recta al Origen, w es el ángulo de esa distancia al Origen

Si: $Ax + By + C = 0$

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$Cos \, w = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \; ; \; Sen \, w = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \; ; \; p = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



Ej 4-11 Se escribe en forma Normal, la Ecuación de la Recta: $3x + 4y - 24 = 0$

Si: $3x + 4y - 24 = 0$

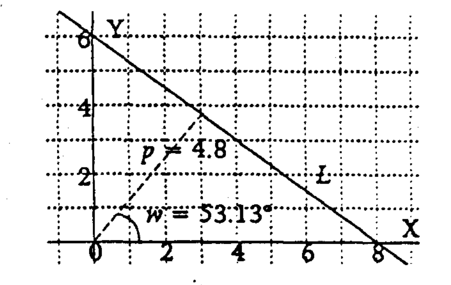
$$3x + 4y = 24$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{24}{5}$$

$A = 3 \; ; \; B = 24 \; ; \; C = -24$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$Cos \, w = \frac{3}{5} \Rightarrow w = Arccos\frac{3}{5} = 53.13° \; ; \; p = \frac{24}{5} = 4.8$$



4-14 Escribir en Forma general, la Ecuación Normal de Recta: $x \, Cos \, 60° + y \, Sen \, 60° = 6$

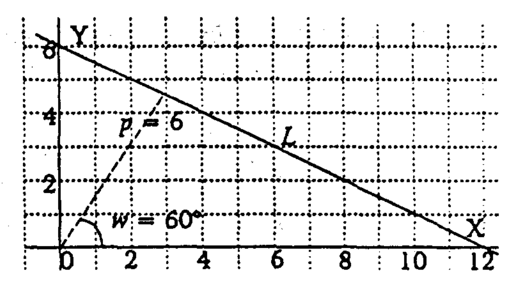
Para llevar a la Forma General, será suficiente con calcular las Funciones trigonométricas, indicadas en la Forma Normal

$$x \, Cos \, 60° + y \, Sen \, 60° = 6$$

$$x \cdot 0.5 + y \cdot 0.866 = 6$$

$$0.5x + 0.866y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow A = 0.5 \; ; \; B = 0.866 \; ; \; C = -6$$



4-15 Graficar las Rectas $L1: \; y - 2 = 0 \; ; \; L2: \; 2x - 6 = 0$

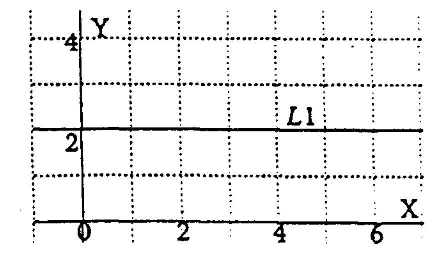
Para graficar $L1$: $y - 2 = 0$; se observa que la Ecuación es independiente de la variable x, por tanto es paralela al Eje X.

Si $L1$: $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

Su pendiente: $m = 0$. Ángulo de inclinación:

$\theta = Arctan \, 0 = 0°$

Las Rectas de la forma: $y = b$; son Rectas paralelas al Eje X (Rectas Horizontales) ; Pendiente: $m = 0$

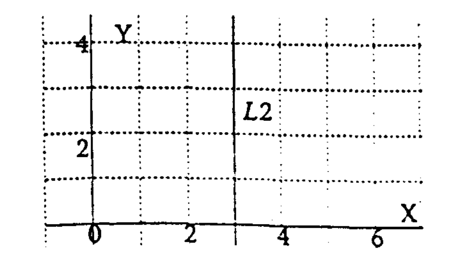


Para graficar $L2$: $2x - 6 = 0$; se observa que la Ecuación es independiente de la variable y ; por tanto es paralela al Eje Y

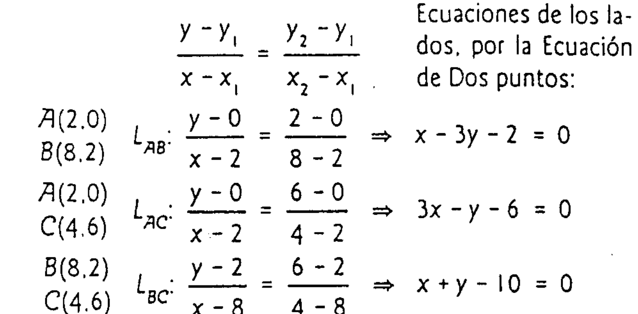
Si $L2$: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ Su pendiente es: $m = \frac{1}{0} = \infty$

Su ángulo de inclinación $\theta = Arctan \, \infty = 90°$

En general, se concluye que las Rectas de la forma $x = a$; son Rectas paralelas al Eje Y (Rectas Verticales) de pendiente $m = \infty$



4-16 Hallar las Ecuaciones de los Lados del Triángulo ubicado entre los puntos: $A(2,0)$; $B(8,2)$; $C(4,6)$; Hallar luego el Baricentro, Ortocentro e Incentro.



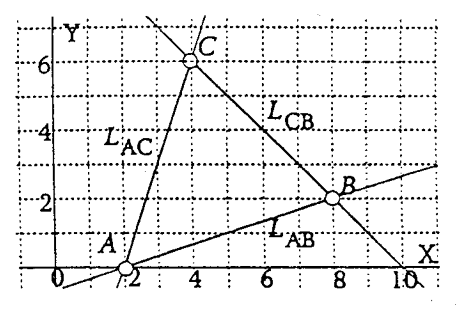
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ecuaciones de los lados, por la Ecuación de Dos puntos:

$A(2,0)$, $B(8,2)$ $\quad L_{AB}: \dfrac{y-0}{x-2}=\dfrac{2-0}{8-2} \Rightarrow x-3y-2=0$

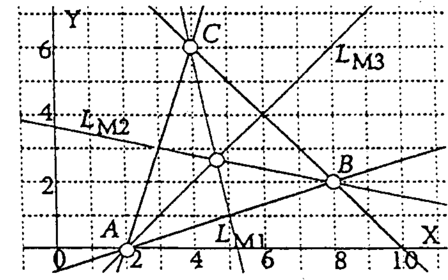
$A(2,0)$, $C(4,6)$ $\quad L_{AC}: \dfrac{y-0}{x-2}=\dfrac{6-0}{4-2} \Rightarrow 3x-y-6=0$

$B(8,2)$, $C(4,6)$ $\quad L_{BC}: \dfrac{y-2}{x-8}=\dfrac{6-2}{4-8} \Rightarrow x+y-10=0$



El Baricentro es el Punto de Intersección de las Medianas, cuyas Ecuaciones se determinan entre un Punto medio de dos Vértices y el Vértice Opuesto.

El Punto medio entre los Vértices: A, B es: $\overline{P_{AB}}(5,1)$. Entre este Punto medio y el Vértice opuesto $C(4,6)$, se halla la Ecuación de L_{M1} entre dos puntos. Similarmente se obtienen: L_{M2}, L_{M3}



$$L_{M1}: \frac{y-1}{x-5}=\frac{6-1}{4-5} \Rightarrow 5x+y-26=0$$

$L_{M2}: x+5y-18=0$; $L_{M3}: x-y-2=0$

En la intersección de dos de las Medianas está el Baricentro, este punto se halla resolviendo el Sistema:

$$\begin{aligned} L_{M1}&: 5x+y-26=0 \\ L_{M2}&: x+5y-18=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x&=14/3 \\ y&=8/3 \end{aligned}$$

El Ortocentro es el Punto de intersección de las Alturas, éstas se determinan usando una Recta Perpendicular a un Lado, que pase por el Vértice Opuesto.

Si: $L_{AB}: x-3y-2=0 \Rightarrow m=\dfrac{1}{3} \Rightarrow m^{\perp}=-3$

El Vértice opuesto es $C(4,6)$, para la Recta Perpendicular a: L_{AB} se usa la Ecuación de Punto-Pendiente

$y-y_o=m^{\perp}(x-x_o)$; $m^{\perp}=-3$; $P_o(4,6)$

$y-6=-3(x-4) \Rightarrow L_{H1}: 3x+y=18$

Similarmente $L_{H2}: x+3y=14$; $L_{H2}: x-y=2$

Intersectando entre dos de las Alturas, se obtiene el Ortocentro.

$$\begin{aligned} L_{H1}&: 3x+y-18=0 \\ L_{H2}&: x+3y-14=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x&=5 \\ y&=3 \end{aligned}$$

El Incentro es Punto de intersección de las Bisectrices, las que se determinan con el concepto de que se encuentran a igual distancia de sus lados (Ver P-4-13)

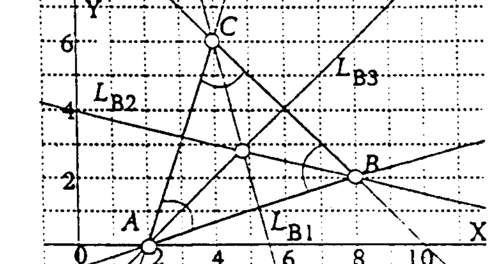
Usando la Ecuación de distancia de punto a Recta.

$$d=\frac{Ax_o+By_o+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Entre: L_{AB}, L_{AC} $\quad \dfrac{1x-3y-2}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{3x-1y-6}{-\sqrt{3^2+(-1)^2}}$: L_{B3}

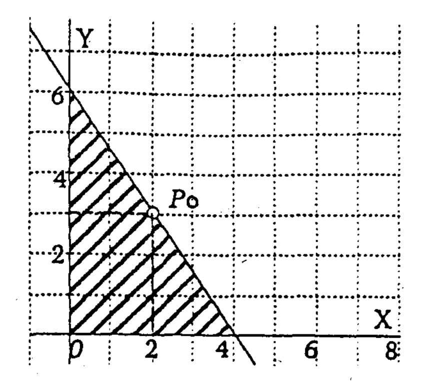
Entre: L_{AB}, L_{BC} $\quad \dfrac{1x-3y-2}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{1x+1y-10}{\sqrt{1^2+1^2}}$: L_{B2}

Entre: L_{AC}, L_{BC} $\quad \dfrac{3x-1y-6}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{1x+1y-10}{-\sqrt{1^2+1^2}}$: L_{B1}



El Punto de intersección entre dos de las Rectas Bisectrices es el Incentro: $x=4.76$; $y=2.76$

4-17 Hallar la Ecuación de Recta, que pasa por el punto $P_0(2,3)$; formando un Triángulo de Área 12, con los Ejes Coordenados del Primer Cuadrante.



Se trata de hallar los valores a, b (Ver la gráfica) para obtener la Ecuación Reducida de la Recta:

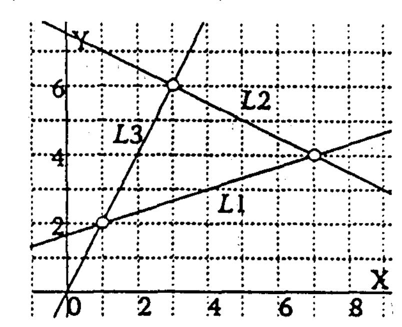
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{Área del Triangulo: } A = \frac{ab}{2} = 12$$

El punto $P_0(2,3)$ pertenece a la Recta, satisface su Ecuación, usando la Ecuación de Área, se obtiene un Sistema de dos Ecuaciones cuyas incógnitas son: a, b

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \ ; \ \frac{ab}{2} = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

$$\Rightarrow a = 4 \ ; b = 6 \qquad 3x + 2y - 12 = 0$$

4-18 Hallar el Área del Triángulo entre $L1: x - 3y + 5 = 0$; $L2: 2x - y = 0$; $L3: x + 2y - 15 = 0$



Se determinan los Puntos de Intersección o Vértices del Triángulo entre las Rectas:

$$\begin{array}{ll} L1: & x - 3y + 5 = 0 \\ L2: & 2x - y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array} \Rightarrow P1(1,2)$$

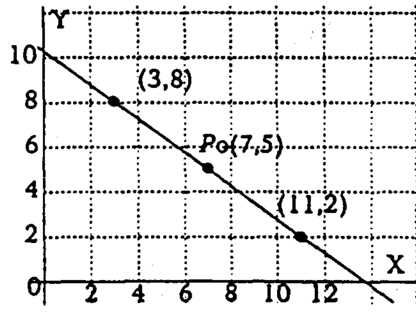
$$\begin{array}{ll} L1: & x - 3y + 5 = 0 \\ L3: & x + 2y - 15 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array} \Rightarrow P2(7,4)$$

$$\begin{array}{ll} L2: & 2x - y = 0 \\ L3: & x + 2y - 15 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 6 \end{array} \Rightarrow P3(3,6)$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = 10$$

El Área del Triángulo, ubicado entre tres puntos: $P1(x_1,y_1)$; $P2(x_2,y_2)$; $P3(x_3,y_3)$; se halla a través de un Determinante (Ver P-3-6)

4-19 Dado el punto $P_0(7,5)$ que pertenece a la Recta L: $3x + 4y - 41 = 0$; hallar otro punto P sobre la Recta L, que diste 5 unidades de P_0



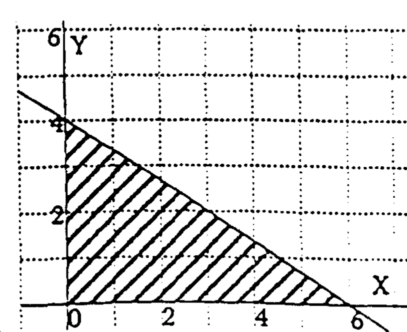
Armando un Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas, entre la Ecuación de distancia entre dos puntos y Ecuación de Recta L

Distancia de $P(x,y)$ a $P_0(7,5)$: $d = 5$

$$\begin{array}{l} d = \sqrt{(x-7)^2 + (y-5)^2} = 5 \\ L: \quad 3x + 4y - 41 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 11 \Rightarrow y = 2 \\ x = 3 \Rightarrow y = 8 \end{array}$$

Por tanto se obtienen 2 puntos: (11,2); (3,8) simétricamente distanciados de P_0 en 5 unidades.

4-20 Hallar el valor del Parámetro: k de manera que la Recta: $2x + 3y + k = 0$, forme con los Ejes Coordenados un Triángulo de Área 12, en el 1^er Cuadrante.



$$2x + 3y + k = 0$$

$$\frac{x}{-\frac{k}{2}} + \frac{y}{-\frac{k}{3}} = 1$$

Llevando la Ecuación de Recta a su Forma Reducida: Trasladando k al segundo miembro, dividiendo luego toda la Ecuación entre: k

Entonces por la Fórmula de Área de Triángulos:

$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\left(-\frac{k}{2}\right)\left(-\frac{k}{3}\right) = \frac{k^2}{12} = 12 \Rightarrow k = \pm 12$$

Se toma: $k = -12$, para que el Triángulo quede en el 1^er Cuadrante.

4-21 Los puntos: $P1(1,5)$; $P2(7,3)$ son Vértices opuestos de un cuadrado, hallar los restantes Vértices.

Se halla la longitud y Punto medio entre $P1$, $P2$

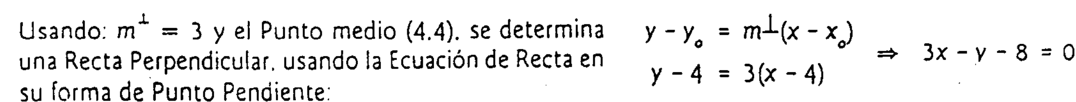
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{40}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+7}{2} = 4 \ ; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$$

De la pendiente: m, su Perpendicular es: $m^{\perp}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{7-1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \quad m^{\perp} = -\frac{1}{m} = 3$$

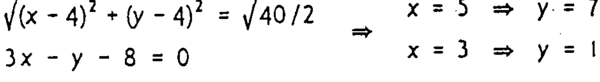
Si una Diagonal está entre $P1$, $P2$; la otra Diagonal estará sobre una Recta perpendicular, pasando por el Punto medio entre $P1$, $P2$



Usando: $m^{\perp} = 3$ y el Punto medio (4,4), se determina una Recta Perpendicular, usando la Ecuación de Recta en su forma de Punto Pendiente:

$$y - y_o = m^{\perp}(x - x_o)$$
$$y - 4 = 3(x - 4) \quad \Rightarrow \quad 3x - y - 8 = 0$$

Se determinan luego dos puntos simétricos a partir del Punto medio y ubicados a una distancia de la mitad de la Diagonal calculada (Ver P-4-19)



$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{40}/2$$
$$3x - y - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \Rightarrow y = 7 ; \quad x = 3 \Rightarrow y = 1$$

Por tanto, los restantes Vértices son: (5,7); (3,1)

HAZ DE RECTAS

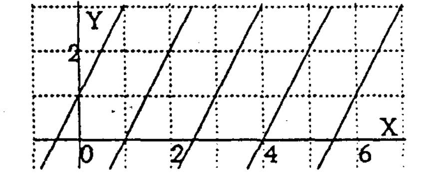
Para determinar una Recta, se precisan de al menos dos datos o características. Si solo se dispone de un dato, se determinará un Haz de Rectas, o Familia de Rectas, las que entre sí presentan un dato o característica común.



Ej 4-12 $y = 2x + c$

Es una Familia de Rectas, que tienen por dato común su pendiente. ($m = 2$)

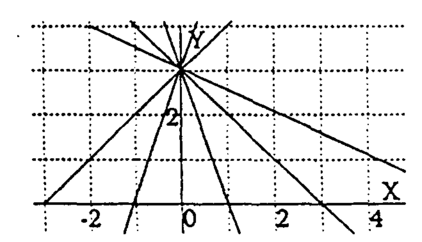
Las Rectas toman valores diferentes de Ordenada al Origen (c)



Ej 4-13 $y = cx + 3$

Es una Familia de Rectas, que tienen por dato común, su Ordenada al Origen ($b = 3$)

Las Rectas pueden tomar valores diferentes de pendiente (c)



4-22 Hallar las Ecuaciones de la Familia de Rectas (O Haz de Rectas), paralelas a la Recta: $3x + 4y - 12 = 0$, que disten: c unidades de ella.

De la distancia de Punto a Recta: (IV-9)

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Tomando: $(x_e, y_e) = (x, y)$ un punto cualquiera, considerando que la distancia es: $d = c$

$$c = \frac{3x + 4y - 12}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3x + 4y - 12}{\pm 5}$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 4y - 12 \mp 5c = 0$$

Por tanto la Familia de Rectas se expresa en términos de c.

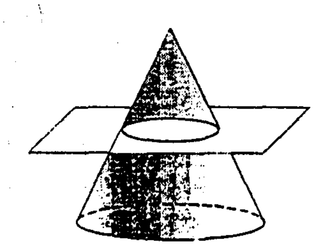
IV-5 SECCIONES CÓNICAS

El Lugar Geométrico de puntos, cuya relación de distancias a un punto y a una Recta fijos es constante, recibe el nombre de Sección Cónica. El nombre de Cónica proviene del hecho de que ésta puede obtenerse intersectando un Plano con un Cono. La Ecuación General de una Cónica es:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

A su vez las distintas Secciones Cónicas son:

LA CIRCUNFERENCIA

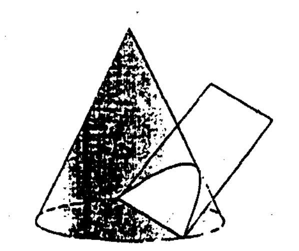


Lugar Geométrico de puntos, cuya distancia a un punto es constante.

Un Plano paralelo a la base de un Cono Circular Recto, al cortar a éste determina una Circunferencia.

En la Ecuación General, se debe cumplir: $C = 0; A = B; A \neq 0; B \neq 0$

LA PARÁBOLA

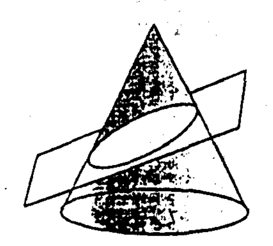


Es el Lugar Geométrico de puntos cuyas distancias a un punto y una Recta son iguales.

Un Plano perpendicular a la Generatriz del Cono Circular Recto, corta a este en una Parábola.

En la Ecuación General se debe cumplir:
$C = 0; A \neq 0; B = 0$ (También: $A = 0; B \neq 0$)

LA ELIPSE

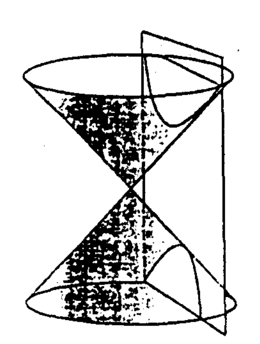


Es el Lugar Geométrico de puntos, cuya suma de distancias a dos puntos es constante.

Un Plano que corta lateralmente a un Cono Circular Recto, determina en este a una Elipse.

En la Ecuación General se debe cumplir: $C = 0; A \neq 0; B \neq 0; A \neq B$
Los signos de A ; B deben ser iguales.

LA HIPÉRBOLA



Es el Lugar Geométrico de puntos, cuya diferencia de distancias a dos puntos es constante.

Un Plano que corta longitudinalmente a un Cono Circular Recto Completo, sin pasar por su Vértice (V) corta a éste en una Hipérbola.

En la Ecuación General se debe cumplir:
$C = 0; A \neq 0; B \neq 0$; Los signos de A ; B deben ser distintos.

Mediante traslaciones o Rotaciones de Ejes Coordenados, se logran otras Formas de Cónicas donde: $C \neq 0$

Ej 4-14 En las siguientes Ecuaciones, indicar de que Cónicas se trata:

$3x^2 + 3y^2 - 12x - 18y - 6 = 0$	$A = B = 3$; Es una Circunferencia
$5x^2 + 2y^2 - 10x - 8y - 21 = 0$	$A = 5; B = 2; A \neq B$ Signos iguales. Elipse
$9x^2 + 36x - 18y - 42 = 0$	$A = 9; B = 0$: Parábola
$3x^2 - 6y^2 - 18x - 24y - 12 = 0$	$A = 3; B = -6$. Signos diferentes. Hipérbola
$5x^2 - 5y^2 - 20x - 25y - 10 = 0$	$A = 5; B = -5$. Signos diferentes. Hipérbola
$52x - 36y - 236 = 0$	$A = B = 0$. Recta (Ecuación Lineal)

IV-6 LA CIRCUNFERENCIA

La Circunferencia es el Lugar Geométrico de puntos (x,y); cuya distancia a un punto fijo (Centro) es constante, esa distancia se llama Radio (R)

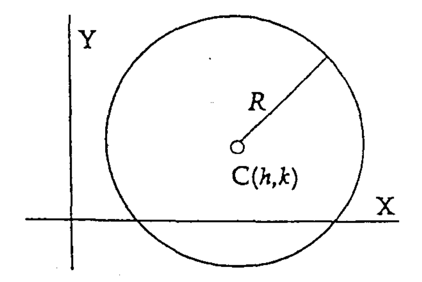
Son características de una Circunferencia:

CENTRO Es el punto $C(h,k)$

RADIO Es la distancia desde cualquier punto (x,y) hacia el Centro (h,k)

La distancia de un punto (x,y) al Centro (h,k) se calcula por:

$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ Distancia que se llamará Radio.



ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

De acuerdo a la definición y características antes indicadas, las Ecuaciones de la Circunferencia son:

EC. DE CIRCUNFERENCIA CON CENTRO $C(h,k)$

Tomando la distancia entre $P(x,y)$ a $C(h,k)$ $\qquad (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$

EC. DE CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN

Tomando el Centro: $C(h,k) = (0,0)$ (Origen) $\qquad x^2 + y^2 = R^2$

EC. GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Desarrollando la 1^{era} Ecuación $\qquad x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde: $D = -2h$; $E = -2k$; $F = h^2 + k^2 - R^2$

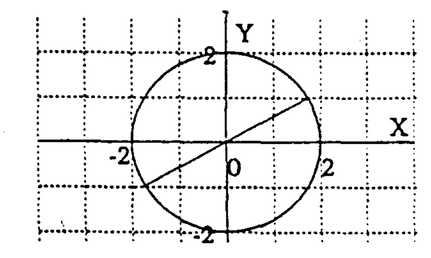
Ej 4-15 Hallar la Ecuación de la Circunferencia de Diámetro: 4, Centro en el Origen

Considerando que todo Diámetro es el doble en longitud que su Radio.

$$D = 2R = 4 \Rightarrow R = 2$$

Usando la Ecuación de Circunferencia, Centro en el Origen:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$



4-23 Hallar la Ecuación (Forma general) y gráfica de la Circunferencia de Radio 3, Centro en (5,2)

Usando la Ecuación de Circunferencia de Centro en (h,k), reemplazando los datos de $C(5,2)$; $R = 3$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

Desarrollando, se obtiene la Ecuación General

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 + (-10)x + (-4)y + 20 = 0$$

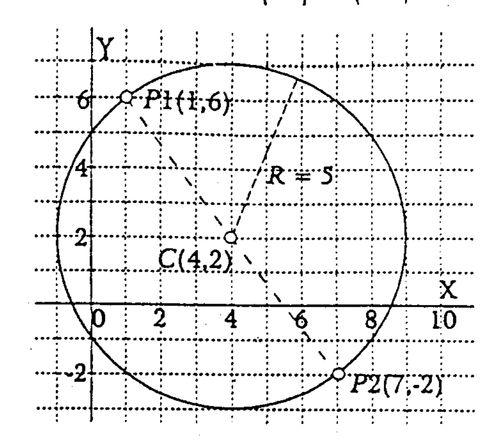
Comparando con: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Por tanto: $D = -10$; $E = -4$; $F = 20$.

Para desarrollar la gráfica, se considera la Ecuación de Circunferencia con Centro en el punto $C(h,k)$



4-24 Hallar la Ecuación y gráfica de la Circunferencia, que posee un Diámetro entre: $P1(1,6)$; $P2(7,-2)$



La distancia entre los puntos $P1$, $P2$; determinará el Diámetro de la Circunferencia, la mitad de tal Diámetro es el Radio.

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (-2-6)^2}$$

$$= 10 \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5$$

El Punto medio entre $P1$, $P2$ es el Centro:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+7}{2} = 4 \; ; \; \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$

Luego $C(h,k) = (4,2)$; Reemplazando en la Ecuación de Circunferencia con Centro en (h,k)

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Ej 4-16 Se completan cuadrados en: a) $x^2 + bx$; b) $x^2 + 6x$; c) $x^2 - 7x$

Completar Cuadrados, es el procedimiento algebraico, que procura presentar a una Expresión algebraica, como un Binomio al cuadrado, bajo los siguientes pasos:

a) Si: $x^2 + bx$ — Considerando que la variable es: x, el coeficiente lineal es: b

$(x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$ — Se forma un binomio al cuadrado, tomando a la variable con la mitad del coeficiente lineal ($b/2$), restando luego el cuadrado de esa mitad.

b) Si: $x^2 + 6x$

$(x + \frac{6}{2})^2 - (\frac{6}{2})^2$

$(x+3)^2 - 9$

c) Si: $x^2 - 7x$

$(x - \frac{7}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2$

$(x - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4}$

Note que siempre se resta el cuadrado de la mitad, así sea que dentro del Binomio haya suma o resta.

Desarrollando los cuadrados y simplificando, las Expresiones vuelven a su forma original.

Si bien existen otros métodos para Completar cuadrados, el método indicado es el más práctico.

En las Cónicas de Geometría Analítica, éste es el método que se aplicará.

Ej 4-17 Se calcula el Centro y Radio de la Circunferencia: $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$

La Ecuación de Circunferencia está en su Forma general, para determinar su Centro y su Radio es preciso Completar cuadrados, para sus dos variables: x, y llevando así la Ecuación a la Forma de Centro en el punto: (h,k)

Si: $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$	Ecuación original, Forma General
$x^2 - 8x \quad + y^2 - 4y = 5$	Ordenando Términos, para: x, y
$(x-4)^2 - 4^2 + (y-2)^2 - 2^2 = 5$	Completando cuadrados, para cada una de las Variables.
$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$	Reordenando y llevando al 2do miembro a los Términos Independientes.
$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 5^2$	Expresando al cuadrado: $25 = 5^2$
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$	Comparando con la Ecuación General de Circunferencia
$\Rightarrow h = 4 \; ; \; k = 2 \; ; \; R = 5$	Así se obtiene que el Centro es (4,2): El Radio es 5

4-25 Graficar las Circunferencias: $x^2+y^2-6x+2y-6=0$; $x^2+y^2+4x-2y+8=0$

Si: $x^2+y^2-6x+2y-6=0$

$x^2-6x \quad +y^2+2y=6$

$(x-3)^2-3^2+(y+1)^2-1^2=6$

$(x-3)^2+(y+1)^2=16$

$(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$

Si: $x^2+y^2+4x-2y+8=0$

$x^2+4x \quad +y^2-2y=-8$

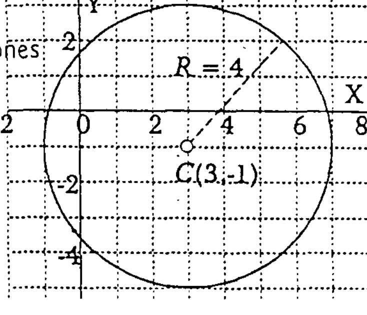
$(x+2)^2-2^2+(y-1)^2-1^2=-8$

$(x+2)^2+(y-1)^2=-3$

Para graficar se debe Completar cuadrados en las ecuaciones.

El Centro está en C(3,-1); El Radio es: 4

No existe gráfica de la segunda Circun-ferencia, porque ésta no existe.



No se puede calcular el Radio, ya que ningún número elevado al cuadrado determina -3

La suma de dos Expresiones al Cuadrado (Positivas siempre), siempre será positiva, no pueden determinar un negativo (-3).

4-26 Hallar la Ecuación de la Circunferencia de Radio: $R=2$; concéntrica a la Circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-10x-6y+9=0$

Completando cuadrados, para hallar el Centro de la Circunferencia dada.

Si: $x^2+y^2-10x-6y+9=0$

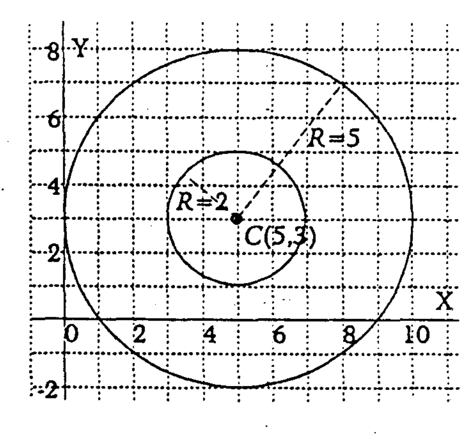
$x^2-10x \quad y^2-6y=-9$

$(x-5)^2-5^2+(y-3)^2-3^2=-9$

$(x-5)^2+(y-3)^2=5^2$

El Centro está en: (5,3); la nueva Circunferencia, por ser Concéntrica, tendrá el mismo Centro.

$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2 \Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=2^2$



4-27 Hallar la Ecuación de Circunferencia, con Centro en el Origen, que pasa por el punto $P(8,6)$

Como se conoce el Centro (0,0); el Radio puede calcularse, reemplazando el punto dado: $P(8,6)$ en la Ecuación de Circunferencia, con Centro en el Origen.

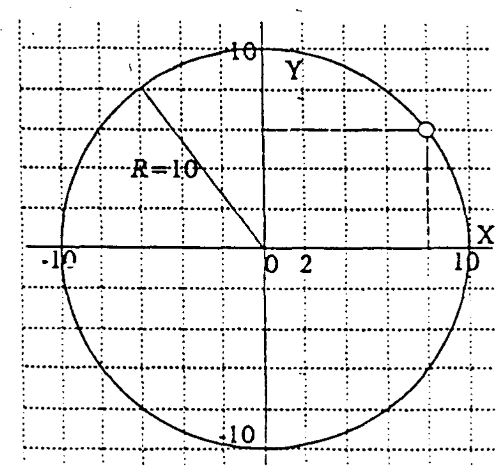
$$x^2+y^2=R^2$$

$$P(8,6) \Rightarrow 8^2+6^2=R^2 \Rightarrow R=10$$

Luego la Ecuación de Circunferencia es:

$$x^2+y^2=10^2$$

Debe notarse que al pasar la Circunferencia por el punto $P(8,6)$; su Ecuación debe satisfacerse en ese punto.



El anterior problema se resuelve también aplicando la Ecuación General de Circunferencia, cuando ésta tiene Centro en el Origen, cuya forma es:

$x^2+y^2+F=0$

$8^2+6^2+F=0 \Rightarrow F=-100$

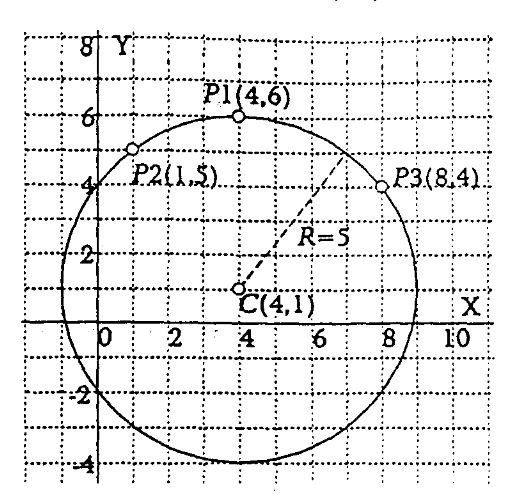
$\Rightarrow x^2+y^2-100=0$

Reemplazando el punto, se conocerá F, así se obtiene la Ecuación General de Esfera. Resultado que coincide con lo anteriormente obtenido.

4-28 Hallar la Ecuación de la Circunferencia que pasa por los puntos: $P1(4.6)$; $P2(1.5)$; $P3(8.4)$

Se usa la Ecuación General de Circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$



Existirán tres Incógnitas (D, E, F); reemplazando los puntos dados, se debe satisfacer la Ecuación

$P1(4.6)$ $\quad 4^2 + 6^2 + D\cdot 4 + E\cdot 6 + F = 0$

$P2(1.5)$ $\quad 1^2 + 5^2 + D\cdot 1 + E\cdot 5 + F = 0$

$P3(8.4)$ $\quad 8^2 + 4^2 + D\cdot 8 + E\cdot 4 + F = 0$

$$\begin{aligned} 4D + 6E + F &= -52 \\ D + 5E + F &= -26 \\ 8D + 4E + F &= -80 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} D &= -8 \\ E &= -2 \\ F &= -8 \end{aligned}$$

Resolviendo el Sistema de Ecuaciones planteado.

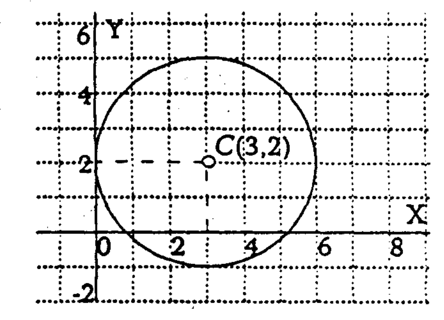
Si:
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 &= 0 \\ x^2 - 8x \quad + y^2 - 2y &= 8 \\ (x-2)^2 - 4^2 + (y-1)^2 - 1^2 &= 8 \\ (x-4)^2 + (y-1)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

Completando Cuadrados en la Ecuación General de Circunferencia, se tiene:

$\Rightarrow C(4.1)$; $R = 5$

4-29 Hallar la Ecuación de la Circunferencia con Centro en el punto (3.2). Tangente al Eje de Ordenadas.

Como la Circunferencia es Tangente al Eje de Ordenadas, de Centro en: (3.2); Entonces el Radio es: 3



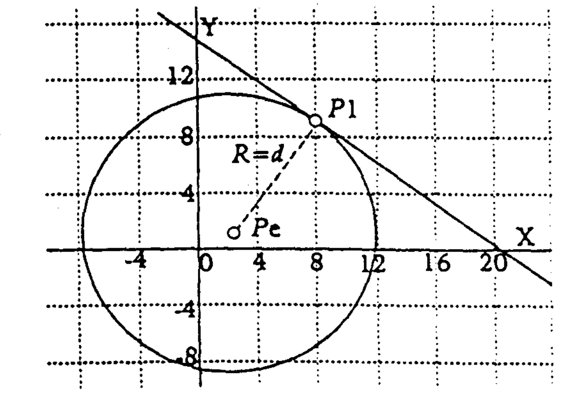
En la gráfica se aprecia que la Intersección entre la Circunferencia y el Eje Y se verifica en un solo punto, por ello se dice que es Tangente.

Utilizando la Ecuación con Centro en: $(h.k)$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

4-30 Hallar la Ecuación de Circunferencia con Centro $C(2.1)$; Tangente a la Recta de ecuación: $3x + 4y - 60 = 0$

La distancia de la Recta al Centro, será el Radio de la Circunferencia.



Por IV-9 la distancia entre el punto $Pe(x_e, y_e) = C(h.k) = C(2.1)$ a la Recta: $3x + 4y - 60 = 0$ es:

$$d = \left| \frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{3\cdot 2 + 4\cdot 1 - 60}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 10$$

Luego el Radio es $R = d = 10$

Usando la Ecuación de Centro en $(h.k)$

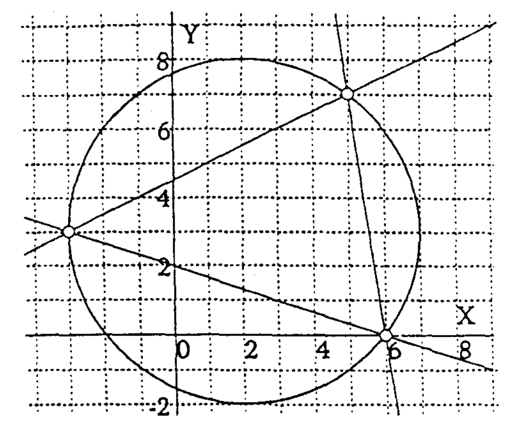
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10^2$$

La Recta dada al ser Tangente a la Circunferencia (Intersectándola en un solo punto) determina que el Radio entre el Centro hasta el Punto de Intersección ($P1$) es perpendicular a la Recta, por tanto se constituirá en la trayectoria de la distancia mínima del Centro a la Recta.

Note que en la evaluación de la distancia se toma el Valor Absoluto.

4-31 Hallar la Ecuación de Circunferencia, que circunscribe al Triángulo ubicado entre las Rectas:
$L1: x - 2y + 9 = 0$; $L2: 7x + y - 42 = 0$; $L3: x + 3y - 6 = 0$

Determinando los Vértices del Triángulo, que son los Puntos de intersección de las Rectas:



$L1 \cap L2$: $x - 2y + 9 = 0$, $7x + y - 42 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 5$, $y = 7$

$L1 \cap L3$: $x - 2y + 9 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$ $\Rightarrow$ $x = -3$, $y = 3$

$L2 \cap L3$: $7x + y - 42 = 0$, $7x + y - 42 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 6$, $y = 0$

Los Vértices son: $P1(5,7)$; $P2(-3,3)$; $P3(6,0)$

Con tres puntos, se halla la Ecuación de Circunferencia, usando su Forma General (Ver P-4-28)

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$P1(5,7)$: $5^2 + 7^2 + D\cdot 5 + E\cdot 7 + F = 0$

$P2(-3,3)$: $(-3)^2 + 3^2 + D(-3) + E\cdot 3 + F = 0$

$P3(6,0)$: $6^2 + 0^2 + D\cdot 6 + E\cdot 0 + F = 0$

$\Rightarrow$ $D = -4$, $E = -6$, $F = -12$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

Completando Cuadrados

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

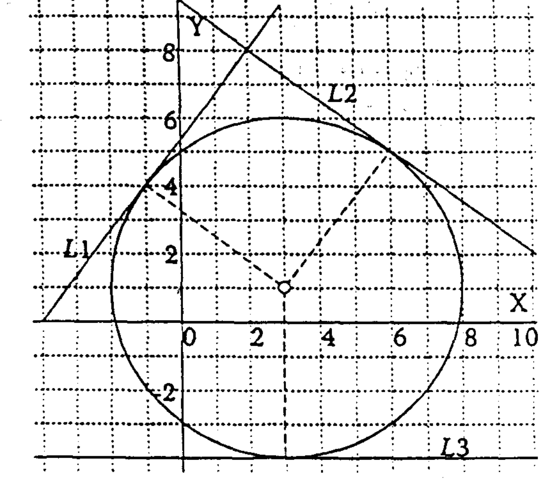
Otro modo de resolución es calculando el Ortocentro (Ver P-4-16)

4-32 Hallar la Ecuación de la Circunferencia, inscrita en el Triángulo, ubicado entre las Rectas:
$L1: 4x - 3y + 16 = 0$; $L2: 3x + 4y - 38 = 0$; $L3: y + 4 = 0$

Las Rectas o Lados del Triángulo serán Tangentes a la Circunferencia. El Radio es la distancia de cualquiera de las Rectas al Centro.

Usando la Ecuación de distancia de la Recta:
$Ax + By + C = 0$ al punto: $Pe(x_e, y_e)$

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$



$L1: 4x - 3y + 16 = 0$ al Punto $C(h,k)$ $\quad d = \dfrac{4h - 3k + 16}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$

$L2: 3x + 4y - 38 = 0$ al Punto $C(h,k)$ $\quad d = \dfrac{3h + 4k - 38}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$

$L3: y + 4 = 0$ al Punto $C(h,k)$ $\quad d = \dfrac{0\cdot h + 1\cdot k - 38}{-\sqrt{0^2 + 1^2}}$

Igualando entre si las Expresiones de distancia al Centro, resolviendo el Sistema:

$$\frac{4h - 3k + 16}{-5} = \frac{3h + 4k - 38}{5}, \quad \frac{4h - 3k + 16}{-5} = \frac{k + 4}{-1} \Rightarrow \begin{matrix} 7h + k = 22 \\ 4h - 8k = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} h = 3 \\ k = 1 \end{matrix}$$

Conocido el Centro $C(3,1)$: se halla el Radio, aplicando cualquiera de las Ecuaciones de distancia, luego se reemplaza en la Ecuación de Circunferencia.

$$R = d = \left|\frac{4h - 3k + 16}{5}\right| = \left|\frac{4\cdot 3 - 3\cdot 1 + 16}{5}\right| = 5 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

En las Expresiones de distancia, los signos de los radicales, se eligen de manera que indique si el punto está encima o debajo de la Recta (Ver Pag 97), solo así se ubica el Centro: (h,k) dentro del Triángulo.

Otro modo de resolución consiste en hallar el Incentro del Triángulo (P-4-16) o Intersección de las Bisectrices. El Incentro es el Centro de la Circunferencia.

4-33 Hallar la Ecuación General de Circunferencia, que pasa por los puntos (8,6); (1,7). Su Centro está sobre la Recta $x + 3y - 13 = 0$

La distancia del punto (x,y) que está sobre la Circunferencia, al Centro (h,k) es el Radio R

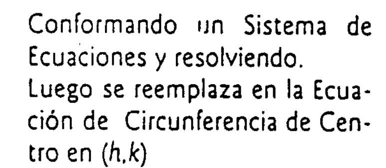
$$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = R$$

Se conocen dos puntos sobre la Circunferencia: (8,6); (1,7) reemplazando en (x,y) de la distancia:

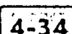
$$\sqrt{(8-h)^2 + (6-k)^2} = R \; ; \; \sqrt{(1-h)^2 + (7-k)^2} = R$$

El Centro: (h,k) está sobre la Recta L por tanto satisface su Ecuación, reemplazando:

$$L: \; x + 3y - 13 = 0 \Rightarrow h + 3k - 13 = 0$$


Conformando un Sistema de Ecuaciones y resolviendo. Luego se reemplaza en la Ecuación de Circunferencia de Centro en (h,k)

$$\begin{matrix} \sqrt{(8-h)^2 + (6-k)^2} = R \\ \sqrt{(1-h)^2 + (7-k)^2} = R \\ h + 3k - 13 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} h = 4 \\ k = 3 \\ R = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \end{matrix}$$


4-34 Hallar la Ecuación de Circunferencia Tangente a las Rectas: $3x - 4y - 7 = 0$; $4x + 3y - 51 = 0$
La Circunferencia, pasa por el punto $P(-1,2)$

La distancia del Centro $C(h,k)$ a las Rectas Tangentes es el Radio (Distancia de Recta a punto)

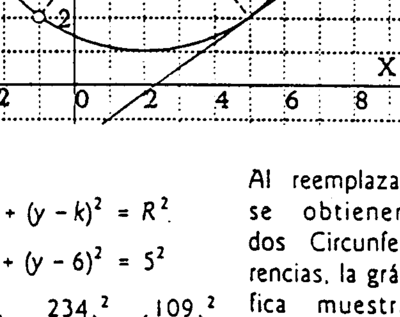
$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

Las Rectas son conocidas, reemplazando $(x_e, y_e) = (h,k)$

$$\frac{3h - 4k - 7}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = R \; ; \; \frac{4h + 3k - 51}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}} = R$$

El punto dado $P(-1,2)$ al estar sobre la Circunferencia, satisface su Ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (-1-h)^2 + (2-k)^2 = R^2$$



Formando un Sistema de Ecuaciones, resolviendo.

$$\begin{matrix} \frac{3h - 4k - 7}{5} = R \\ \frac{4h + 3k - 51}{5} = R \\ (-1-h)^2 + (2-k)^2 = R^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} h = 2 \; ; \; h = -\frac{538}{25} \\ k = 6 \; ; \; k = \frac{234}{25} \\ R = 5 \; ; \; R = \frac{109}{25} \end{matrix}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$
$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 5^2$$
$$\left(x + \frac{538}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{234}{25}\right)^2 = \left(\frac{109}{25}\right)^2$$

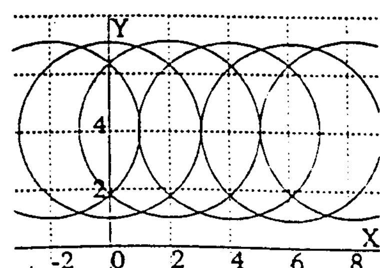
Al reemplazar se obtienen dos Circunferencias, la gráfica muestra solo una de ellas.

4-35 Hallar la Ecuación y gráfica de la Familia de Circunferencias de Radio $R = 3$, Centro en $C(c,4)$

Reemplazando en la Ecuación de Circunferencia:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$
$$(x-c)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$
$$x^2 + y^2 - 2cx - 8y + 7 + c^2 = 0$$

La gráfica representa solo a algunas de las infinitas Circunferencias.

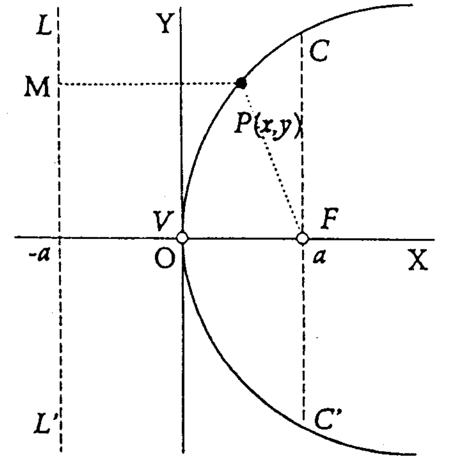


IV-7 LA PARÁBOLA

La Parábola es el Lugar Geométrico de puntos, cuya distancia a un punto fijo (Foco) es igual a la distancia a una Recta (Directriz)

Son características de una Parábola:

- Foco: $F(a,0)$
- Directriz: $x + a = 0$ ($\overline{LL'}$)
- Vértice: $V(0,0)$
- Latus Rectum: $LR = 4a$ ($\overline{CC'}$)
- Eje de la Parábola: $\overline{OX}$
- Distancia de P al Foco: ($\overline{PF}$)
- Distancia de P a la Directriz: ($\overline{PM}$)



ECUACIONES DE LA PARÁBOLA

La Ecuación de la Parábola se obtiene a partir de su definición.

$$\overline{PF} = \overline{PM}$$

Igualdad de definición de Parábola. Calculando las distancias entre los puntos: (x,y); $(a,0)$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-(-a))^2 + (y-y)^2}$$

Simplificando. Elevando al cuadrado ambos miembros de la Igualdad, desarrollando cuadrados y simplificando.

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

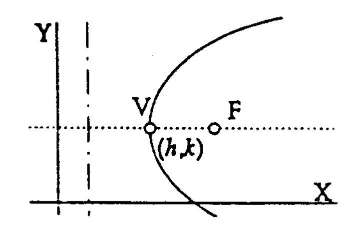
$$y^2 = 4ax$$

Ecuación de Parábola con Vértice en el Origen, Eje en el Eje de abscisas (Eje horizontal); su gráfica es la anteriormente indicada.

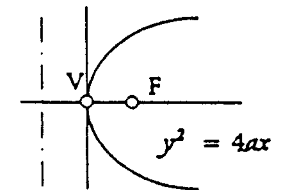
Otra Ecuación de Parábola equivalente es: $y^2 = 2px$; donde: $p = 2a$

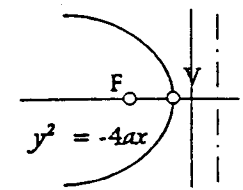
Si la Parábola tiene Vértice en otro punto, diferente al origen:
Por la gráfica, si el Vértice de la Parábola está en $V(h,k)$. Eje paralelo a las abscisas se tiene: Vértice: $V(h,k)$; Foco: $F(h+a,k)$

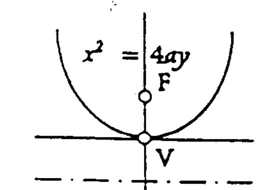
Directriz: $x - h + a = 0$ Ecuación: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$



De acuerdo al Signo y Eje la Parábola presenta otras formas, como ser:





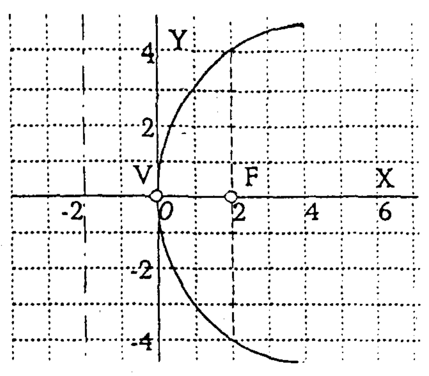


Una Regla nemotécnica para asociar gráfica y Ecuación indica que: El Eje cuya variable es cuadrática, parece curvarse en forma de Parábola, hacia un lado del Eje. La 1era gráfica muestra que aparentemente el Eje Y (Que en su Ecuación es Cuadrática) se curva hacia el Eje Positivo de las abscisas X (Su Signo es Positivo). En todos los casos se considera que la longitud: a es positiva

Desarrollando se llega a las Ecuaciones generales de Parábola, de Ejes Paralelos a los Ejes X, Y respectivamente:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ; \quad x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ej 4-18 Se analizan las características y gráfica de la Parábola: $y^2 = 8x$



Determinando la Longitud: a

Forma general: $y^2 = 4ax$ $\Rightarrow$ $4a = 8$

Ecuación dada: $y^2 = 8x$ $\qquad a = 2$

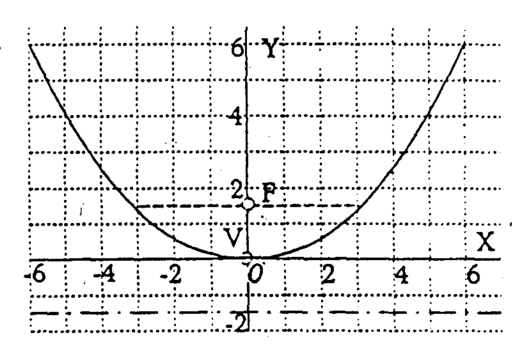
Vértice: V(0,0) — Foco: $F(a,0) = F(2,0)$

Eje: Eje X — Directriz: $x + a = 0$

Latus Rectum: $4a = 8$ — $x + 2 = 0$

La gráfica puede verificarse con algunos puntos.

4-36 Hallar las características, gráfica de la Parábola: $x^2 = 6y$



Determinando la longitud: a

Forma general: $x^2 = 4ay$ $\qquad 4a = 6$

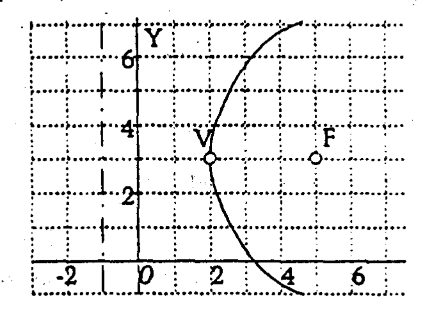
Ecuación dada: $x^2 = 6y$ $\qquad a = 3/2$

Vértice: V(0,0) — Foco: $F(0,a) = F(0,3/2)$

Eje: Eje Y — Directriz: $y + a = 0$

Latus Rectum: $4a = 6$ — $y + 3/2 = 0$

4-37 Hallar las características y gráfica de la Parábola: $(y - 3)^2 = 12(x - 2)$



Determinando la Longitud: a

Forma general: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ $\Rightarrow$ $4a = 12$

Ecuación dada: $(y - 3)^2 = 12(x - 2)$ $\qquad a = 3$

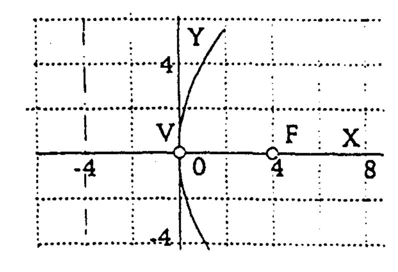
Vértice: $V(h,k) = (2,3)$ — Foco: $F(h+a,k) = F(5,3)$

Eje: Paralelo a X — Directriz: $x - h + a = 0$

Latus Rectum: $4a = 12$ — $x + 1 = 0$

La gráfica puede verificarse con algunos puntos.

4-38 Hallar la Ecuación de la Parábola de Vértice en V(0,0) ; Foco en F(4,0)



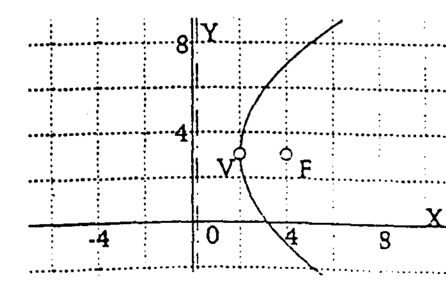
Ubicando el Vértice y Foco, se concluye que el Eje de la Parábola es el Eje X

La longitud: a es la existente entre Vértice y Foco, luego $a = 4$

Como el Vértice está en el Origen, la Ecuación es:

$y^2 = 4ax \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 \cdot 4x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 16x$

4-39 Hallar la Ecuación de la Parábola de Vértice en: V(2,3) ; Foco en F(4,3)



Ubicando el Vértice y Foco, se concluye que el Eje de la Parábola es paralelo al Eje X

La Longitud: a entre el Vértice y Foco, es $a = 2$

Como el Vértice está en (h,k), la Ecuación es:

$(y - k)^2 = 4a(x - h) \quad \Rightarrow \quad (y - 3)^2 = 8(x - 2)$

Llevando la Ecuación a su forma general, así que desarrollando: $y^2 - 8x - 6y + 25 = 0$

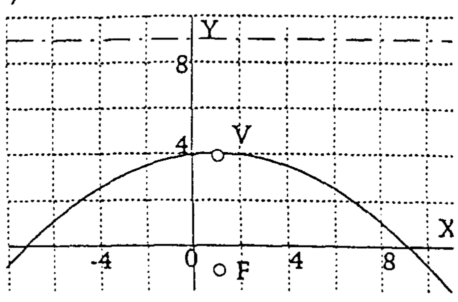
4-40 Hallar la Ecuación de Parábola de Vértice V(1,4); Foco F(1,-1)

Ubicando el Vértice y Foco, se concluye que el Eje de la Parábola es Paralelo al Eje Y negativo.

La Longitud entre Vértice y Foco es: $a = 5$

Como el Vértice está en: $(h,k) = (1,4)$ siendo su Eje Paralelo al Eje Y negativo, la Ecuación es:

$$(x-h)^2 = -4a(y-k) \Rightarrow (x-1)^2 = -20(y-4)$$



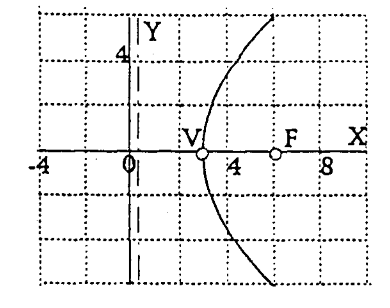
4-41 Hallar la Ecuación de Parábola de Foco(6,0), cuya Directriz es el Eje Y

De acuerdo a la definición de la Parábola, el Vértice está a la mitad entre Foco y Directriz.

Entre el Foco (6,0) y (0,0) (Por donde pasa la Directriz); el Punto medio es el Vértice V(3,0)

Por tanto se tiene: $a = 3$, y la Ecuación que corresponde es:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h) \Rightarrow y^2 = 12(x-3)$$



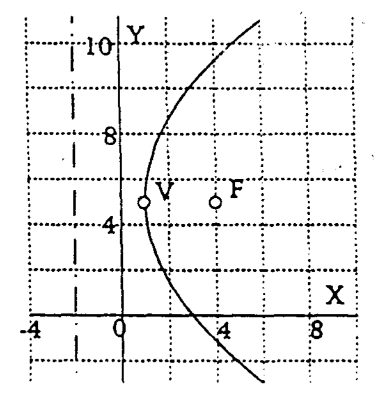
4-42 Determinar las características y gráfica de la Parábola: $y^2 - 12x - 10y + 37 = 0$

Para obtener las características, es preciso Completar cuadrados (Ver Ej-4-16) a los Términos con variable y

$y^2 - 12x - 10y + 37 = 0$	Ecuación dada
$y^2 - 10y \quad - 12x = -37$	Reordenando
$(y-5)^2 - 5^2 - 12x = -37$	Completando cuadrados
$(y-5)^2 = 12x - 12$	y simplificando.
$(y-5)^2 = 12(x-1)$	Comparando con
Si: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$	la forma:

Vértice: V(1,5) ; Latus Rectum: $4a = 12$; $a = 3$

Foco: F(4,5) ; Directriz: $x - h + a = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$



4-43 Determinar características y gráfica de la Parábola: $x^2 - 6x - 20y - 11 = 0$

Completando cuadrados, sobre la variable cuadrática x; por procedimientos conocidos.

$x^2 - 6x - 20y - 11 = 0$	Reordenando
$x^2 - 6x \quad - 20y = 11$	Completando
$(x-3)^2 - 3^2 - 20y = 11$	cuadrados y llevando a la
$(x-3)^2 = 20y + 20$	Forma de Ecuación de
$(x-3)^2 = 20(y+1)$	Parábola.

Comparando con la forma: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

$\Rightarrow$ Vértice: V(3,-1) ; Latus Rectum: $4a = 20$; $a = 5$

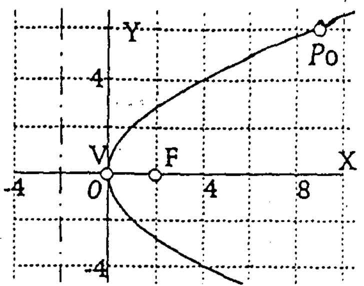
Foco F(3,4) . Directriz: $y - k + a = 0 \Rightarrow y + 6 = 0$

Luego de Completar cuadrados. (En la única variable cuadrática: x) se debe comparar con la Ecuación de Parábola correspondiente.

4-44 Hallar la Ecuación de Parábola de Vértice en el Origen, Eje sobre el Eje X; que pase por el punto: Po(9,6)

De acuerdo a las condiciones indicadas, la forma de la Ecuación será: $y^2 = 4ax$

Esta Ecuación debe cumplirse para el punto dado de $P_o(9,6)$: su reemplazo permite hallar: a



Si: $y^2 = 4ax$; $6^2 = 4a \cdot 9$ $\Rightarrow$ $a = 1$ $\Rightarrow$ $y^2 = 4 \cdot 1x$; $y^2 = 4x$

4-45 Hallar la Ecuación de Parábola, Eje Vertical, que pasa por los puntos $P1(4,5)$; $P2(-2,11)$; $P3(-4,21)$

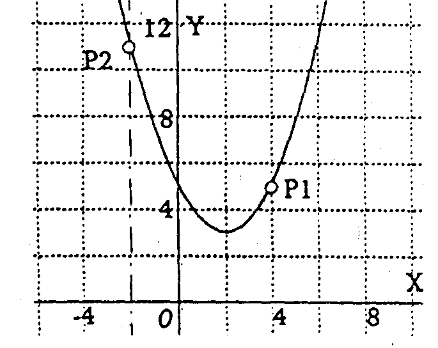
Como la Parábola debe pasar por los tres puntos, su Ecuación debe cumplirse en cada punto.

Tomando las formas generales de la Parábola:

$x^2 + Dx + Ey + F = 0$; $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Los Ejes son Vertical, Horizontal respectivamente.

Para el reemplazo, se elige la de Eje Vertical:



$$\begin{array}{ll} & x^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ P1(4,5) & 4^2 + D \cdot 4 + E \cdot 5 + F = 0 \\ P2(-2,11) & (-2)^2 + D(-2) + E \cdot 11 + F = 0 \\ P3(-4,21) & (-4)^2 + D(-4) + E \cdot 21 + F = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} D = -4 \\ E = -2 \\ F = 10 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$$

La Solución del Sistema se reemplaza en la Ecuación de Parábola en su forma general de Eje vertical.

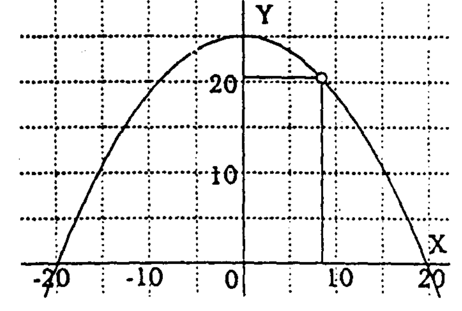
4-46 Un Arco Parabólico, tiene una altura de 25 m, una luz (Anchura en la Base), de 40 m; Hallar la altura del Arco a 8 m del centro de la base.

Al esbozar la gráfica en un Sistema de Coordenadas, se determinan los siguientes puntos:

El Centro de la base es el Origen: (0,0)
El Arco pasa por $P1(-20,0)$; $P2(0,25)$; $P3(20,0)$

En la Ecuación general de Parábola de Eje Vertical, se reemplazarán los puntos.

Luego en la ecuación obtenida, se reemplazará $x = 8$ para cono-cer la altura a 8m del centro.



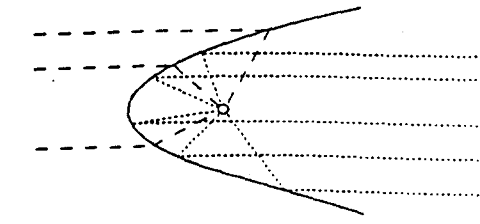
$$\begin{array}{ll} & x^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ P1(-20,0) & (-20)^2 + D(-20) + E \cdot 0 + F = 0 \\ P2(0,25) & 0^2 + D \cdot 0 + E \cdot 25 + F = 0 \\ P3(20,0) & 20^2 + D \cdot 20 + E \cdot 0 + F = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} D = 0 \\ E = 16 \\ F = -400 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ x^2 + 16y - 400 = 0 \end{array}$$

Si: $x^2 + 16y - 400 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{400 - x^2}{16}$; Si: $x = 8 \Rightarrow y = 21$ m de Altura

4-47 Indicar la Propiedad Óptica de la Parábola:

Si un haz de rayos (Paralelos al Eje), inciden sobre el lado interior de una Curva Parabólica, al rebotar se concentrarán en el Foco.

Si el haz de rayos incide sobre el lado exterior, al atravesar la Curva, se concentra en el Foco.



IV-8 LA ELIPSE

La Elipse es el Lugar Geométrico de puntos, cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados Focos, es constante e igual a la distancia: $2a$

Son características de una Elipse:

Focos: $F'(-c,0)$; $F(c,0)$

Semieje mayor: $\overline{OA} = a$
Semieje menor: $\overline{OB} = b$

Vértices Primarios: $V'(-a,0)$; $V(a,0)$

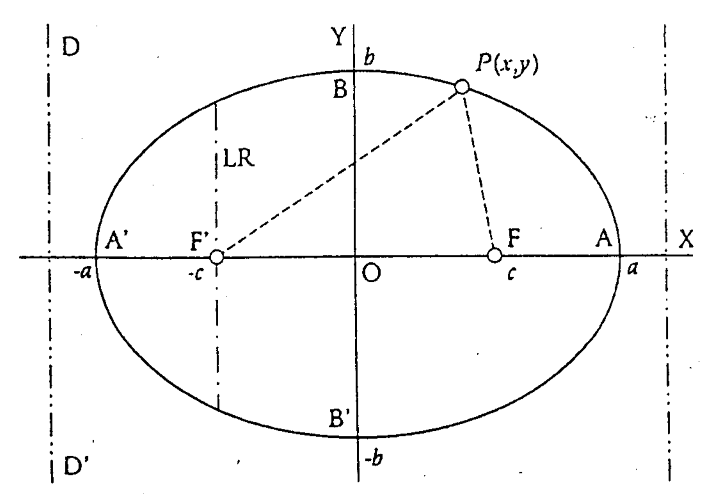
Vértices Secundarios: $B'(-b,0)$; $B(b,0)$

Directriz: $\overline{DD'}$; $x = \pm a^2/c$

Excentricidad: $e = c/a < 1$

Latus Rectum: $LR = 2b^2/a$

Relación de Elipse: $a^2 = b^2 + c^2$



ECUACIONES DE LA ELIPSE

Se determina la Ecuación de Elipse de centro en el origen, Eje mayor sobre el Eje de abscisas: X o Eje mayor Horizontal, de acuerdo a la definición:

$$\overline{F'P} + \overline{PF} = 2a$$ Definición de Elipse

$$\sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$ Por la gráfica

$$(x-c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(-c-x)^2 + y^2})^2$$ Ordenando y elevando al cuadrado

$$4a\sqrt{(-c-x)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$$ Luego de simplificar entre 4 ; se eleva al cuadrado y se reordena.

$$a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$ Tomando: $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene la Ecuación de Elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

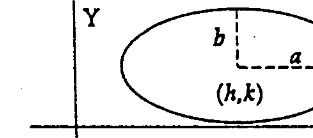
Otras formas de Ecuación de Elipse son:

El Centro es $C(h,k)$

Focos: $F'(h-c,k)$; $F(h+c,k)$

Eje mayor Horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

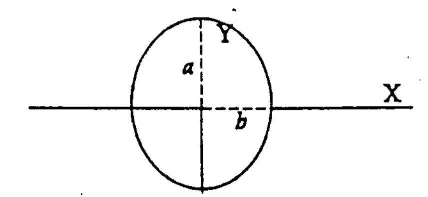


Si los Focos están sobre el Eje Y (Eje mayor Vertical)

El Centro es $C(0,0)$

Focos: $F'(0,-c)$; $F(c,0)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

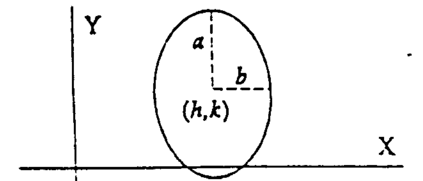


Si los Focos están sobre el Eje Y (Eje mayor Vertical)

El Centro es $C(h,k)$

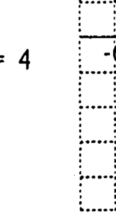
Focos: $F'(h,k-c)$; $F(h,k+c)$

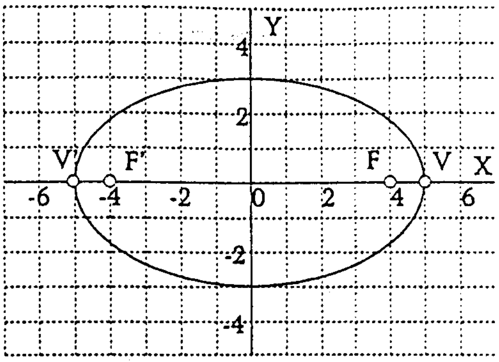
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Ej 4-19 Se analizan las características y gráfica de la Elipse de Ecuación: $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

La gráfica se obtiene a partir de sus características.





Comparando: $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(0,0)$

Semieje Mayor: $a = 5$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

Semieje Menor: $b = 3$ $\quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

V Prim: $V'(-a,0) = (-5,0)$; $V(a,0) = (5,0)$

V Sec: $B'(0,-b) = (0,-3)$; $B(0,b) = (0,3)$

Focos: $F'(-c,0) = (-4,0)$; $F(c,0) = (4,0)$

Excentricidad: $e = c/a = 4/5 = 0.8$

4-48 Hallar las características y gráfica de la Elipse de Ecuación: $\dfrac{(x-3)^2}{10^2} + \dfrac{(y-1)^2}{8^2} = 1$

$\dfrac{(x-3)^2}{10^2} + \dfrac{(y-1)^2}{8^2} = 1 \equiv \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(h,k) = (3,1)$

Semieje Mayor: $a = 10$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

Semieje Menor: $b = 8$ $\quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 6$

V Prim: $V'(h-a,k) = (-7,1)$; $V(h+a,k) = (13,1)$

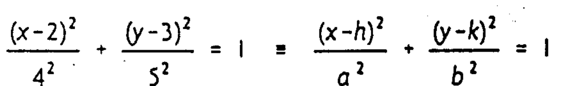
V Sec: $B'(h,k-b) = (3,-7)$; $B(h,k+b) = (3,9)$

Focos: $F'(h-c,k) = (-3,1)$; $F(h+c,k) = (9,1)$

Excentricidad: $e = c/a = 6/10 = 0.6$



4-49 Hallar las características y gráfica de la Elipse de Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{4^2} + \dfrac{(y-3)^2}{5^2} = 1$



$\dfrac{(x-2)^2}{4^2} + \dfrac{(y-3)^2}{5^2} = 1 \equiv \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(h,k) = (2,3)$

Semieje Mayor: $a = 5$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

Semieje Menor: $b = 4$ $\quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$

V Prim: $V'(h,k-a) = (2,-2)$; $V(h,k+a) = (2,8)$

V Sec: $B'(h-b,k) = (-2,3)$; $B(h+b,k) = (6,3)$

Focos: $F'(h,k-c) = (2,0)$; $F(h,k+c) = (2,6)$

Excentricidad: $e = c/a = 3/5 = 0.6$

4-50 Hallar la Ecuación de Elipse, Vértices en $(\pm 3,0)$; Focos en $(\pm 1,0)$

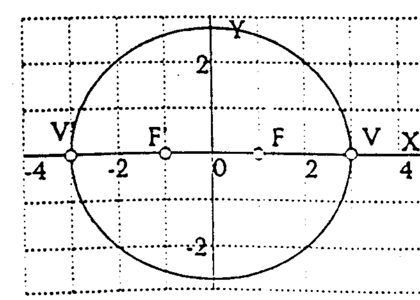
Vértices $(-3,0)$; $(3,0) \Rightarrow a = 3$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

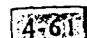
Focos $(-1,0)$; $(1,0) \Rightarrow c = 1$ $\quad b = 2.8$

El Centro está entre los Vértices $C(0,0)$

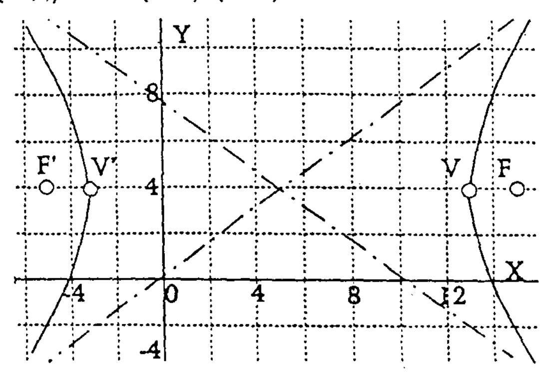
Por tanto la Ecuación tiene Centro en el Origen:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2.8^2} = 1$




4-61 Hallar la Ecuación de Hipérbola de Vértices: (-3,4); (13,4) Focos: (-5,4); (15,4)

Graficando y ubicando Vértices y Focos:



El Centro está a la mitad entre los Vértices:

Si: $V'(-3,4); V(13,4) \Rightarrow C(h,k) = (5,4)$

La Longitud entre Vértices es: $2a$

Si: $V'(-3,4); V(13,4) \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$

La Longitud entre Focos es: $2c$

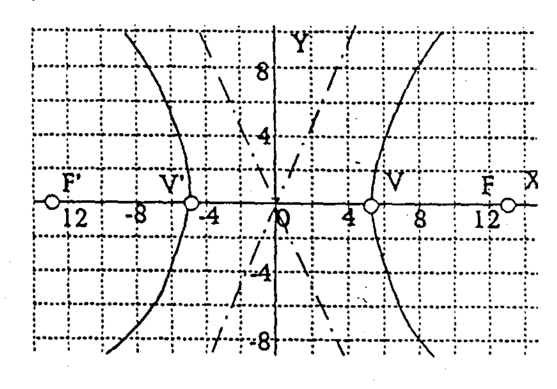
Si: $F'(-5,4); F(15,4) \Rightarrow 2c = 20 \Rightarrow c = 10$

Si: $c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 6$

Usando la Ecuación de Hipérbola de la forma: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{8^2} - \dfrac{(y-4)^2}{6^2} = 1$


4-62 Hallar las características de la Hipérbola: $144x^2 - 25y^2 - 3600 = 0$

La Ecuación está en su forma general, llevando a otra forma por Operaciones Algebraicas:



$144x^2 - 25y^2 - 3600 = 0$ Hipérbola.

$144x^2 - 25y^2 = 3600$ Ordenando y dividiendo entre 3600

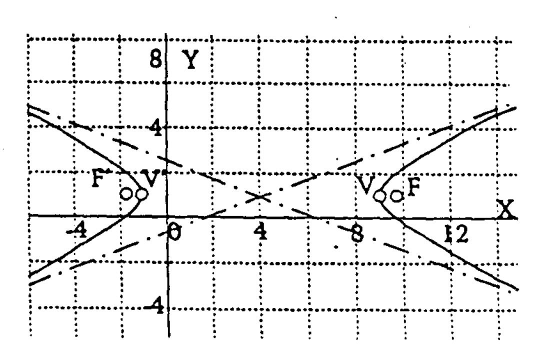
$\dfrac{144x^2}{3600} - \dfrac{25y^2}{3600} = 1$

$\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{12^2} = 1$

Centro: $C(0,0)$; Eje Horizontal. $a = 5; b = 12; c = 13$

4-63 Hallar las características de la Hipérbola: $4x^2 - 25y^2 - 32x + 50y - 61 = 0$

La forma general de la Ecuación se transforma Completando cuadrados:



$$4x^2 - 25y^2 - 32x + 50y - 61 = 0$$

$$4(x^2 - 8x) - 25(y^2 - 2y) = 61$$

$$4[(x-4)^2 - 4^2] - 25[(y-1)^2 - 1^2] = 61$$

$$4(x-4)^2 - 25(y-1)^2 = 100$$

$$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-4)^2}{5^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

$C(4,1); a = 5; b = 2 \Rightarrow c = 5.4$

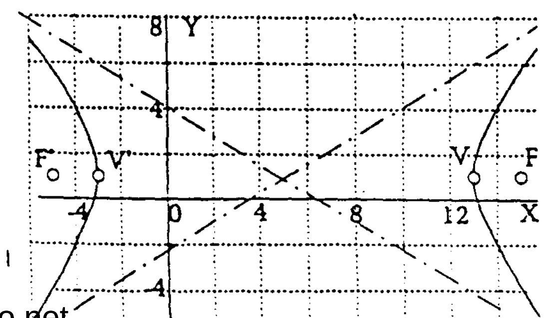
4-64 Determinar la Ecuación de la Hipérbola de Centro: $C(5,2)$; Semieje Real 8; Excentricidad $e = 1.25$; De Eje Real Paralelo a las Abscisas.

Si: $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = ea = 1.25 \cdot 8 = 10$

Si: $c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 6$

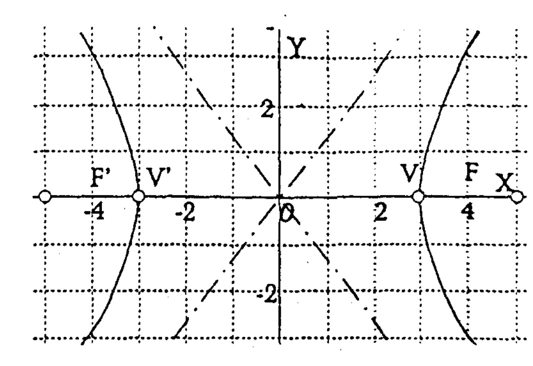
Reemplazando en la Ecuación de Centro en (h,k); Eje Paralelo a las Abscisas.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{8^2} - \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1$$



4-65 Hallar la Ecuación de la Hipérbola, que pasa por los puntos: (5,16/3) ; (3,0) Centro en el Origen.

Usando la Ecuación general de Hipérbola:



$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como el Centro es: (0,0) ; se considera que $D = E = 0$; usualmente se asume que: $A = 1$

$\Rightarrow \quad x^2 + By^2 + F = 0$

Reemplazando, los puntos se obtiene un Sistema de ecuaciones. Resolviendo

Si:	$x^2 + By^2 + F = 0$	
(5,16/3)	$5^2 + B(16/3)^2 + F = 0 \quad \Rightarrow$	$B = -\dfrac{9}{16}$
(3,0)	$3^2 + B\cdot 0 + F = 0$	$F = -9$

$$x^2 - \frac{9}{16}y^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{16}y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

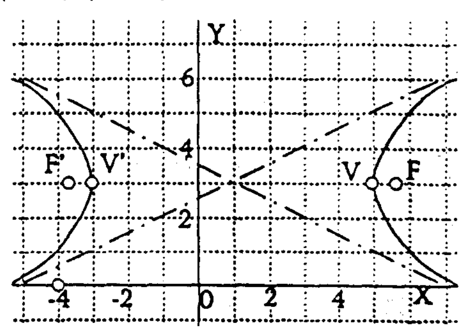
Luego se lleva la Ecuación a otra forma:

Reemplazando y llevando a otra Forma de Ecuación de Hipérbola. Reordenando y dividiendo entre: 9

Se obtiene: $a = 3$; $b = 4$

4-66 Hallar la Ecuación de Hipérbola que pasa por: (5,3); (-3,3); (6,9/2); (-4,9/2)

Usando la Ecuación general de Hipérbola:



$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

Asumiendo: $A = 1$; reemplazando cada uno de los puntos y resolviendo el Sistema que así se forma:

Si:	$x^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$
(5,3)	$5^2 + B\cdot 3^3 + D\cdot 5 + E\cdot 3 + F = 0$
(-3,3)	$(-3)^2 + B\cdot 3^2 + D(-5) + E\cdot 3 + F = 0$
$(6,\frac{9}{2})$	$6^2 + B(\frac{9}{2})^2 + D\cdot 6 + E\frac{9}{2} + F = 0$
$(-4,\frac{9}{2})$	$(-4)^2 + B(\frac{9}{2})^2 + D(-4) + E\frac{9}{2} + F = 0$

R
esolviendo el Sistema se logra:

$B = -4$, $D = -3$, $E = 24$, $F = -51$

Por tanto la Ecuación es: $x^2 - 4y^2 - 2x + 24y - 51 = 0$, cambiándola de forma:

$x^2 - 4y^2 - 2x + 24y - 51 = 0$	Ecuación general
$(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 6y) = 51$	Factorizando y ordenando
$(x-1)^2 - 1^2 - 4[(y-3)^2 - 3^2] = 51$	Completando cuadrados
$(x-1)^2 - 4(y-3)^2 = 16$	Ordenando y dividiendo entre: 16
$\dfrac{(x-1)^2}{4^2} - \dfrac{(y-3)^2}{2^2} = 1$	Entonces: C(1,3) ; $a = 4$; $b = 2$

4-67 Hallar las características que poseen las Hipérbolass de Excentricidad: $e = 1$; $e = \infty$

Si: $e = 1 \; ; \; e = \dfrac{c}{a} = 1 \;\Rightarrow\; c = a \; ; \; c^2 = b^2 + a^2 \;\Rightarrow\; b = 0$ — Degenera en Recta Horizontal

Si $e = \infty \; , \; e = \dfrac{c}{a} = \infty \;\Rightarrow\; a = 0 \; ; \; c^2 = b^2 + a^2 \;\Rightarrow\; c = b$ — Degenera en Recta Vertical

IV - PROBLEMAS PROPUESTOS

4-1 Hallar Distancias y Puntos medios entre los pares de puntos indicados:

(2,1); (10,7)   (2,5); (5,1)   10, (6,4) ; 5,(3.5,3)

(12,-5); (0,0) $(8a,0)$; $(0,6a)$ 13, (6,-2.5) ; $10a$,$(4a,3a)$

4-2 Hallar la Coordenada u; de manera que se cumpla:

$P1(6,2)$, $P2(3,u)$, $d = 5$; $(u,3)$, $(1,u)$, $d = 10$; $(5,2)$, $(3,u)$, $\overline{P}(4,5)$ 6,-2 ; 9, -5 ; 8

4-3 Hallar los puntos que dividan al Segmento entre $P1(1,5)$; $P2(7,2)$ en 3 partes iguales.   (5,3); (3,4)

4-4 Verificar si es Rectángulo el Triángulo de Vértices ubicados en los puntos: (1,1); (4,5); (6,1)

Verificar si es Rectángulo el Triángulo de Vértices ubicados en los puntos: (1,1); (0,4); (7,3)

Verificar si es Isósceles el Triángulo de Vértices ubicados en los puntos: (0,1); (2,5); (6,3)

Hallar el Vértice faltante al Triángulo Equilátero entre (2,4); (6,1)   (6.6,5.9) ; (1.4,0.97)

4-5 Indicar si pertenecen (V o F) a la Recta: $2x + 3y - 7 = 0$; los puntos (2,1); (1,3); (-4,5)   V; F; V

4-6 Graficar las siguientes Rectas: $2x + y - 5 = 0$; $3x + 2y - 16 = 0$; $x - 2y + 6 = 0$; $y = 3$; $x = 4$

4-7 Hallar las Ecuaciones de Rectas, que poseen las siguientes características:

a) Pendiente: $m = 2$; pasa por $Po(3,1)$ $2x - y - 5 = 0$

b) " $m = -3/4$; " " $Po(0,3)$ $3x + 4y - 12 = 0$

c) " $m = 0$; " " $Po(4,3)$ $y - 3 = 0$

d) " $m = 2$; intersecta al Eje Y en: -1 $2x - y - 1 = 0$

e) " $m = -1/2$; intersecta al Eje X en: 5 $x + 2y - 5 = 0$

f) Pasa por los puntos : (1,2); (5,4) $x - 2y + 3 = 0$

g) " : (1,4); (5,2) $x + 2y - 9 = 0$

h) " : (5,2); (5,6) $x - 5 = 0$

i) Intersecta a los Ejes X; Y en: 6; 4 respectivamente $2x + 3y - 12 = 0$

j) " " -2; 3 " $3x - 2y + 6 = 0$

k) " " 0; 2 " $x = 0$

l) " al Eje X en: 2 ; pasa por $P1(5,3)$ $x - y - 2 = 0$

m) " al Eje Y en: 5 ; " $P1(6,2)$ $x + 2y - 10 = 0$

n) Pasa por $Po(6,3)$ con inclinación de: $\theta = 30°$ $0.57x - y - 0.42 = 0$

o) " $Po(5,4)$ " " : $\theta = 45°$ $x - y - 1 = 0$

4-8 Hallar el Ángulo de Inclinación de las Rectas:

$2x - y - 4 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$; $y - 4 = 0$; $x - 5 = 0$ 63.43°; 26.56°; 0°; 90°

4-9 Hallar las Rectas Paralela y Perpendicular a las siguientes Rectas, que pasan por el punto indicado:

$2x - y - 1 = 0$; $Po(5,3)$ $2x - y - 7 = 0$; $x + 2y - 11 = 0$

$2x + 3y - 12 = 0$; $Po(5,4)$ $2x + 3y - 22 = 0$; $3x - 2y - 7 = 0$

$x - 3 = 0$; $Po(6,3)$ $x - 6 = 0$; $y - 3 = 0$

4-10 Hallar los puntos de intersección entre los siguientes pares de Rectas:

$2x + y - 8 = 0$ $2x - 3y - 2 = 0$ $-x + 3y - 6 = 0$

$3x - 4y - 1 = 0$ $5x - y - 18 = 0$ $2x - 6y - 6 = 0$ (3,2); (4,2); ?

4-11 Hallar los Ángulos de Intersección entre los siguientes pares de Rectas:

$3x - 2y = 5$ $3x - y = 3$ $2x + 1 = y$ L pasa por (3,0),(1,4)   75.96°; 90°

$3x + 2y = 12$ $x + 3y = 11$ Eje Y   Eje X   -26.56°; -63.56°

4-12 Hallar las Distancias entre las Rectas y los puntos indicados:

$3x + 4y - 24 = 0$; $Pe(8,5)$ $6x - 8y + 8 = 0$; $Pe(2,5)$ 4; 2

$2x + 3y - 12 = 0$; $Pe(4,5)$ $x - 2y + 2 = 0$; $Pe(4,3)$ 3.05; 0

4-13 Hallar el Baricentro, Ortocentro, Incentro y Área del Triángulo ubicado entre: (0,3); (5,7); (8,1)

(4.33,3.67) ; (4.57,5.29) ; (4.33,3.99) ; 21

4-14 Determinar a que Tipo de Cónica, pertenecen las siguientes Ecuaciones:

$x^2+y^2+3x-2y+5=0$	$3x^2+3y^2-12x-18y=0$	Circunferencia; Circunferencia
$4x^2+2x-y-24=0$	$y^2-8x-6y-48=0$	Parábola; Parábola
$x^2+2y^2-4x-8y-36=0$	$x^2-y^2+6y-24=0$	Elipse; Hipérbola
$3x^2+4y^2-12x-16y=0$	$x^2+2y^2-1=0$	Elipse; Elipse

4-15 Hallar la Ecuación general de Circunferencia, que posee las siguientes características:

a) Centro: (0,0); Radio: 3 $\quad x^2+y^2-9=0$

b) " : (5,3); " : 2 $\quad x^2+y^2-10x-6y+30=0$

c) " : (4,3); Pasa por el Origen $\quad x^2+y^2-8x-6y=0$

d) " : (5,4); Diámetro: 6 $\quad x^2+y^2-10x-8y+32=0$

e) Tiene un Diámetro entre: (2,1); (10,7) $\quad x^2+y^2-36x-8y+27=0$

f) " " " : (1,6); (5,0) $\quad x^2+y^2-6x-6y+5=0$

g) Centro: (3,4); Tangente al Eje Y $\quad x^2+y^2-6x-8y+16=0$

h) " : (5,2); " " Eje X $\quad x^2+y^2-10x-4y+25=0$

4-16 Hallar el Centro y Radio de las siguientes Circunferencias:

$x^2+y^2-7=0$	$x^2+y^2-6x+4y-3=0$	(0,0), $\sqrt{7}$; (3,-2), 4
$x^2+y^2+6x-4y-12=0$	$400x^2+400y^2+400x-320y=61$	(-3,2),5; (-1/2,2/5), 3/4

4-17 Hallar las Ecuaciones de Circunferencia, que poseen las características siguientes:

a) Pasa por $P1(3,4)$; Centro: (0,0) $\quad x^2+y^2=5^2$

b) Pasa por: (1,1); (1,5); (7,5) $\quad (x-4)^2+(y-3)^2=(\sqrt{13})^2$

c) Pasa por: (2,2); (6,0); (8,4) $\quad (x-5)^2+(y-3)^2=(\sqrt{10})^2$

d) Pasa por: (1,4); (1,-2); (4,1) $\quad (x-1)^2+(y-1)^2=3^2$

4-18 Hallar las Ecuaciones de Circunferencia, que poseen las características siguientes:

a) Centro: (0,0); Tangente a: $3x+4y-15=0$ $\quad x^2+y^2=3^2$

b) Centro: (2,1); Tangente a: $5x+12y-61=0$ $\quad (x-2)^2+(y-1)^2=3^2$

c) Centro: (3,1); Tangente a: $15x+8y-107=0$ $\quad (x-3)^2+(y-1)^2=3.18^2$

4-19 Hallar las Ecuaciones de Circunferencia, que poseen las características siguientes:

a) Pasa por:(-1,7); Tangente a: $3x+4y-50=0$; en (6,8) $\quad (x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

b) Pasa por: (-3,2); (4,1); Tangente a Eje X $\quad x^2+y^2-2x-10y=-1$; $x^2+y^2-42x-290y=-441$

c) Pasa por: (0,8); (7,1); Centro sobre $2x-3y+6=0$ $\quad x^2+y^2-6x-8y=0$

d) Pasa por: (-2,0); (4,2) Centro sobre el Eje Y $\quad x^2+y^2-8y-4=0$

e) Radio $\sqrt{18}$; Debajo y Tangente a $x+y-12=0$ en $P1(7,5)$ $\quad x^2+y^2-8x-4y+2=0$

f) Inscrita al Triángulo de Lados: $4x-3y=41$; $7x-24y=-97$; $3x+4y=-13$ $\quad x^2+y^2-8x=25$

g) Circunscrita al Triángulo de Lados: $y-x=2$; $2x+3y=1$; $4x+y=17$ $\quad 5x^2+5y^2-32x-8y=34$

h) Circunscrita al Triángulo de Lados: $7x-y=3$; $x+2y=0$; $x-3y=-5$ $\quad x^2+y^2-6x-2y=15$

4-20 Hallar la Ecuación general de Parábola, que satisface las características de Vértice V, Foco F

a) V(0,0); F(2,0) b) V(0,0); Foco(0,3) $y^2 - 8x = 0$; $x^2 - 12y = 0$

c) V(2,3); F(3,3) d) V(3,1); F(3,3) $y^2 - 4x - 6y = -17$; $x^2 - 6x - 8y = -17$

e) V(4,0); F(1,0) f) V(3,2); F(3,-2) $y^2 + 12x = 48$; $x^2 - 6x + 16y = 23$

g) V(1,3); Direc $x = -2$ h) V(3,3) LR entre (5,-1); (5,7) $y^2 - 12x - 6y = -57$; $y^2 - 8x - 6y = -33$

i) F(4,3); Directriz: $y + 1 = 0$ $y^2 - 12x - 6y + 57 = 0$

4-21 Hallar el Vértice y Foco de las siguientes Parábolas:

$y^2 - 12x = 0$ $y^2 - 20x - 6y + 29 = 0$ (0,0),(3,0) ; (1,3),(6,3)

$y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ $x^2 - 6x - 24y + 33 = 0$ (0,3),(2,3) ; (3,1),(3,7)

4-22 Hallar la Ecuación general de Parábola, que satisface las características:

a) Eje Paralelo a X; pasa por : (9,12) ; Vértice: (0,0) $y^2 - 16x = 0$

b) " Y; " : (4,2) ; Vértice: (0,0) $x^2 - 8y = 0$

c) " X; " : (3,3); (6,5); (6,-3) $y^2 - 4x - 2y + 9 = 0$

d) " Y; " : (6,3); (-2,3); (10,9) $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$

4-23 Hallar la Ecuación general de Parábola, que satisface las características:

a) Eje Paralelo a X; Pasa por: (3,5); (6,-1); Vértice sobre la Recta: $2y - 3x = 0$

$y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$; $121y^2 - 1188x - 1078y + 5929 = 0$

b) Latus Rectum entre: (3,3); (3,-2) $y^2 - 5x - y + 9 = 0$; $2y^2 - 10x - 2y + 43 = 0$

4-24 Un cable colgante forma una Parábola con torres de 220 m de altura, separadas en 1500 m. El punto más bajo del cable está a 70 m de altura. Hallar la Altura del cable a 150 m de la base de una torre. 166 m

4-25 Hallar la Ecuación general de Elipse, que satisface las características:

a) Centro: (0,0); Semiejes mayor y menor: 4; 2 $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

b) " : (2,1); " " " 6; 3 $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 28 = 0$

c) Vértices: (±5,0); Focos: (±4,0) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

d) F(±3,0); $e = 3/5$ e) V(±10,0); $e = 0.8$ $16x^2 + 25y^2 = 400$; $9x^2 + 25y^2 = 900$

f) V(0,±6); F(0,±4) g) V(0,±5); $e = 0.8$ $9x^2 + 5y^2 = 180$; $25x^2 + 9y^2 = 225$

h) " : (-1,6); (9,6); Focos:(1,6); (5,6) $16x^2 + 25y^2 - 128x - 300y + 756 = 0$

i) " : (-2,1); (6,1); $e = 0.5$ $3x^2 + 4y^2 - 12x - 8y - 32 = 0$

j) Focos: (3,2); (5,2); $e = 1/3$ $8x^2 + 9y^2 - 64x - 36y + 92 = 0$

k) Vértices: (6,1); (6,9); Focos: (6,2); (6,8) $16x^2 + 7y^2 - 192x - 70y + 1239 = 0$

l) Un Foco: (4,0); Directriz: $x = \pm 6.25$ $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

4-26 Hallar el Centro y Semiejes mayor y menor de las siguientes Elipses.

$x^2 + 4y^2 - 64 = 0$ $x^2 + 4y^2 - 4x - 32y + 32 = 0$ (0,0);8;4 ; (2,4);6;3

$x^2 + 4y^2 + 4x = 0$ $4x^2 + y^2 - 16x + 6y - 75 = 0$ (-2,0);2;1 ; (2,-3);10;5

4-27 Hallar la Ecuación general de Elipse, que satisface las características:

a) Centro en el origen; Pasa por: (0,2), (3,0) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

b) Pasa por: (0,1), (1,-1), (2,2), (4,0) $13x^2 + 23y^2 - 51x - 19y - 4 = 0$

c) Pasa por: (8,-3), (-6,4), (-8,1), (2,-4) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$

4-28 Un arco de forma semielíptica tiene 80 m en su base, su altura máxima es de 30 m. Hallar su altura a 15 m del Centro. 27.8 m

4-29 Hallar la Ecuación general de Hipérbola, que satisface los siguientes datos: Vértices V, Focos F

a) C(0,0); Semiejes Real e Imag: 2; 1, Eje ‖ a X — $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

b) C(3,1); Semiejes: 4; 2 Eje Real ‖ a X — $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

c) $V(\pm 3,0)$; $F(\pm 5,0)$ d) $V(\pm 8,0)$; $e = 5/4$ — $16x^2 - 9y^2 = 144$; $9x^2 - 16y^2 - 576 = 0$

e) $F(\pm 5,0)$; $e = 5/3$ f) $V(0,\pm 3)$; $F(0,\pm 5)$ — $16x^2 - 9y^2 = 144$; $16y^2 - 9x^2 - 144 = 0$

g) $V(0,\pm 2)$; $F(0,\pm 4)$ h) $V(0,\pm 2)$; $e = \sqrt{5}/2$ — $3y^2 - 4x^2 - 48 = 0$; $y^2 - 4x^2 - 4 = 0$

i) Vértices(1,6); (9,6); Focos(0,6); (10,6) — $9x^2 - 16y^2 - 90x + 192y - 495 = 0$

j) Vértices(2,2); (4,2); Excentricidad: $e = 2$ — $3x^2 - y^2 - 18x + 4y + 20 = 0$

k) V(-1,3);(5,3) ; $e = 1.5$ l) V(4,4);(6,4); $e = \sqrt{5}$ — $5x^2 - 4y^2 - 20x + 24y = 36$; $x^2 - 4y^2 + 40y - 8x = 80$

i) Focos(10,-2); (10,18); $e = 5/3$ — $16x^2 - 9y^2 - 256y + 180x - 452 = 0$

4-30 Hallar el Centro y Semiejes (Real e Imaginario) de las siguientes Hipérbolas:

$x^2 - 16y^2 - 64 = 0$ $\quad x^2 - 9y^2 - 2x + 54y - 116 = 0$ — (0,0), 8, 2 ; (1,4), 6, 2

$x^2 - 9y^2 - 10x + 36y = 2$ $\quad 25x^2 - 49y^2 - 100x + 294y = -884$ — (5,2), 1, 3 ; (2,3), 5, 7

4-31 Hallar las Ecuaciones de Hipérbola que satisfacen los siguientes datos:

a) Pasa por (2,0); ($\sqrt{20}$,2); C(0,0) — $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

b) Pasa por (2,5); (10,5); (1,29/4); (1,11/4) — $9x^2 - 16y^2 - 108x + 160y - 220 = 0$

c) Pasa por (5,7); (5,1); (2,1/4);(8,1/4) — $9x^2 - 16y^2 - 90x + 128y + 113 = 0$

4-32 Hallar las Ecuaciones de Hipérbola que satisfacen los siguientes datos:

a) Vértices($\pm$2,0); Asíntotas: $y = \pm 0.5x$ — $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

b) C(0,0); Latus Rectum: 5; $c = 3$ Eje ‖ a Y — $5y^2 - 4x^2 - 20 = 0$

4-33 Resolver los siguientes Problemas de Geometría Analítica:

a) Esfera de Radio: 4; cuyo Centro está en la intersección de las Rectas: $x + 2y - 5 = 0$; $2x - y - 5 = 0$ — $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

b) Entre: $3x + 4y = 36$; $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -6$ Hallar la Mínima Distancia y los puntos de la Recta y Circunferencia, que determinan esa Distancia. — 13/5 ; (144/;117/25) ; (21/5,13/5)

c) Hallar la Ecuación de Circunferencia que pasa por los puntos (-1,1); (8,-2); y que es Tangente a la Recta: $3x + 4y - 41 = 0$ — $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$; $x^2 + y^2 + 72x + 238y - 168 = 0$

d) El Centro de la Circunferencia: $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$ es el Vértice de la Parábola de LR entre:(3,2); (3,6) Hallar su Ecuación — $y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$

e) El Vértice de la Parábola: $y^2 - 12x - 2y + 25 = 0$ es el Centro de una Elipse de Semiejes: 4; 2 — $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 8 = 0$

f) De la Circunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$ Hallar el Lugar Geométrico de puntos, que dividen a sus Ordenadas en la relación 1/2 — Elipse: $x^2 + 4y^2 - R^2 = 0$

g) Un punto P se mueve de modo que el producto de Pendientes de las dos Rectas que unen a P con (-2,1); (6,5) es constante e igual a: -4; Hallar la Ecuación del Lugar Geométrico: — Elipse $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 43 = 0$

h) La órbita de la Tierra es una Elipse, en uno sus Focos está el Sol, el Semieje mayor es de: 148.5 10^6 Km. Su Excentricidad es: $e = 0.017$ Hallar la Máxima Distancia entre la Tierra y Sol. — 151.02 10^6 Km



V-1 TEORÍA DE LIMITES

El Límite de una Función Real de Variable Real se escribe de la siguiente manera:



se lee como: el Límite de la Función $f_{(x)}$, cuando x tiende hacia a, es igual a L

La definición de Límite es: $\lim_{x \to a} f_{(x)} = L$ Si: $\forall\ \epsilon > 0 ; \exists\ \delta > 0$

Tal que: $|f_{(x)} - L| < \epsilon$; siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Todo el anterior simbolismo expresa: Si se cree que el Límite de f es igual a L ; para verificarlo se debe tener un Intervalo (Preferentemente pequeño), de manera que se cumpla la desigualdad de: $|f_{(x)} - L| < \epsilon$; esto necesaria-mente debe tener por consecuencia la existencia de otro Intervalo, que a su vez cumplirá con la desigualdad: $|x - a| < \delta$

Para la interpretación gráfica, se desarrollan las Desigualdades en Valor Absoluto, de manera que se aprécie los Intervalos que determinan:

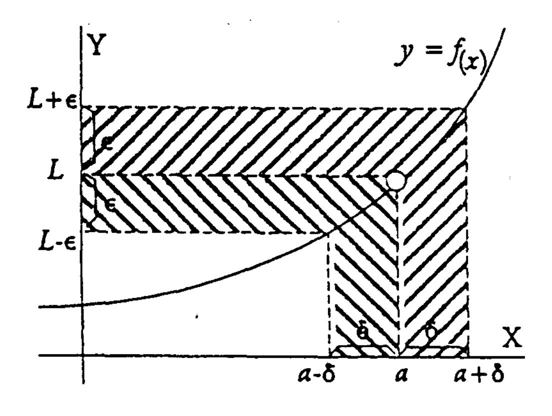
$$|f_{(x)} - L| < \epsilon \qquad\qquad |x - a| < \delta$$
$$-\epsilon < f_{(x)} - L < \epsilon \qquad\qquad -\delta < x - a < \delta$$
$$L - \epsilon < f_{(x)} < L + \epsilon \qquad\qquad a - \delta < x < a + \delta$$

La curva de la gráfica corresponde a una Función cualquiera $f_{(x)}$

En el Intervalo sobre el Eje Y; se observa que $f_{(x)}$ se halla entre: $L-\epsilon$; $L+\epsilon$

Como consecuencia del anterior Intervalo sobre el Eje Y; se tiene otro Intervalo sobre el Eje X; donde se observa que x se halla entre: $a-\delta$; $a+\delta$

Cuando más cerca de a se encuentre x; a su vez más cerca estará $f_{(x)}$ de L (Esto se aprecia mejor cuando los Intervalos son más pequeños)



TEOREMAS DE LIMITES

Los principales Teoremas de Límites son los siguientes: ($f_{(x)}$, $g_{(x)}$ son Funciones, c es una constante)

TS-1 Si: $\lim_{x \to a} f_{(x)} = L_1$; $\lim_{x \to a} f_{(x)} = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$ — El Límite es único.

TS-2 $\lim_{x \to a} c = c$ — El Límite de constante es la misma constante.

TS-3 $\lim_{x \to a} c\, f_{(x)} = c \lim_{x \to a} f_{(x)}$ — El Límite de una constante por Función, es la constante por el Límite de la Función.

TS-4 $\lim_{x \to a} [f_{(x)} + g_{(x)}] = \lim_{x \to a} f_{(x)} + \lim_{x \to a} g_{(x)}$ — El Límite de una suma es la suma de los Límites.

TS-5 $\lim_{x \to a} [f_{(x)} \cdot g_{(x)}] = \lim_{x \to a} f_{(x)} \lim_{x \to a} g_{(x)}$ — Límite de un producto es producto de los Límites.

TS-6 $\lim_{x \to a} [f_{(x)} / g_{(x)}] = [\lim_{x \to a} f_{(x)}] / [\lim_{x \to a} g_{(x)}]$; $g_{(x)} \neq 0$ — El Límite de un cociente es el cociente de los Límites.

Todos los Teoremas de los Límites pueden demostrarse de acuerdo a la definición como se verá posteriormente.

Ej 5-1 Se demuestra T5-1 Si: $\lim_{x\to a} f_{(x)} = L_1$; $\lim_{x\to a} f_{(x)} = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$

Se trata de demostrar que el Límite es único, para ello se usa el Método del Absurdo consistente en partir de una Proposición Falsa, hasta llegar a una contradicción, lo que evidencia al Teorema.

Si: $L_1 \neq L_2$ $\quad |f_{(x)} - L_1| < \epsilon$; siempre que: $|x - a| < \delta_1$

$|f_{(x)} - L_2| < \epsilon$; siempre que: $|x - a| < \delta_2$

$\epsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2|$ — Asumiendo una expresión para: ϵ

$L_1 - L_2 = L_1 - f_{(x)} + f_{(x)} - L_2$ — Operando sobre $L_1 - L_2$, sumando y restando: $f_{(x)}$

$|L_1 - L_2| = |L_1 - f_{(x)} + f_{(x)} - L_2|$ — Aplicando Valor Absoluto a ambos miembros

$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f_{(x)}| + |f_{(x)} - L_2|$ — Propiedad de Valor Absoluto (Ver TA-1 de 1-10)

$|L_1 - L_2| \leq |f_{(x)} - L_1| + |f_{(x)} - L_2|$ — Propiedad de Valor Absoluto (Ver TA-8 de 1-10)

$\frac{1}{2}|L_1 - L_2| \leq \frac{1}{2}|f_{(x)} - L_1| + \frac{1}{2}|f_{(x)} - L_2|$ — Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por 1/2

$\epsilon < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon$ — De acuerdo al supuesto de Límites diferentes.

$\epsilon < \epsilon$ — Contradicción, por tanto los Límites son iguales: $L_1 = L_2$

5-1 Demostrar: T5-2 $\lim_{x\to a} c = c$

Se trata de demostrar que el Límite de una constante es la misma constante, para ello se parte de la definición de Límite:

$|x - L| < \epsilon$; siempre que: $|x - a| < \delta$

$|c - c| < \epsilon$; siempre que: $|x - a| < \delta$

$0 < \epsilon$

Por la última Expresión, se concluye que con cualquier: ϵ, se cumple la definición de Límite.

5-2 Demostrar: T5-4 $\lim_{x\to a} [f_{(x)} + g_{(x)}] = \lim_{x\to a} f_{(x)} + \lim_{x\to a} g_{(x)}$

Se trata de demostrar que el Límite de una Suma es la Suma de los Límites:

$\lim_{x\to a} f_{(x)} = A$; $\lim_{x\to a} g_{(x)} = B \Rightarrow \lim_{x\to a} [f_{(x)} + g_{(x)}] = A + B$

$|f_{(x)} - A| < \frac{\epsilon}{2}$; siempre que: $|x - a| < \delta_1$

$|g_{(x)} - B| < \frac{\epsilon}{2}$; siempre que: $|x - a| < \delta_2$

Se plantea la definición de Límite, para cada Función, pues se asume su existencia.

Sumando miembro a miembro

$|f_{(x)} - A| + |g_{(x)} - B| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ — Propiedad de Valor Absoluto (TA-1)

$|f_{(x)} - A + g_{(x)} - B| < |f_{(x)} - A| + |g_{(x)} - B|$ — Propiedad de Desigualdades (TD-9; 1-3)

$|f_{(x)} - A + g_{(x)} - B| < \epsilon$

$|[f_{(x)} + g_{(x)}] - [A + B]| < \epsilon$ — Reordenando se llega a la Expresión de Límite de una Suma, que existirá, ya que existen los Términos con los que se conformó.

$|x - a| < \delta_1$; $|x - a| < \delta_2$

$\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ — Luego como δ se elegirá el menor valor entre δ_1, δ_2

5-3. Demostrar TS-5 $\lim_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)} = \lim_{x\to a} f_{(x)} \lim_{x\to a} g_{(x)}$

Se demuestra que el Límite de un producto es el producto de los Límites.

Considerando que los Límites de ambas Funciones existen y son respectivamente: A, B.

Si: $\lim_{x\to a} f_{(x)} = A$; $\lim_{x\to a} g_{(x)} = B \Rightarrow \lim_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)} = A\cdot B$

$|f_{(x)}g_{(x)} - AB| < \epsilon$; siempre que: $|x-a| < \delta$

$$|f_{(x)}g_{(x)} - AB| = |f_{(x)}g_{(x)} - AB + Bf_{(x)} - Bf_{(x)} + Ag_{(x)} - Ag_{(x)} + AB - AB|$$

$$= |[f_{(x)} - A][g_{(x)} - B] + B[f_{(x)} - A] + A[g_{(x)} - B]|$$

$$\leq |f_{(x)} - A|\,|g_{(x)} - B| + |B|\,|f_{(x)} - A| + |A|\,|g_{(x)} - B|$$

Tomando: $|f_{(x)} - A| \leq \epsilon_1$; $|g_{(x)} - B| < \epsilon_2$; Reemplazando

$|f_{(x)}g_{(x)} - AB| < \epsilon_1\cdot\epsilon_2 + |B|\epsilon_1 + |A|\epsilon_2$ Si: $\epsilon_1\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3}$; $|B|\epsilon_1 = \epsilon_3$; $|A|\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3}$

$$|f_{(x)}g_{(x)} - AB| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

$|f_{(x)}g_{(x)} - AB| < \epsilon$; siempre que: $|x-a| < \epsilon$

5-4 Demostrar: TS-6

$$\lim_{x\to a} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \frac{\lim_{x\to a} f_{(x)}}{\lim_{x\to a} g_{(x)}}$$

Como ya está demostrado el Teorema del producto de Límites. Se escribe el Cociente como un producto por un Inverso. Este inverso debe demostrarse.

Para facilitar las demostraciones, se eligen valores de: ϵ cualesquiera, de manera que simplifiquen las expresiones resultantes.

Si: $\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = f_{(x)}\frac{1}{g_{(x)}}$

Si: $\lim_{x\to a} g_{(x)} = B \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{g_{(x)}} = \frac{1}{B}$

$\left|\frac{1}{g_{(x)}} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon$; siempre que: $|x-a| < \delta$

$$\left|\frac{1}{g_{(x)}} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - g_{(x)}|}{|g_{(x)}B|} = \frac{|g_{(x)} - B|}{|g_{(x)}|\,|B|}$$

Si: $|g_{(x)} - B| = \frac{1}{2}B^2\epsilon$; siempre que: $|x-a| < \delta_1$

$\Rightarrow |g_{(x)}| > \frac{1}{2}|B|$; siempre que: $|x-a| < \delta_2$

$\frac{|g_{(x)} - B|}{|B|\,|g_{(x)}|} < \frac{\frac{1}{2}B^2\epsilon}{|B|\frac{1}{2}|B|} = \epsilon$; siempre que: $|x-a| < \delta$; Donde: $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

5-5. Demostrar que: $\lim_{x\to a} f_{(x)} = L$ será cierto si: $(f_{(x)} - L) = (x-a)g_{(x)}$

Lo anterior es una regla que permite demostrar Límites de Funciones, significa que si es posible la factorización: $f_{(x)} - L = (x-a)g_{(x)}$; el Límite será cierto.

Utilizando las desigualdades que definen: $\lim_{x\to a} f_{(x)} = L$

$|f_{(x)} - L| < \epsilon$

$|g_{(x)}(x-a)| < \epsilon$

$|g_{(x)}|\,|x-a| < \epsilon$

$|x-a| < \frac{\epsilon}{|g_{(x)}|}$

$|x-a| = \delta$

$|x-a| < N$ Tomando $\delta = N$

$-N < x-a < N$

$a - N < x < a + N$ Por TA-10 de 1-10

Así x queda acotado, esto a su vez permite acotar $g_{(x)}$; Si $|g_{(x)}| \leq M$; M será el mayor valor que pueda tomar $g_{(x)}$; esto permite asegurar la Desigualdad y consiguiente Igualdad: $|x-a| < \frac{\epsilon}{M} \Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{M}$

δ será el menor entre el supuesto: $\delta = N$ y el obtenido: $\delta = E/M$, se escribe $\delta = \min(N, \epsilon/M)$

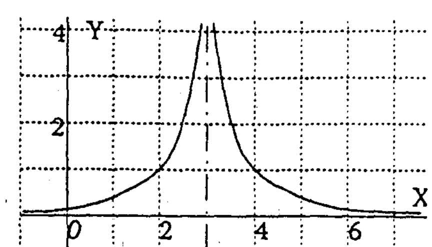
V-2 LÍMITES AL INFINITO

Los Límites al Infinito, son aquellos cuyos resultados o variables tienden al Infinito, se verifican los tres casos siguientes, cuyas definiciones son:

I) $\lim\limits_{x \to a} f_{(x)} = \infty$

Si para cualquier: $M > 0$; existe $\delta > 0$

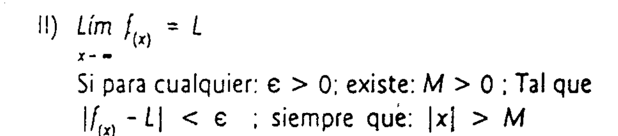
Tal que $|f_{(x)}| > M$; siempre que: $0 < |x - a| < \delta$



Ej 5-2 Cuando el resultado del Límite es ∞

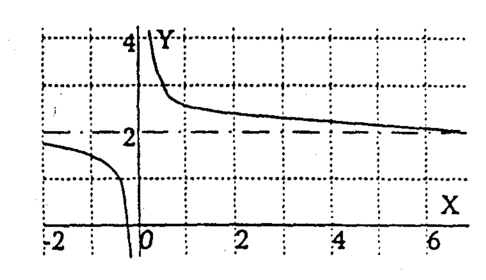
$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{(3-3)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

II) $\lim\limits_{x \to \infty} f_{(x)} = L$



Si para cualquier: $\epsilon > 0$; existe: $M > 0$; Tal que

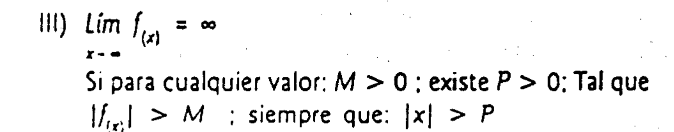
$|f_{(x)} - L| < \epsilon$; siempre que: $|x| > M$



Ej 5-3 Cuando la variable del Límite tiende a ∞

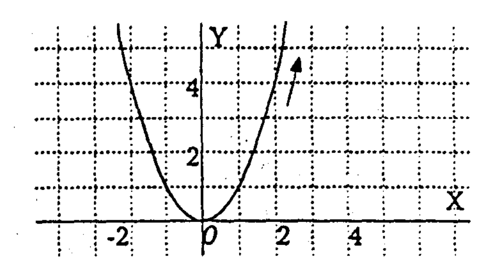
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \to \infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{\infty} = 2 + 0 = 2$$

III) $\lim\limits_{x \to \infty} f_{(x)} = \infty$



Si para cualquier valor: $M > 0$; existe $P > 0$; Tal que

$|f_{(x)}| > M$; siempre que: $|x| > P$



Ej 5-4 Cuando la variable y el resultado tienden a ∞

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

Ej 5-5 Calculando: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{2^3 - 8}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

Note que al reemplazar directamente, se obtiene la expresión de valor no conocido 0/0

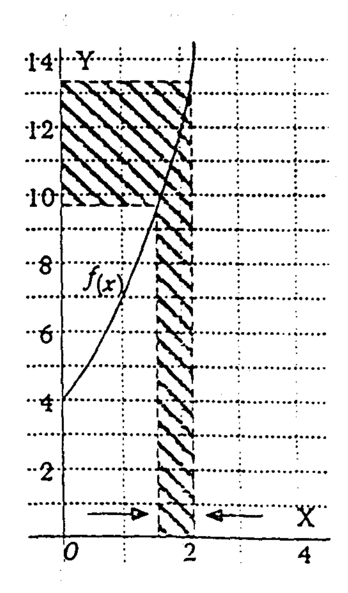
Se conforma una tabla de la Función: $f_{(x)} = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

x	$f_{(x)}$
0	4
1	7
2	0/0 =?
1.9	11.41
2.1	12.61
1.99	11.9401
2.01	12.0601
1.9999	11.9994
2.0001	12.0006
→ 2	→ 12

Como no es posible conocer el valor de la Función en: $x = 2$; se toman valores inmediatos, tanto antes como después de $x = 2$

Observando la tabla se concluye que mientras más se acerca x hacia 2; la Función se acerca más a 12. Luego es posible decir, que el Límite de la Función, cuando x tiende hacia 2; es de 12.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$$

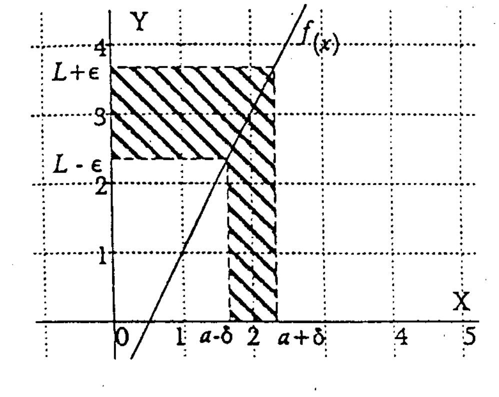


Para una conclusión formal y definitiva, se debe probar lo anterior mediante las desigualdades de definición de Límites.

Todas las anteriores definiciones de Límites, tanto la original, como las de Límites al Infinito, buscan mostrar el acercamiento de una Función hacia el Límite (L), cuando la Variable x tiende hacia el valor a ; para ello se valen de intervalos, dentro de los cuales se encontrarán tanto la Función como la Variable.

Ej 5-6 Demostrar: $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$; para: $\epsilon = 0.1$

Para la demostración se usa la definición de Límite.



$$|f_{(x)} - L| < \epsilon \quad ; \text{ siempre que: } |x - a| < \delta$$

$$|(2x - 1) - 3| < \epsilon \qquad\qquad |x - 2| < \delta$$

$$|2x - 4| < \epsilon$$

$$|2(x - 2)| < \epsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}$$

Reemplazando en las Desigualdades de definición, la Función y el valor al que tiende

Para caso extremo se toma $\delta = |x - 2|$

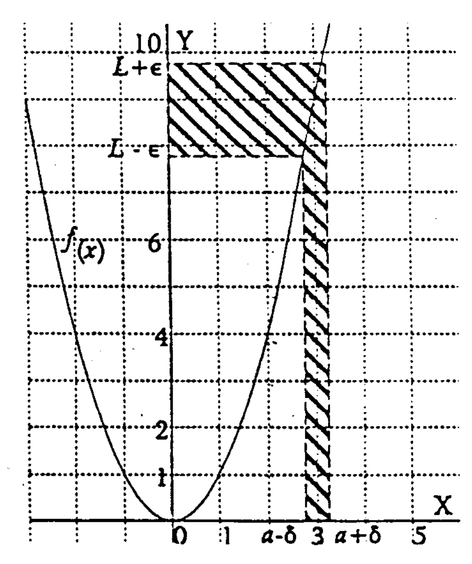


Si: $\epsilon = 0.1$; $\delta = 0.05$

Así queda demostrado el Límite, ya que dado el Intervalo de: ϵ, se halló el Intervalo de: δ

5-6 Demostrar: $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$; para: $\epsilon = 0.1$

Recurriendo a las Desigualdades de definición y usando las conclusiones de P-5-5



$$|f_{(x)} - L| < \epsilon \qquad\qquad |x - 3| < \delta$$

$$|x^2 - 9| < \epsilon \qquad\qquad |x - 3| < \delta$$

$$|x + 3|\,|x - 3| < \epsilon \qquad \text{Si: } \delta = 1 \; ; \; |x - 3| < 1$$

$$|x - 3| = \frac{\epsilon}{|x + 3|} \qquad -1 < x - 3 \leq 1$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{7} \qquad\qquad 2 < x < = 4$$

En la primera Desigualdad en: x se elige: 4 (Extremo Superior del Intervalo obtenido en la segunda Desigualdad), ya que así la expresión de δ será la mas pequeña posible.

Sin embargo se tendrán dos valores de δ, el supuesto para acotar: $\delta = 1$; y el calculado de: $\delta = \epsilon/7$ el definitivo valor de δ será el menor:

$$\delta = min(1, \frac{\epsilon}{7}) = min(1, \frac{0.1}{7}) \Rightarrow \delta = \frac{0.1}{7} = 0.014$$

Para hallar el Mínimo valor de δ se necesita conocer el valor de ϵ, en el caso: $\epsilon = 0.1$

5-7 Demostrar: $\lim_{x \to 5} (x^2 + 3x + 5) = 45$

Por la definición de Límites, se opera con las Desigualdades en Valor Absoluto y aplicando las conclusiones de: P-5-5

$\|f_{(x)} - L\| < \epsilon$	Definición de Límite	$\|x - a\| < \delta$
$\|(x^2 + 3x + 5) - 45\| < \epsilon$	Reemplazando	$\|x - 5\| < \delta$ Reemplazando
$\|x^2 + 3x - 40\| < \epsilon$	Simplificando	$\|x - 5\| < 1$ Si: $\delta = 1$
$\|x + 8\|\,\|x - 5\| < \epsilon$	Factorizando	$-1 < x - 5 < 1$
$\|x - 5\| < \frac{\epsilon}{\|x + 8\|}$	Despejando	$4 < x < 6$
	Acotando con $x = 6$	
$\delta = \frac{\epsilon}{\|6 + 8\|}$	Para acotar y elegir δ, se procede como en el anterior Problema	
$\delta = \frac{\epsilon}{14}$		

5-8 Hallar y demostrar: $\lim_{x \to 4} (2x^3 - 5x^2 + 6x - 2)$

El Límite se halla por simple reemplazo de x por el valor al que tiende: 4

$$\lim_{x \to 4} (2x^3 - 5x^2 + 6x - 2) = 2\cdot4^3 - 5\cdot4^2 + 6\cdot4 - 2 = 70$$

La Demostración del Límite, se efectuará por las Desigualdades de la Definición de Límite:

$$|f_{(x)} - L| < \epsilon$$
$$|(2x^3 - 5x^2 + 6x - 2) - 70| < \epsilon$$
$$|2x^3 - 5x^2 + 6x - 72| < \epsilon$$
$$|x - 4||2x^2 + 3x + 18| < \epsilon$$
$$|x - 4| < \frac{\epsilon}{|2x^2 + 3x + 18|}$$
$$\delta = \frac{\epsilon}{|2\cdot5^2 + 3\cdot5 + 18|} = \frac{\epsilon}{83}$$

$$|x - a| < \delta$$
$$|x - 4| < \delta \quad \text{Si: } \delta = 1$$
$$|x - 4| < 1$$
$$-1 < x - 4 < 1$$
$$3 < x < 5$$

Acotando con: $x = 5$; para que el 2do miembro sea más pequeño.

Por tanto: $\delta = mín(1, \frac{\epsilon}{83})$

5-9 Demostrar: $\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = 3$

Recurriendo a las Desigualdades de definición y a una Racionalización:

$$|f_{(x)} - L| < \epsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - 3| < \epsilon$$
$$|(\sqrt{x} - 3)\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}| < \epsilon$$
$$|\frac{x - 9}{\sqrt{x} + 3}| < \epsilon$$
$$|x - 9| < \epsilon|\sqrt{x} + 3|$$
$$\delta = \epsilon|\sqrt{8} + 3| = 5.82\,\epsilon$$

$$|x - a| < \delta$$
$$|x - 9| < \delta \quad Si: \delta = 1$$
$$|x - 9| < 1$$
$$-1 < x - 9 < 1$$
$$8 < x < 10$$

Acotando con $x = 8$; para que el 2do miembro sea mas pequeño.

Por tanto $\delta = mín(1, 5.82\,\epsilon)$

5-10 Demostrar: $\lim_{x \to 2} \frac{12}{x + 1} = 4$

$$|f_{(x)} - L| < \epsilon \Rightarrow |\frac{12}{x + 1} - 3| < \epsilon$$
$$\frac{4|x - 2|}{|x + 1|} < \epsilon$$
$$|x - 2| < \epsilon\frac{|x + 1|}{4}$$
$$\Rightarrow \delta = \epsilon\frac{|1 + 1|}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x - a| < \delta$$
$$|x - 2| < \delta \quad \text{Si: } \delta = 1$$
$$|x - 2| < 1$$
$$-1 < x - 2 < 1$$
$$1 < x < 3$$

Acotando con $x = 1$; para que el 2do miembro sea más pequeño.

Por tanto: $\delta = mín(1, \epsilon/2)$

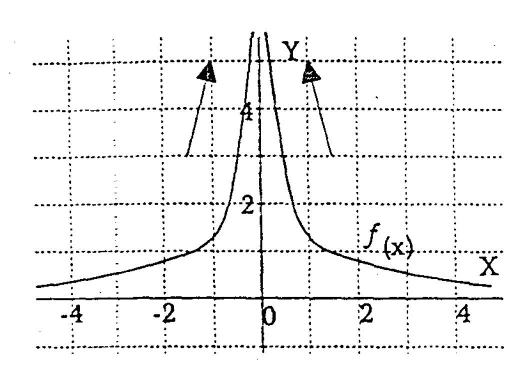
5-11 Hallar: $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{0}{0} = ?$

Ya que se analiza a la Función, cuando x se aproxima a 2; es posible definir la Función de otro modo (Factorizando y simplificando)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

5-12 Demostrar el Límite al Infinito: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Recurriendo a la definición correspondiente, para este caso de Límite al Infinito.



$$|f_{(x)}| > M \quad \text{siempre que: } |x - a| < \delta$$

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| > M \qquad |x - 0| < \delta$$

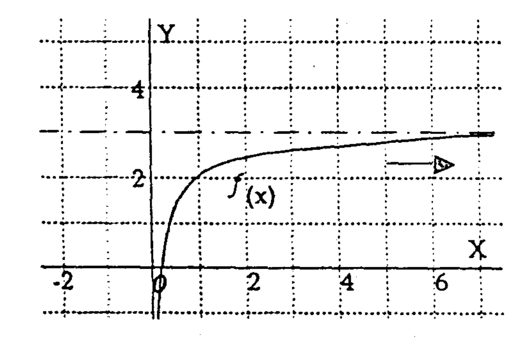
$$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad |x| < \delta$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Al quedar calculado el valor de: δ, queda demostrado el Límite al Infinito.

5-13 Demostrar el Límite al Infinito: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x}{2x+1} = 3$

Recurriendo a la correspondiente definición de Límite, para este caso de Límite al Infinito.



$$|f_{(x)} - L| < \epsilon \quad \text{siempre que: } |x| > M$$

$$\left|\frac{6x}{2x+1} - 3\right| < \epsilon$$

$$\left|\frac{-3}{2x+1}\right| < \epsilon$$

$$\frac{3}{2|x|+1} < \frac{2}{|2x+1|} < \epsilon$$

$$\frac{3}{2|x|+1} < \epsilon \Rightarrow |x| > \frac{3-\epsilon}{2\epsilon} \Rightarrow M = \frac{3-\epsilon}{2\epsilon}$$

Al quedar calculado M ; queda demostrado el Límite.

5-14 Demostrar el Límite al Infinito: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2}{x+1} = \infty$

Recurriendo a la definición correspondiente, de este caso de Límite al Infinito.

$$|f_{(x)}| > M \quad \text{siempre que: } |x| > P$$

$$\left|\frac{5x^2}{x+1}\right| > M$$

$$5|x| > \left|\frac{5x}{1 + \frac{1}{x}}\right| = \left|\frac{5x^2}{x+1}\right| > M$$

$$|x| > \frac{M}{5} \Rightarrow P = \frac{M}{5}$$

Al quedar calculado P ; queda demostrado el Límite.

5-15 Calcular: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

El reemplazo directo, muestra una expresión de valor no conocido o Indeterminación ∞/∞ ; sin embargo como lo fundamental es analizar el comportamiento de una Función, cuando su variable crece al Infinito, se puede obrar de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}\right] = \lim_{x \to \infty}\left[2 + \frac{1}{x}\right] = 2 + \frac{1}{\infty} = 2 + 0 = 2$$

V-3 INDETERMINACIONES

Las Indeterminaciones son operaciones de resultado no conocido, que adoptan un valor dependiente de la Función que les dio origen. Es conveniente comparar operaciones de resultado conocido, con las de resultado no conocido o Indeterminaciones.

OPERACIONES CONOCIDAS $(a > 0)$

$0 + 0 = 0$

$0 - 0 = 0$

$0 \cdot 0 = 0$

$a + 0 = a$

$a - 0 = a$

$a \cdot 0 = 0$

$\frac{0}{a} = 0$

$\frac{a}{0} = \infty$

$0^a = 0$

$a^0 = 1$

$\infty + \infty = \infty$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$\infty^\infty = \infty$

$\infty + a = \infty$

$\infty - a = \infty$

$\infty \cdot a = \infty$

$\frac{\infty}{a} = \infty$

$\frac{a}{\infty} = 0$

$\infty^a = \infty$

$a^\infty = \infty \quad (a > 1)$

$a^\infty = 0 \quad (a < 1)$

$\infty + 0 = \infty$

$\infty - 0 = \infty$

$\frac{\infty}{0} = \infty$

$\frac{0}{\infty} = 0$

$0^\infty = 0$

$Sen\ 0 = 0$

$Cos\ 0 = 1$

$Tan\ 0 = 0$

$Cot\ 0 = \infty$

$Sec\ 0 = 1$

$Csc\ 0 = \infty$

$Log\ 0 = -\infty$

$Log\ 1 = 0$

$Log_a\ a = 1$

$Log\ \infty = \infty$

INDETERMINACIONES

$\frac{0}{0} = ?$

$\frac{\infty}{\infty} = ?$

$0 \cdot \infty = ?$

$\infty^0 = ?$

$\infty - \infty = ?$

$1^\infty = ?$

$0^0 = ?$

Si al pretender resolver un Límite, se reemplaza la variable por el valor al que tiende, cuando se presentan Indeterminaciones, éstas deben ser evitadas o levantadas, por métodos propios que corresponden a cada clase de Función.

LÍMITES ESPECIALES

Los Límites Especiales, son aquellos que presentan una gran aplicación, tanto para la resolución de otros Límites, como para otras aplicaciones.

Pese a la Indeterminación que originalmente presentarían, los Límites Especiales, con sus respectivos resultados son:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = Ln\ a \qquad \lim_{x \to 0} \frac{Sen\ x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - Cos\ x}{x} = 0$$

Otros Límites de gran aplicación, que en realidad definen el concepto de Derivada, son de la forma:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

Note que la variable del Límite es: h ; Límites de esta naturaleza, se estudian en el Capítulo VI.

CÁLCULO DE LÍMITES

Para calcular el Límite de una Función se reemplaza la variable, por el valor al que tiende. En el caso de que se presenten Indeterminaciones, se aplicarán procedimientos que corresponden al tipo de Función.

Ej 5-7 $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 5x + 4)$

$\lim_{x \to 2} (3x^2 + 5x + 4) = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 4 = 26$

En este Límite la variable (x) tiende hacia 2, entonces reemplazando 2 en lugar de x, efectuando operaciones.

En este caso no se presenta ninguna Indeterminación, por tanto el resultado final del Límite es 26.

Implícitamente en los reemplazos, se están aplicando los Teoremas de los Límites.

5-16 Calcular los siguientes Límites:

a) $\lim_{x \to 0} (3x + 5) = 3 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$

b) $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x+4} = \frac{4-4}{4+4} = \frac{0}{8} = 0$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{2^x + 1}{x^2 + 1} = \frac{2^0 + 1}{0^2 + 1} = \frac{1+1}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{(x-5)^{x-1}}{2x-2} = \frac{(-4)^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$

e) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} + 5 = \sqrt{0} + 5 = 5$

f) $\lim_{x \to 0} x^{-3} = 0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0} = \infty$

g) $\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$

h) $\lim_{x \to 0} 5 = 5$

5-17 Calcular los siguientes Límites (Con operaciones de ∞):

a) $\lim_{x \to \infty} x^2 + x = \infty^2 + \infty = \infty + \infty = \infty$

b) $\lim_{x \to \infty} 3x^4 = 3 \cdot \infty^4 = 3 \cdot \infty = \infty$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{7}{x^3} = \frac{7}{\infty^3} = \frac{7}{\infty} = 0$

d) $\lim_{x \to \infty} x^x + 1 = \infty^\infty + 1 = \infty + 1 = \infty$

e) $\lim_{x \to \infty} x 3^x = \infty \cdot 3^\infty = \infty \cdot \infty = \infty$

f) $\lim_{x \to \infty} 3^{x^2} = 3^{\infty^2} = 3^\infty = \infty$

g) $\lim_{x \to \infty} e^{x-1} = e^{\infty - 1} = e^\infty = \infty$

h) $\lim_{x \to \infty} Ln\, x = Ln\, \infty = \infty$

i) $\lim_{x \to \infty} Ln \frac{1}{x} = Ln \frac{1}{\infty} = Ln\, 0 = -\infty$

j) $\lim_{x \to \infty} x^{x^x} = \infty^{\infty^\infty} = \infty$

5-18 Hallar los siguientes Límites:

a) $\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 0 & a < 1 \end{cases}$

Si: $a > 1$, a multiplicado por sí mismo crece hasta ∞

Si: $a < 1$, a multiplicado por si mismo, decrece a cero.

b) $\lim_{x \to \infty} 5^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 5^\infty + \left(\frac{1}{3}\right)^\infty = \infty - 0 = \infty$

c) $\lim_{x \to \infty} 4^{-x} = 4^{-\infty} = \frac{1}{4^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

d) $\lim_{x \to 0} x^{1/x} = 0^{1/0} = 0^\infty = 0$

e) $\lim_{x \to \infty} Sen \frac{1}{x} = Sen \frac{1}{\infty} = Sen\, 0 = 0$

g) $\lim_{x \to \infty} e^{1/x} = e^{1/\infty} = e^0 = 1$

h) $\lim_{x \to 0} e^{1/x} = e^{1/0} = e^\infty = \infty$

i) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{1}{\infty}\right)^\infty = 0^\infty = 0$

j) $\lim_{x \to 0} Ln \frac{1}{x} = Ln \frac{1}{0} = Ln\, \infty = \infty$

V-4 LÍMITES ALGEBRAICOS

Los Límites Algebraicos son Límites de Funciones Algebraicas

Sus Indeterminaciones se resuelven aplicando la Regla: "Deben factorizarse las expresiones desarrolladas; Desarrollar las expresiones factorizadas y Racionalizar los radicales"

Ej 5-8

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

El Límite es Algebraico, porque la Función cuyo Límite se calcula es Función Algebraica. Al reemplazar se obtiene una Indeterminación (La variable tiende a 1, por tanto en lugar de x se reemplaza 1).

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

Factorizando, ya que se tienen Expresiones desarrolladas.

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1)$$

Simplificando factores iguales.

$$= 1 + 1 = 2$$

Reemplazando, se obtiene el resultado.

5-19 Resolver los siguientes Límites Algebraicos

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2^2 + 2 - 6}{2^2 + 3 \cdot 2 + 2} = \frac{0}{0}$$

Al reemplazar se presenta una Indeterminación

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)}$$

Factorizando, tanto el numerador como el denominador. (Por el Método del Trinomio).

Simplificando factores iguales.

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x + 3)}{(x - 1)} = \frac{2 + 3}{2 - 1} = 5$$

Reemplazando, se obtiene el resultado del Límite.

b)

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} = \frac{3^2 - 7 \cdot 3 + 12}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x - 4)}{(x + 3)(x - 3)}$$

Factorizando (Por el Método del Trinomio y por Diferencia de Cuadrados)

Simplificando

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 4)}{(x + 3)} = \frac{3 - 4}{3 + 3} = -\frac{1}{6}$$

Reemplazando.

c)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6}{1^4 - 5 \cdot 1^2 + 4} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 2)}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)}$$

Factorización por Ruffini.

Simplificando

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 3)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{(1 - 3)}{(1 + 1)(1 + 2)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Reemplazando se obtiene el resultado.

d)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} = \frac{1^5 - 1}{1^3 - 1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

Factorizando (Por diversos Métodos)

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{5}{3}$$

Simplificando y reemplazando, se obtiene el resultado final.

5-20 Resolver los siguientes Límites Algebraicos:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = \frac{(1+0)^2 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación. Recordando la Regla que expresa: Lo desarrollado debe factorizarse y lo factorizado debe desarrollarse.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1^2 + 2x + x^2 - 1}{x}$$

En este caso al observarse una expresión factorizada (El cuadrado de una suma), se desarrolla ese Cuadrado de una suma, por su clásica regla, luego simplificando.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(2+x)}{x}$$

Factorizando y simplificando con el denominador se logra una Expresión simplificada, reemplazando la variable por el valor al que tiende, se obtiene el Límite.

$$= \lim_{x \to 0} (2+x) = 2 + 0 = 0$$

b)

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)^3 - 1}{x-2} = \frac{(2-1)^3 - 1}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 1}{x-2}$$

Desarrollando el cubo por Producto Notable conocido.

Simplificando.

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 - x + 1)}{x-2}$$

Factorizando el numerador (Por la Regla de Ruffini)

$$= \lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 2^2 - 2 + 1 = 3$$

Simplificando y reemplazando.

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^n - 3^n}{x} = \frac{(3+0)^n - 3^n}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3^n + \frac{n}{1!}3^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}3^{n-2}x^2 + \ldots + x^n - 3^n}{x}$$

Desarrollando por el Binomio de Newton.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{n}{1!}3^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}3^{n-2}x^2 + \ldots + x^n}{x}$$

Simplificando el primer y último términos

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(\frac{n}{1!}3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}3^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})}{x}$$

Factorizando: x

Simplificando x entre el numerador y denominador.

$$= \lim_{x \to 0} (\frac{n}{1!}3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}3^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})$$

$$= \frac{n}{1!}3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}3^{n-2}\cdot 0 + \ldots + 0^{n-1} = \frac{n}{1!}3^{n-1} = n\,3^{n-1}$$

d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)(x+2) - (x+1)(x+6)}{(x+2)(x+4) - (x+1)(x+8)} = \frac{(0+3)(0+2) - (0+1)(0+6)}{(0+2)(0+4) - (0+1)(0+8)} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 5x + 6) - (x^2 + 7x + 6)}{(x^2 + 6x + 8) - (x^2 + 9x + 8)}$$

Desarrollando y simplificando.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{-3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

El Límite de una constante, es igual a la misma constante.

5-21 Calcular los siguientes Límites Algebraicos:

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{1-1}{1-\sqrt{1}} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación. Por tratarse de un Límite con Radicales, se debe racionalizar.

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\,\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

Para racionalizar el denominador (Donde está el radical), se multiplica y divide por el Conjugado de ese denominador.

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1^2 - \sqrt{x}^2}$$

Se aplica el producto notable: El Producto de una Diferencia por una Suma es igual a la Diferencia de cuadrados.

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x}$$

El cuadrado simplifica a la raíz.

$$= \lim_{x\to 1} (1+\sqrt{x}) = 1+\sqrt{1} = 1+1 = 2$$

Simplificando factores iguales del numerador y denominador y reemplazando.

b)

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}}{a-a} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación. Racionalizando el numerador (Donde se encuentran los Radicales)

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\,\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

Simplificando, se llega a Diferencia de cuadrados, que elimina los Radicales.

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{a}^2}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

Simplificando factores iguales en el numerador y denominador

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Reemplazando se llega al resultado del Límite.

c)

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \frac{\sqrt{5+4}-3}{5-5} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación. Racionalizando.

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}\,\frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}$$

Diferencia de cuadrados en el numerador, simplificando

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}^2-3^2}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}$$

Simplificando factores iguales del numerador y denominador.

$$= \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{1}{\sqrt{5+4}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Reemplazando, queda calculado el Límite.

d)

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \frac{3-\sqrt{5+4}}{1-\sqrt{5-4}} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

Se tienen Radicales, tanto en el numerador como denominador.

$$= \lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\,\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}\,\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}$$

Se racionaliza tanto el numerador como denominador, por sus respectivos Conjugados.

$$= \lim_{x\to 4} \frac{3^2-\sqrt{5+x}^2}{1^2-\sqrt{5-x}^2}\,\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

Simplificando ordenadamente

$$= \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{-(4-x)}\,\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

Factorizando: (-1) en el denominador

$$= (-1)\,\frac{1+\sqrt{5-4}}{3+\sqrt{5+4}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Reemplazando.

5-22 Resolver los siguientes Límites Algebraicos:

a)

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49} = \frac{\sqrt{7-3}-2}{7^2-49} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}\,\frac{\sqrt{x-3}+2}{\sqrt{x-3}+2}$$

Racionalizando la raíz del numerador, multiplicando y dividiendo por su conjugado.

$$= \lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{x-3})^2-2^2}{(x^2-49)(\sqrt{x-3}+2)}$$

Simplificando en el numerador

$$= \lim_{x \to 7} \frac{x-7}{(x+7)(x-7)(\sqrt{x-3}+2)}$$

Simplificando y factorizando en el denominador.

$$= \lim_{x \to 7} \frac{1}{(x+7)(\sqrt{x-3}+2)} = \frac{1}{(7+7)(\sqrt{7-3}+2)} = \frac{1}{56}$$

b)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{2x-\sqrt{5x+6}} = \frac{2-\sqrt{3\cdot 2-2}}{2\cdot 2-\sqrt{5\cdot 2+6}} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{2x-\sqrt{5x-6}}\,\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}\,\frac{2x+\sqrt{5x+6}}{2x+\sqrt{5x+6}}$$

Racionalizando tanto el numerador como denominador, se multiplica y divide por conjugados en cada caso.

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2-(\sqrt{3x-2})^2}{(2x)^2-(\sqrt{5x+6})^2}\,\frac{2x+\sqrt{5x+6}}{x+\sqrt{3x-2}}$$

Simplificando ordenadamente

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(4x+3)}\,\frac{2x+\sqrt{5x+6}}{x+\sqrt{3x-2}}$$

Factorizando el 1^er^ cociente

$$= \frac{(2-1)}{(4\cdot 2+3)}\,\frac{2\cdot 2+\sqrt{5\cdot 2+6}}{2+\sqrt{3\cdot 2-2}} = \frac{2}{11}$$

Simplificando y reemplazando.

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{\sqrt{1+0}-1}{\sqrt[3]{1+0}-1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación, como la expresión entre raíces es la misma, conviene efectuar un Cambio de variable:

$u^6 = 1 + x$ Si: $x \to 0 \Rightarrow u \to 1$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{\sqrt{u^6}-1}{\sqrt[3]{u^6}-1} = \lim_{u \to 1} \frac{u^3-1}{u^2-1}$$

Toda vez que se realiza un Cambio de variable hay que calcular el valor al que tiende la nueva variable, reemplazando precisamente en el cambio efectuado. Simplificando y eliminando raíces.

$$= \lim_{u \to 1} \frac{(u-1)(u^2+u+1)}{(u-1)(u+1)}$$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{u^2+u+1}{u+1} = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Se eligió: u^6 porque así se simplifican las raíces cuadrada y cúbica.

d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}{x} = \frac{\sqrt{1+0}-\sqrt[4]{1+0}}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

Aplicando un Cambio de variable:

$u^4 = x + 1$

Si: $x \to 0 \Rightarrow u \to 1$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{\sqrt{u^4}-\sqrt[4]{u^4}}{u^4-1} = \lim_{u \to 1} \frac{u(u-1)}{(u-1)(u^3+u^2+u+1)}$$

Simplificando y factorizando.

$$= \lim_{u \to 1} \frac{u}{u^3+u^2+u+1} = \frac{1}{1^3+1^2+1+1} = \frac{1}{4}$$

5-23 Resolver los siguientes Límites Algebraicos:

a)

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{8-8}{\sqrt[3]{8}-2}=\frac{0}{0}$$

Indeterminación.

Ya que la Raíz es cúbica, se racionaliza por el producto:

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

El Conjugado es el 2[do] factor, tomando:

$a=\sqrt[3]{x}\ ;\ b=2$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\,2+2^2}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\,2+2^2}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\,2+2^2)}{\sqrt[3]{x^3}-2^3}$$

Al multiplicar la expresión con raíz cúbica por su conjugado, queda una Diferencia de cubos, lo que elimina la raíz cúbica.

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\,2+2^2)}{x-8}$$

$$=\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\,2+2^2)=\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8}\,2+2^2=12$$

Simplificando y reemplazando.

b)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}=\frac{\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{a}}{a-a}=\frac{0}{0}$$

Considerando el producto conocido:

$p^5-q^5=(p-q)(p^4+p^3q+p^2q^2+pq^3+q^4)$

Tomando: $p=\sqrt[5]{x}\ ;\ q=\sqrt[5]{a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{a^3}+\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{a^3}+\sqrt[5]{a^4}}$$

El 2[do] factor del producto anterior se constituye en el conjugado.

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{a^5}}{(x-a)(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{a^3}+\sqrt[5]{a^4})}$$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado para raíz quinta.

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3}\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{a^2}\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a}\sqrt[5]{a^3}+\sqrt[5]{a^4}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}}$$

Simplificando.

c)

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}}{x-6}=\frac{\sqrt{6+3}-\sqrt{6-2}-\sqrt{6-5}}{6-6}=\frac{0}{0}$$

Por existir tres raíces cuadradas en el numerador, se racionalizará dos veces.

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})-\sqrt{x-5}}{x-6}\cdot\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})+\sqrt{x-5}}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})+\sqrt{x-5}}$$

Agrupando y operando como con dos Raíces

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x-5})^2}{(x-6)(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5})}=\lim_{x\to 6}\frac{x+6-2\sqrt{(x+3)(x-2)}}{(x-6)(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5})}$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x+6)-(2\sqrt{(x+3)(x-2)})}{(x-6)(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5})}\cdot\frac{(x+6)+(2\sqrt{(x+3)(x-2)})}{(x+6)+(2\sqrt{(x+3)(x-2)})}$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x+6)^2-(2\sqrt{(x+3)(x-2)})^2}{(x-6)(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5})(x+6+2\sqrt{(x+3)(x-2)})}$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{-(3x+10)(x-6)}{(x-6)(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5})(x+6+2\sqrt{(x+3)(x-2)})}$$

$$=\frac{-(3\cdot 6+10)}{(\sqrt{6+3}-\sqrt{6-2}+\sqrt{6-5})(6+6+2\sqrt{(6+3)(6-2)})}=-\frac{7}{12}$$

INDETERMINACIONES DE LA FORMA ∞/∞

Para resolver Límites Algebraicos que presenten Indeterminaciones de la Forma: ∞/∞ ; se debe dividir tanto el numerador como denominador, entre la potencia de mayor grado.

Ej 5-9

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2\cdot\infty+3}{\infty-1} = \frac{\infty+3}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

En el reemplazo directo, queda una Indeterminación de la forma: ∞/∞

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

Observando tanto al numerador como denominador, se concluye que el mayor grado existente para: x es de 1.

Entonces tanto el numerador como denominador se divide entre: x

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2+\frac{3}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}$$

Distribuyendo numeradores sobre denominadores, aplicando la Propiedad algebraica:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$$

$$= \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

Luego de simplificar cada fracción, se reemplaza la variable por: ∞. Se obtiene así el resultado final.

Para resolver este tipo de Límites en realidad se hacen manipulaciones algebraicas en procura llegar a expresiones de la forma a/∞ , es decir un número cualquiera entre ∞, cuyo resultado es cero.

5-24 Resolver los siguientes Límites Algebraicos:

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x+1}{7x^3+1} = \frac{4\cdot\infty^2+5\cdot\infty+1}{7\cdot\infty^3+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminación de la forma: ∞/∞

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^2+5x+1}{x^3}}{\frac{7x^3+1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{7+\frac{1}{x^3}}$$

Por tratarse de un Límite Algebraico, se debe dividir entre la Potencia de mayor grado.

La potencia de mayor grado es: x^3

$$= \frac{\frac{4}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}}{7+\frac{1}{\infty^3}} = \frac{0+0+0}{7+0} = \frac{0}{7} = 0$$

Dividiendo tanto el numerador como denominador entre esta potencia.

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4+5x^2+3}{x^2+9} = \frac{6\cdot\infty^4+5\cdot\infty^2+3}{\infty^2+9} = \frac{\infty}{\infty}$$

La Indeterminación es de la forma: ∞/∞

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^4+5x^2+3}{x^4}}{\frac{x^2+9}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^4}}$$

La potencia de mayor grado en toda la Función es: x^4

Dividiendo entre esa potencia de mayor grado.

$$= \frac{6+\frac{5}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^4}}{\frac{1}{\infty^2}+\frac{9}{\infty^4}} = \frac{6+0+0}{0+0} = \frac{6}{0} = \infty$$

Simplificando.

5-25 Resolver los siguientes Límites Algebraicos:

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt[3]{\infty^2+1}}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminación de la forma: ∞/∞

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}}$$

Dividiendo tanto el numerador como denominador, entre la Potencia de mayor grado: x

Nótese que la Potencia absoluta en el numerador, sería de: $x^{2/3}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^3}}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{1+\frac{1}{x}}$$

Introduciendo: x como x^3 dentro de la Raíz cúbica.

Simplificando dentro de la Raíz del numerador y en el denominador.

$$= \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^3}}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{\sqrt[3]{0+0}}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Reemplazando luego, se obtiene el resultado del Límite.

Es conveniente destacar que en este Tipo de Indeterminaciones, lo que se procura es que el ∞ pase a dividir, para así obtener ceros.

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+3)^5(4x+1)^3}{(7x+2)^8} = \frac{(2\infty+3)^5(4\infty+1)^3}{(7\infty+2)^8} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminación.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(2x+3)^5(4x+1)^3}{x^8}}{\frac{(7x+2)^8}{x^8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(2x+3)^5}{x^5}\,\frac{(4x+1)^3}{x^3}}{\frac{(7x+2)^8}{x^8}}$$

La potencia de mayor grado, se distribuye adecuadamente para cada binomio.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\frac{2x+3}{x}\right]^5 \left[\frac{4x+1}{x}\right]^3}{\left[\frac{7x+2}{x}\right]^8} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2+\frac{3}{x})^5(4+\frac{1}{x})^3}{(7+\frac{2}{x})^8}$$

Simplicando dentro de cada binomio.

$$= \frac{(2+\frac{3}{\infty})^5(4+\frac{1}{\infty})^3}{(7+\frac{2}{\infty})^8} = \frac{(2+0)^5(4+0)^3}{(7+0)^8} = \frac{2^5\,4^3}{7^8}$$

Reemplazando y simplificando.

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^{x+1}+2^{x+1}}{3^x+2^x} = \frac{3^{\infty+1}+2^{\infty+1}}{3^\infty+2^\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3^{x+1}+2^{x+1}}{3^{x+1}}}{\frac{3^x+2^x}{3^{x+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+(\frac{2}{3})^{x+1}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^x}$$

Dividiendo entre la expresión de mayor grado que es: 3^{x+1} (Tanto el numerador como denominador)

Simplificando, reemplazando

$$= \frac{1+(\frac{2}{3})^{\infty+1}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^\infty} = \frac{1+0}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}0} = 3$$

Tome en cuenta que un número menor a cero (Como 2/3) elevado a infinito es igual a cero.

INDETERMINACIONES DE LA FORMA $\infty - \infty$

Para resolver Límites Algebraicos, que presentan una Indeterminación de la Forma: $\infty - \infty$; Es conveniente agrupar los términos que producen la Indeterminación, mediante procedimientos algebraicos de Suma, Factorización, etc.

Ej 5-10

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - 5x) = \infty^2 - 5\cdot\infty = \infty - \infty$$

El reemplazo directo presenta una Indeterminación de la Forma: $\infty - \infty$

$$= \lim_{x\to\infty} x(x-5)$$

$$= \infty(\infty - 5) = \infty(\infty) = \infty$$

Factorizando y luego reemplazando, se llega al resultado del Límite.

5-26 Resolver los siguientes Límites Algebraicos:

a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right) = \frac{1}{1-1} - \frac{2}{1^2-1} = \frac{1}{0} - \frac{2}{0} = \infty - \infty$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)-2}{(x+1)(x-1)}$$

Efectuando la Suma de fracciones.

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$

Simplificando en el numerador luego simplificando los factores iguales del numerador y denominador.

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Reemplazando.

b)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \sqrt{\infty+1} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\,\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Debido a la presencia de Radicales, es conveniente racionalizar.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}^{\,2} - \sqrt{x}^{\,2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Simplificando luego, la Diferencia de cuadrados (Que elimina la raíz)

$$= \frac{1}{\sqrt{\infty+1}+\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Reemplazando.

c)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x+6} - x) = \sqrt{\infty^2+5\cdot\infty+6} - \infty = \infty - \infty$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x+6} - x)\,\frac{\sqrt{x^2+5x+6}+x}{\sqrt{x^2+5x+6}+x}$$

La presencia del radical sugiere el procedimiento de racionalización.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x+6}^{\,2} - x^2}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Simplificando.

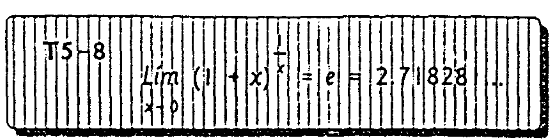
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x+6}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+5x+6}+x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1}$$

Dividiendo tanto el numerador como denominador entre la potencia de mayor grado (x)

$$= \frac{5+\dfrac{6}{\infty}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{\infty}+\dfrac{6}{\infty^2}}+1} = \frac{5+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{5}{2}$$

V-5 LIMITES EXPONENCIALES

Los Límites Exponenciales son Límites de Funciones Exponenciales. Sus Indeterminaciones se resuelven por el siguiente Teorema:



En el reemplazo directo el anterior Límite es Indeterminado, sin embargo recurriendo a artificios algebraicos (Binomio de Newton), puede obtenerse el típico desarrollo del Número Natural: *e*

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2.718281\ldots = e$$

Ej 5-11

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{2}{x}} = (1 + 0)^{\frac{2}{0}} = 1^{\infty}$$

Indeterminación de la Forma: 1^{∞}

$$= \lim_{x \to 0} \left[(1 + x)^{\frac{1}{x}} \right]^2$$

Reordenando el exponente, para sí expresar el Límite dado, como una forma del Límite anterior: *e* (Teorema T5-8)

$$= [e]^2 = e^2$$

La expresión entre corchetes es: *e* en el Límite, aplicando esta forma y simplificando luego, se obtiene el resultado.

5-27 Resolver los siguientes Límites Exponenciales:

a)

$$\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = (1 + 3 \cdot 0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

Indeterminación.

$$= \lim_{x \to 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^3$$

Reordenando el exponente. La expresión en el Binomio que suma a: 1 debe también dividir al exponente.

$$= [e]^3 = e^3$$

Así se obtiene la forma de: *e*, simplificando luego.

b)

$$\lim_{x \to 0} (1 + 8x)^{\frac{1}{4x}} = (1 + 8 \cdot 0)^{\frac{1}{4 \cdot 0}} = 1^{\infty}$$

Indeterminación.

$$= \lim_{x \to 0} \left[(1 + 8x)^{\frac{1}{8x}} \right]^{\frac{8}{4}} = [e]^2 = e^2$$

Reordenando el exponente, llevando a la forma de: *e* o del T5-8

c)

$$\lim_{x \to 0} (1 - 5x)^{\frac{3}{x}} = (1 - 5 \cdot 0)^{\frac{3}{0}} = 1^{\infty}$$

Indeterminación.

$$= \lim_{x \to 0} \left[(1 + \{-5x\})^{\frac{1}{-5x}} \right]^{3(-5)} = [e]^{3(-5)} = e^{-15}$$

Reordenando el exponente (Se multiplica y se divide entre: -5)

Así se llega a la Forma General del Límite de: *e*

d)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = 1^{\infty}$$

Indeterminación de la Forma: 1^{∞} : Efectuando un Cambio de Variable: $u = \frac{1}{x}$; Si $x \to \infty$ $\Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Cuando *x* tiende a infinito, la nueva variable *u* tiende a 0. Así se obtiene la Forma de *e*

5-28 Resolver los siguientes Límites Exponenciales:

a)

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{1-0}{1+0}\right]^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}\right]^{(-1)}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{[e]^{-1}}{e}=e^{-2}$$

Indeterminación de la Forma: 1^{∞}

Separando el exponente para el numerador y denominador.

En el numerador, se ordena el exponente, para que presente la Forma de: *e* (Si -*x* está en el binomio, el mismo -*x* debe estar en el exponente). En el denominador directamente se aplica la Forma de *e*.

b)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}=(1+0)^{\frac{1+0}{0}}=1^{\infty}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)$$

$$=e(1+0)=e$$

Indeterminación de la Forma: 1^{∞}

Descomponiendo el exponente.

Separando en producto de factores.

El primer factor posee la Forma de: *e*, reemplazando y simplificando.

c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\left(\frac{\infty}{\infty+1}\right)^{\infty}=\frac{\infty^{\infty}}{(\infty+1)^{\infty}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1^{x}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$$

$$=\frac{1}{e}$$

Indeterminación de la Forma: ∞/∞

Propiedad de Fracciones, el numerador pasa a dividir al denominador.

Distribuyendo exponentes en el cociente. Note que: $1^{x}=1$

Aplicando la Forma del Límite de: *e* (Ver Ej 5-27-d) en el denominador.

d)

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{x^{2}-1}\right]^{x-1}=\left[\frac{1-1}{1^{2}-1}\right]^{1-1}=\left(\frac{0}{0}\right)^{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}\right]^{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+1}\right]^{x-1}$$

$$=\left[\frac{1}{1+1}\right]^{1-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$$

Indeterminación.

Factorizando el denominador.

Simplificando factores iguales y reemplazando.

e)

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\right]^{\frac{2x}{x+1}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]^{\frac{2\cdot\infty}{\infty+1}}=0^{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\right]^{\frac{2}{1+1/x}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]^{\frac{2}{1+1/\infty}}=0^{2}=0$$

Indeterminación.

En el exponente se dividen tanto el numerador como denominador entre: *x*

Reemplazando y simplificando el resultado. Note el uso de la Regla para evitar Indeterminaciones de la Forma: ∞/∞

f)

$$\lim_{x\to 3}(x-2)^{\frac{1}{x-3}}=(3-2)^{\frac{1}{3-3}}=1^{\infty}$$

$$=\lim_{u\to 0}([u+3]-2)^{\frac{1}{u}}$$

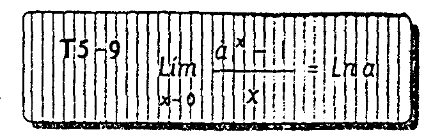
$$=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

Indeterminación de la Forma: 1^{∞}. Efectuando un Cambio de Variable: $u=x-3 \Rightarrow x=u+3$; Si: $x\to 3 \Rightarrow u\to 0$

Cuando x tiende a 3, la nueva variable *u* tiende a 0

Reemplazando y ordenando se obtiene la Forma de *e*

Otros Límites Exponenciales, se resuelven aplicando el siguiente Teorema:



$$\text{T5-9} \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = Ln\, a$$

Para demostrar este Teorema, se aplican los siguientes pasos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{a^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

En el reemplazo directo, se presenta la Indeterminación de la Forma: 0/0

Si: $a^x - 1 = u \Rightarrow a^x = 1 + u$

Efectuando un Cambio de variable.

$$Ln(a^x) = Ln(1 + u)$$

$$x\, Ln\, a = Ln(1 + u)$$

$$x = \frac{Ln(1 + u)}{Ln\, a}$$

Para despejar: x se aplican Logaritmos Neperianos a los dos miembros de la Igualdad.

Note que Si: $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$

Por tanto la nueva variable: u también tiende a cero.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\frac{Ln(1 + u)}{Ln\, a}}$$

Retornando al Límite original, con la nueva variable.

$$= \lim_{u \to 0} \frac{Ln\, a}{\frac{1}{u} Ln(1 + u)}$$

Reordenando el Límite (Regla del Producto de extremos y Producto de medios)

Bajando: u al denominador a dividir.

$$= \lim_{u \to 0} \frac{Ln\, a}{Ln\left[(1 + u)^{\frac{1}{u}}\right]}$$

Usando luego la Propiedad de Logaritmos, que permite llevar: u al exponente.

Así se logra que el denominador, posea la forma del Límite: e

$$= \frac{Ln\, a}{Ln[e]} = \frac{Ln\, a}{1} = Ln\, a$$

Ej 5-12 Resolver el siguiente Límite Exponencial: $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \frac{3^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$= Ln\, 3$$

Indeterminación de la forma: 0/0

Aplicando el Límite básico antes demostrado T5-9, tomando: $a = 3$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = Ln\, a$

5-29 Resolver los siguientes Límites Exponenciales:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{7^{5x} - 1}{x} = \frac{7^{5 \cdot 0} - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(7^5)^x - 1}{x}$$

Reordenando: $7^{5x} = (7^5)^x$, para así aplicar el Limite básico del T5-9.

$$= Ln(7^5) = 5\, Ln\, 7$$

Considerando que: $a = 7^5$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{2^x - 1} = \frac{4^0 - 1}{2^0 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

Para llegar a la forma básica del Límite anterior, se divide tanto el numerador, como denominador entre: x

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4^x - 1}{x}}{\frac{2^x - 1}{x}} = \frac{Ln\, 4}{Ln\, 2} = \frac{Ln\, 2^2}{Ln\, 2} = 2$$

Aplicando la forma del Límite del T5-9 tanto en el numerador, como denominador

5-30 Resolver los siguientes Límites Exponenciales:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^0 - 1}{0} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicando el Teorema para Límites Exponenciales (T5-9)

$= Ln\, e = 1$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{0} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

Sumando y restando 1 en el numerador, para así tomar la forma del Límite anterior.

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{x}$

Se agrupan las expresiones, para aplicar el Límite básico de esta forma (Ver T5-9).

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \to 0} \dfrac{(e^{-1})^x - 1}{x}$

Note que: $Ln\, e = 1$

$= Ln\, e - Ln(e^{-1}) = Ln\, e + Ln\, e = 2$

c) $\lim_{x \to a} \dfrac{a^x - a^a}{x - a} = \dfrac{a^a - a^a}{a - a} = \dfrac{0}{0}$

Efectuando un Cambio de variable: $u = x - a\, ;\ x \to a \Rightarrow u \to 0$

$= \lim_{u \to 0} \dfrac{a^{u+a} - a^a}{u} = \lim_{u \to 0} a^a \left(\dfrac{a^u - 1}{u} \right)$

Factorizando a^a y reordenando la expresión. Una vez obtenida la forma del Límite básico, se aplica el Teorema.

$= a^a\, Ln\, a$

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^x - a^a}{x - a} = \dfrac{a^a - a^a}{a - a} = \dfrac{0}{0}$

Efectuando un Cambio de variable: $u = x - a\, ;\ \ x \to a \Rightarrow u \to 0$

$= \lim_{u \to 0} \dfrac{(u+a)^{u+a} - (u+a)^a}{a} = \lim_{u \to 0} \dfrac{(u+a)^a[(u+a)^u - 1]}{u}$

Factorizando $(u + a)^a$, luego desarrollando por el Binomio de Newton.

$$= \lim_{u \to 0} (u+a)^a \frac{u^u + \frac{u}{1!}u^{u-1}a + \frac{u(u-1)}{2!}u^{u-2}a^2 + \dots + \frac{u}{1!}ua^{u-1} + a^u - 1}{u}$$

$$= \lim_{u \to 0} (u+a)^a \left[\frac{u(u^{u-1} + \frac{u}{1!}u^{u-2} + \frac{u(u-1)}{2!}u^{u-3}a^2 + \dots + \frac{u}{1!}a^{u-1})}{u} + \frac{a^u - 1}{u} \right]$$

$$= \lim_{u \to 0} (u+a)^a \left[u^{u-1} + \frac{u}{1!}u^{u-2}a + \frac{u(u-1)}{2!}u^{u-3}a^2 + \dots + ua^{u-1} + \frac{a^u - 1}{u} \right]$$

$$= (0+a)^a \left[0^{0-1} + \frac{0}{1!}0^{0-2}a + \frac{0(0-1)}{2!}0^{0-3}a^2 + \dots + 0a^{0-1} + Ln\, a \right] = a^a\, Ln\, a$$

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{8x} - e^{2x}}{e^{6x} - e^{4x}} = \dfrac{e^{8\cdot 0} - e^{2\cdot 0}}{e^{6\cdot 0} - e^{4\cdot 0}} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

Indeterminación. Buscando la Forma general del Límite del T5-9

Sumando restando 1 tanto en el numerador como denominador.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{8x} - e^{2x} + 1 - 1}{e^{6x} - e^{4x} + 1 - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(e^8)^x - 1}{x} - \frac{(e^2)^x - 1}{x}}{\frac{(e^6)^x - 1}{x} - \frac{(e^4)^x - 1}{x}}$$

Dividiendo entre x, tanto al numerador como denominador.

$$= \frac{Ln(e^8) - Ln(e^2)}{Ln(e^6) - Ln(e^4)} = \frac{8-2}{6-4} = 3$$

Se agrupan las expresiones, para aplicar el Límite básico de esta forma (T5-9).

LÍMITES LOGARÍTMICOS

Son Límites de Funciones Logarítmicas, cuyas Indeterminaciones, se resuelven aplicando las clásicas Propiedades de los Logaritmos y las Reglas de los Límites Exponenciales.

Ej 5-13 Resolver los siguientes Límites Logarítmicos:

$$\lim_{x\to\infty} Ln(x+1) - Ln\,x = Ln(\infty + 1) - Ln\,\infty = \infty - \infty$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to\infty} Ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Por Propiedad del Logaritmo de un cociente.

$$= Ln\left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = Ln(1 + 0) = 0$$

Simplificando el cociente y reemplazando.

5-31 Resolver los siguientes Límites Logarítmicos:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{Ln(1+x)}{x} = \frac{Ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

Reordenando la expresión dada.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} Ln(1+x) = \lim_{x\to 0} Ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

Usando la Propiedad del Logaritmo de una potencia.

$$= Ln\,e = 1$$

La expresión entre corchetes es: e

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{Ln\,x} = \frac{1-1}{Ln\,1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

Efectuando el Cambio de variable:

$u = x - 1 \quad x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{Ln(1+u)}$$

Se efectúa este cambio buscando la forma del Límite de: e (Donde su variable tiende a cero)

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{1}{u} Ln(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{Ln[(1+u)^{\frac{1}{u}}]}$$

La expresión entre corchetes es: e

$$= \frac{1}{Ln\,e} = \frac{1}{1} = 1$$

c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{Ln(1+6^x)}{Ln(1+3^x)} = \frac{Ln(1+6^\infty)}{Ln(1+3^\infty)} = \frac{Ln\,\infty}{Ln\,\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminación.

Factorizando dentro de cada binomio

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{Ln\;6^x\left(1 + \frac{1}{6^x}\right)}{Ln\;3^x\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{Ln\,6^x + Ln\left(1 + \frac{1}{6^x}\right)}{Ln\,3^x + Ln\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\,Ln\,6 + Ln\left(1 + \frac{1}{6^x}\right)}{x\,Ln\,3 + Ln\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)}$$

Usando Propiedades de Logaritmos.

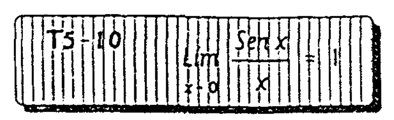
Dividiendo tanto al numerador como denominador entre x.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{Ln\,6 + \frac{Ln\left(1 + \frac{1}{6^x}\right)}{x}}{Ln\,3 - \frac{Ln\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)}{x}} = \frac{Ln\,6 + \frac{Ln\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)}{\infty}}{Ln\,3 + \frac{Ln\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)}{\infty}} = \frac{Ln\,6}{Ln\,3}$$

Simplificando y reemplazando

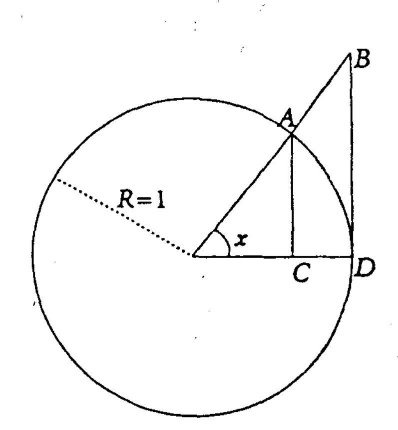
V-6 LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

Los Límites Trigonométricos, son aquellos Límites de Funciones Trigonométricas, cuyas Indeterminaciones, se resuelven usando el Teorema:



Se demuestra el Teorema T5-10: $\lim_{x \to 0} \frac{Sen\,x}{x} = 1$

Efectuando la construcción geométrica adjunta, El Radio de la Circunferencia es: 1 (x en Radianes)



Se cumple la Desigualdad:

$$\overline{AC} < \overline{AD} < \overline{DB}$$ Por la gráfica

$$|Sen\,x| < |x| < |Tan\,x|$$ Por Trigonometría.

$$|1| < \left|\frac{x}{Sen\,x}\right| < \left|\frac{1}{Cos\,x}\right|$$ Dividiendo entre $|Sen\,x|$

$$1 > \left|\frac{Sen\,x}{x}\right| > |Cos\,x|$$ Invirtiendo

$$\lim_{x \to 0} 1 > \lim_{x \to 0} \left|\frac{Sen\,x}{x}\right| > \lim_{x \to 0} |Cos\,x|$$

$$1 > \lim_{x \to 0} \left|\frac{Sen\,x}{x}\right| > 1$$

Para que se cumpla la relación, a su vez necesariamente debe cumplirse que: $\lim_{x \to 0} \frac{Sen\,x}{x} = 1$

Ej 5-14 Se resuelve el Límite Trigonométrico: $\lim_{x \to 0} \frac{Sen\,x}{2x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen\,x}{2x} = \frac{Sen\,0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{Sen\,x}{x}\right)$$

Por tratarse de un Límite Trigonométrico se lleva a la Forma del Límite básico de los Límites Trigonométricos T5-10.

$$= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

Separando la constante 2 del denominador. La expresión entre paréntesis según el Límite básico es 1.

5-32 Resolver los siguientes Límites Trigonométricos

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{Sen\,5x}{x} = \frac{Sen\,5 \cdot 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación, se debe llevar a la Forma de T5-10

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{Sen\,5x}{5x}\right) 5$$

Como no es posible sacar el 5 de la Expresión de: *Sen*. Para lograr la Forma del Límite requerida, se multiplica y divide la fracción por: 5, de esa manera lo mismo que actúa como ángulo queda dividiendo.

$$= (1)\,5 = 5$$

La expresión entre paréntesis es: 1 en el Límite.

b) $$\lim_{x \to \infty} x\,Sen\frac{1}{x} = \infty\,Sen\frac{1}{\infty} = \infty\,Sen\,0 = \infty \cdot 0$$

Indeterminación. Efectuando el Cambio de variable: $u = \frac{1}{x}$ Si: $x \to \infty \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1}{u} Sen\,u = \lim_{u \to 0} \frac{Sen\,u}{u} = 1$$

Así se obtiene la forma básica de los Límites Trigonométricos, vista en el T5-10

5-33 Resolver los siguientes Límites Trigonométricos:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{Sen\,8x}{Sen\,2x} = \frac{Sen\,8\cdot 0}{Sen\,2\cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Buscando llevar el Límite a la Forma básica de los Límites Trigonométricos del Teorema T5-10; se divide tanto el numerador como denominador entre: x

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen\,8x}{x}}{\frac{Sen\,2x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{Sen\,8x}{8x})\,8}{(\frac{Sen\,2x}{2x})\,2}$$

Luego se multiplica y divide por constantes. que permitan expresar tanto al numerador como denominador en la Forma del Límite del T5-10

$$= \frac{(1)\,8}{(1)\,2} = 4$$

Las expresiones entre paréntesis son 1. Reemplazando y simplificando.

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{Sen\,7x + Sen\,5x}{Sen\,3x + x} = \frac{Sen\,7\cdot 0 + Sen\,5\cdot 0}{Sen\,3\cdot 0 + 0} = \frac{0+0}{0+0} = \frac{0}{0}$$

Dividiendo el numerador y denominador entre: x

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen\,7x + Sen\,5x}{x}}{\frac{Sen\,3x + x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{Sen\,7x}{7x})\,7 + (\frac{Sen\,5x}{5x})\,5}{(\frac{Sen\,3x}{3x})\,3 + 1}$$

Multiplicando y dividiendo por constantes, para luego aplicar el Límite básico.

$$= \frac{(1)7 + (1)5}{(1)3 + 1} = 3$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{Arcsen\,x}{x} = \frac{Arcsen\,0}{0} = \frac{0}{0}$$

Efectuando el Cambio de variable:

$u = Arcsen\,x \Rightarrow Sen\,u = x$ Si: $x\to 0 \Rightarrow u\to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{Sen\,u} = 1$$

De esa manera se logra la forma del Límite básico de las Trigonométricas (No afecta el que se encuentre invertido)

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{Tan\,x}{x} = \frac{Tan\,0}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

Llevando la Función *Tan* a términos de *Sen*: usando relaciones trigonométricas

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen\,x}{Cos\,x}}{x} = \lim_{x\to 0} (\frac{Sen\,x}{x}) \frac{1}{Cos\,x}$$

Reordenando

Reemplazando y aplicando el T5-10

$$= (1)\frac{1}{1} = 1$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - Cos\,x}{x} = \frac{1 - Cos\,0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - Cos\,x}{x}\,\frac{1 + Cos\,x}{1 + Cos\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{1^2 - Cos^2 x}{x(1 + Cos\,x)}$$

Se multiplica tanto al numerador como denominador por: $1 + Cos\,x$, para así obtener una Identidad trigonométrica, que permite llevar a la forma del Límite básico.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{Sen^2 x}{x(1 + Cos\,x)} = \lim_{x\to 0} (\frac{Sen\,x}{x}) \frac{Sen\,x}{1 + Cos\,x}$$

$$= (1)\frac{Sen\,0}{1 + Cos\,0} = (1)\frac{0}{1+1} = 0$$

Reordenando, se llega al resultado final.

f) $$\lim_{x\to 0} \frac{Cos\,x}{x} = \frac{Cos\,0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Reemplazando directamente, no se obtiene Indeterminación alguna, por tanto queda ya calculado el Límite.

5-34 Resolver el Límite Trigonométrico:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Tan\,x - Sen\,x}{x^3} = \frac{Tan\,0 - Sen\,0}{0^3} = \frac{0}{0}$$ Indeterminación

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen\,x}{Cos\,x} - Sen\,x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x - Cos\,x\,Sen\,x}{x^3\,Cos\,x}$$

Usando: $Tan\,x = Sen\,x/Cos\,x$

Efectuando operaciones y simplificaciones.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x(1 - Cos\,x)}{x^3\,Cos\,x} \cdot \frac{1 + Cos\,x}{1 + Cos\,x}$$

Multiplicando, dividiendo: $(1 + Cos\,x)$, para así llegar a una Identidad.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x(1^2 - Cos^2 x)}{x^3 Cos\,x(1 + Cos\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x(Sen^2 x)}{x^3 Cos\,x(1 + Cos\,x)}$$

Por Diferencia de Cuadrados y por Identidad Trigonométrica, se llega a: $Sen^2 x$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{Sen\,x}{x}\right)\left(\frac{Sen\,x}{x}\right)\left(\frac{Sen\,x}{x}\right) \frac{1}{Cos\,x\,(1 + Cos\,x)}$$

$$= (1)(1)(1) \frac{1}{Cos\,0\,(1 + Cos\,0)} = \frac{1}{2}$$

Reordenado para aplicar el Límite del TS-10

Ej 5-15 Se resuelve un Límite Trigonométrico con variable que tiende a un valor diferente de cero.

$$\lim_{x\to \pi} \frac{Sen\,x}{x - \pi} = \frac{Sen\,\pi}{\pi - \pi} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación.

Como la variable no tiende a cero, antes de cualquier otro procedimiento, se debe efectuar un Cambio de variable, de manera que la nueva variable si tienda a cero.

$$= \lim_{u\to 0} \frac{Sen(u + \pi)}{u}$$

Efectuando el Cambio de variable: $u = x - \pi$
Por tanto Si: $x \to \pi \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{Sen\,u\,Cos\,\pi + Sen\,\pi\,Cos\,u}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{Sen\,u\,(-1) + (0)\,Cos\,u}{u}$$

Desarrollando el Seno de una Suma. Simplificando de acuerdo a valores conocidos: $Cos\,\pi = -1$; $Sen\,\pi = 0$; Aplicando al Límite del TS-10.

$$= \lim_{u\to 0} -\left(\frac{Sen\,u}{u}\right) = -1$$

5-35 Resolver el Límite Trigonométrico:

$$\lim_{x\to 1} \frac{Cos\,\frac{\pi}{2}x}{1 - x} = \frac{Cos\,\frac{\pi}{2}1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Efectuando el Cambio de variable: $u = 1 - x$
Si: $x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{Cos\,\frac{\pi}{2}(1 - u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{Cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2}\right)}{u}$$

Ordenando la expresión afectada por *Coseno*

$$= \lim_{u\to 0} \frac{Cos\,\frac{\pi}{2}\,Cos\,\frac{\pi u}{2} + Sen\,\frac{\pi}{2}\,Sen\,\frac{\pi u}{2}}{u}$$

Desarrollando el *Coseno* de una diferencia.

Simplificando por valores conocidos:

$Cos\,\frac{\pi}{2} = 0$; $Sen\,\frac{\pi}{2} = 1$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{(0)\,Cos\,\frac{\pi u}{2} + (1)\,Sen\,\frac{\pi u}{2}}{u} = \lim_{u\to 0} \left(\frac{Sen\,\frac{\pi u}{2}}{\frac{\pi}{2}u}\right)\frac{\pi}{2}$$

Ordenando (Multiplicando y dividiendo por $\pi/2$) de manera que se aplique el Límite del TS-10

$$= (1)\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

5-36 Resolver los siguientes Límites Trigonométricos:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{Sen} x - \operatorname{Sen} a}{x - a} = \dfrac{\operatorname{Sen} a - \operatorname{Sen} a}{a - a}$

Indeterminación

Para llevar a la Forma del Límite básico, se precisa de un Cambio de variable: $u = x - a$

Si: $x \to a \Rightarrow u \to 0$

Note que la nueva variable u tiende a cero.

Reordenando y aplicando los resultados obtenidos en: T5-10 ; P-5-33-e

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{Sen}(u + a) - \operatorname{Sen} a}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{Sen} u \operatorname{Cos} a + \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} u - \operatorname{Sen} a}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{Sen} u \operatorname{Cos} a - \operatorname{Sen} a(1 - \operatorname{Cos} u)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \left(\frac{\operatorname{Sen} u}{u}\right) \operatorname{Cos} a - \operatorname{Sen} a \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} u}{u}\right)$$

$$= (1)\operatorname{Cos} a - \operatorname{Sen} a\,(0) = \operatorname{Cos} a$$

b)

$$\lim_{x\to 1} (1 - x)\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2}x = (1 - 1)\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2}1 = 0\cdot\infty$$

Indeterminación

Por tratarse de un Límite Trigonométrico, se debe llevar a la Forma básica.

Previamente se hace un Cambio de variable: $u = 1 - x$ Si: $x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

Ya que en el Límite básico, la variable tiende a cero.

Reemplazando y desarrollando las Funciones *Seno* y *Coseno*, reemplazando luego los valores conocidos.

Se multiplica y divide por: $\pi/2$, así se llega al Límite básico.

$$= \lim_{u\to 0} u \operatorname{Tan}\frac{\pi}{2}(1 - u) = \lim_{u\to 0} u \frac{\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2})}{\operatorname{Cos}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2})}$$

$$= \lim_{u\to 0} u \frac{\operatorname{Sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{Cos}\frac{\pi u}{2} - \operatorname{Sen}\frac{\pi u}{2}\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}\operatorname{Cos}\frac{\pi u}{2} - \operatorname{Sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{Sen}\frac{\pi u}{2}}$$

$$= \lim_{u\to 0} u \frac{(1)\operatorname{Cos}\frac{\pi u}{2} - \operatorname{Sen}\frac{\pi u}{2}(0)}{(0)\operatorname{Cos}\frac{\pi u}{2} + (1)\operatorname{Sen}\frac{\pi u}{2}} = \lim_{u\to 0} \frac{u \operatorname{Cos}\frac{\pi u}{2}}{\operatorname{Sen}\frac{\pi u}{2}}$$

$$= \lim_{u\to 0} \left(\frac{\frac{\pi u}{2}}{\operatorname{Sen}\frac{\pi u}{2}}\right) \frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi u}{2}}{\frac{\pi}{2}} = (1)\frac{\operatorname{Cos} 0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{Sen}\pi x}{1 - \sqrt{x}} = \dfrac{\operatorname{Sen}\pi 1}{1 - \sqrt{1}} = \dfrac{\operatorname{Sen}\pi}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$

Indeterminación

Racionalizando la Expresión del denominador

Buscando que la variable tienca a cero. Se efectúa un Cambio de variable:

$u = 1 - x$ Si: $x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

Reemplazando, desarrollando y simplificando.

Luego se aplica la forma del Límite básico de los Trigonométricos

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{Sen}\pi x}{1 - \sqrt{x}}\,\frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{Sen}\pi x}{1 - x}(1 + \sqrt{x})$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{Sen}\pi(1 - u)}{u}(1 + \sqrt{1 - u})$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{Sen}\pi \operatorname{Cos}\pi u - \operatorname{Sen}\pi u \operatorname{Cos}\pi}{u}(1 + \sqrt{1 - u})$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{Sen}\pi u}{u}(1 + \sqrt{1 - u}) = \lim_{u\to 0} \left(\frac{\operatorname{Sen}\pi u}{\pi u}\right)\pi(1 + \sqrt{1 - u})$$

$$= (1)\pi(1 + \sqrt{1 - 0}) = 2\pi$$

5-37 Resolver los siguientes Límites Trigonométricos:

a)

$$\lim_{x\to 0}(1+Sen\,x)^{\frac{1}{x}} = (1+Sen\,0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+Sen\,x)^{\frac{1}{Sen\,x}}\right]^{\frac{Sen\,x}{x}}$$

Llevando a la forma del Límite de: e (T5-8 Límite básico de los Exponenciales)

En el exponente se conforma el Límite del T5-10. Límite básico de los Límites Trigonométricos.

$$= [e]^{(1)} = e$$

b)

$$\lim_{x\to 0}(Cos\,x)^{\frac{1}{x}} = (Cos\,0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

Indeterminación

Por Trigonometría, relación de $Cos\,x$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1-Sen^2x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1-Sen^2x)^{\frac{1}{2x}}$$

Simplificando el exponente

Desarrollando por Diferencia de cuadrados

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+Sen\,x)(1-Sen\,x)\right]^{\frac{1}{2x}}$$

Distribuyendo el exponente y aplicando Límites básicos.

$$= \lim_{x\to 0}(1+Sen\,x)^{\frac{1}{2x}}(1-Sen\,x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+Sen\,x)^{\frac{1}{Sen x}}\right]^{(\frac{Sen x}{x})\frac{1}{2}}\left[(1+(-Sen\,x))^{\frac{1}{-Sen x}}\right]^{(\frac{Sen x}{x})\frac{-1}{2}}$$

$$= [e]^{(1)\frac{1}{2}}[e]^{(1)\frac{-1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = e^0 = 1$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+Sen\,x}-\sqrt{1+Tan\,x}}{x} = \frac{\sqrt{1+Sen\,0}-\sqrt{1+Tan\,0}}{0} = \frac{0}{0}$$

Por la presencia de Radicales, se debe racionalizar el numerador.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+Sen\,x}-\sqrt{1+Tan\,x}}{x}\,\frac{\sqrt{1+Sen\,x}+\sqrt{1+Tan\,x}}{\sqrt{1+Sen\,x}+\sqrt{1+Tan\,x}}$$

Tras multiplicar y dividir por el Conjugado, se simplifica.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+Sen\,x})^2-(\sqrt{1+Tan\,x})^2}{x(\sqrt{1+Sen\,x}+\sqrt{1+Tan\,x})}$$

Expresando $Tan\,x$ en términos de $Sen\,x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{Sen\,x-Tan\,x}{x(\sqrt{1+Sen\,x}+\sqrt{1+Tan\,x})} = \lim_{x\to 0}\frac{Sen\,x-\frac{Sen\,x}{Cos\,x}}{x(\sqrt{1+Sen\,x}+\sqrt{1+Tan\,x})}$$

Reordenando para buscar la forma del Límite Trigonométrico.

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{Sen\,x}{x}\right)\frac{Cos\,x-1}{Cos\,x(\sqrt{1+Sen\,x}+\sqrt{1+Tan\,x})}$$

$$= (1)\frac{Cos\,0-1}{Cos\,0(\sqrt{1+Sen\,0}+\sqrt{1+Tan\,0})} = 1\,\frac{0}{2} = 0$$

d)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Sen\,x}{x} = \frac{Sen\,\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\,Sen\,x$$

Reordenando. La Función $Sen\,x$, varia entre los valores de -1 hasta 1, cualquiera de ellos, multiplicado por cero es cero

No es necesario conocer el valor de: $Sen\,\infty$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\infty}\,Sen\,\infty = 0\cdot Sen\,\infty = 0$$

5-38 Resolver los siguientes Límites de Funciones Hiperbólicas:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{Senh\ x}{x} = \frac{Senh\ x}{0} = \frac{0}{0}$ — Indeterminación

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{x}$ — Usando la definición de la Función Hiperbólica: *Senh x* en términos de exponenciales (Ver Cap. II-18)

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}(\frac{e^x - e^{-x}}{x})$ — Ordenando la expresión y aplicando los resultados obtenidos en el Límite de: P-5-30-b

$= \frac{1}{2}(2) = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{Cosh\,x - 1}{x^2} = \frac{Cosh\,0 - 1}{0^2} = \frac{0}{0}$ — Indeterminación

$= \lim_{x\to 0} \frac{Cosh\,x - 1}{x^2}\ \frac{Cosh\,x + 1}{Cosh\,x + 1}$ — Multiplicando, dividiendo por: *Cosh x* + 1, en el afán de obtener lüego la Función: *Senh x*

$= \lim_{x\to 0} \frac{Cosh^2x - 1}{x^2(Cosh\,x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{Senh^2x}{x^2(Cosh\,x + 1)}$ — Simplificando y aplicando relaciones de las Funciones Hiperbólicas.

$= \lim_{x\to 0} (\frac{Senh\,x}{x})(\frac{Senh\,x}{x})\ \frac{1}{Cosh\,x + 1}$ — Ordenando y aplicando el resultado del anterior inciso.

$= (1)(1)\ \frac{1}{Cosh\,0 + 1} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to\infty} Tanh\ x = Tanh\ \infty = ??$ — Usando la definición de la Función Hiperbólica de: *Tanh x*

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^\infty - e^{-\infty}}{e^\infty + e^{-\infty}} = \frac{\infty - 0}{\infty + 0} = \frac{\infty}{\infty}$ — Indeterminación

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ — Factorizando: e^x tanto en el numerador como denominador y simplificando.

$= \frac{1 - e^{-2\cdot\infty}}{1 + e^{-2\cdot\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$ — Reemplazando y simplificando

Note que: $e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{Arcsenh\ x}{x} = \frac{Arcsenh\ 0}{0} = \frac{0}{0}$ — Indeterminación

$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{Senh\ u}$ — Efectuando el Cambio de variable: $u = Arcsenh\ x \Rightarrow x = Senh\ u$ Si: $x\to 0 \Rightarrow u\to 0$

$= 1$ — Aplicando el resultado de P-5-38-a

e) $\lim_{x\to 0} \frac{Senh\ x}{Sen\ x} = \frac{Senh\ 0}{Sen\ 0} = \frac{0}{0}$ — Indeterminación, multiplicando y dividiendo por: x, para ordenar y aplicar los resultados del TS-10: P-5-38-a

$= \lim_{x\to 0} (\frac{Senh\ x}{x})(\frac{x}{Sen\ x})$

$= (1)(1) = 1$

Note que en los Límites de Hiperbólicas, la base para su resolución es el Límite del inciso *a*) de este Problema

5-39 Resolver los siguientes Límites de Funciones de distinta naturaleza

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{1^m - 1}{1^n - 1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}$$

El Límite es Algebraico, por tanto factorizando. (Por el método de Cocientes notables o el de Ruffini)

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1}$$

En el numerador quedan m Términos, en el denominador n Términos.

$$= \frac{1^{m-1} + 1^{m-2} + \dots + 1 + 1}{1^{n-1} + 1^{n-2} + \dots + 1 + 1} = \frac{m}{n}$$

Tomando $1^c = 1$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{\sqrt{\infty} + \sqrt[3]{\infty} + \sqrt[4]{\infty}}{\sqrt{2\cdot\infty + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminación. Forma ∞/∞

Como el Límite es Algebraico, se debe dividir entre la potencia de mayor grado.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}} + \sqrt[4]{\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x}}}$$

Observando las potencias el mayor grado, que se observa es el de: 1 /2

Por tanto dividiendo entre: $\sqrt{x}$

Reordenando por Propiedades de radicales.

$$= \frac{1 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{\infty^3}}} + \sqrt[4]{\dfrac{1}{\infty^2}}}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{\infty}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego reemplazando se obtiene el resultado final.

c) $$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a} - 1) = \infty(\sqrt[\infty]{a} - 1) = \infty\cdot 0$$

Indeterminación

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}(a^u - 1)$$

El Límite es Exponencial, llevando a la forma del TS-9, con el Cambio de variable:

$$= \lim_{u\to 0} \frac{a^u - 1}{u} = Ln\ a$$

$u = \dfrac{1}{x}$; Si: $x\to\infty \Rightarrow u\to 0$

d) $$\lim_{x\to 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = (0 + e^0)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty$$

Indeterminación

El Límite es Exponencial, debe llevarse a la forma del Límite de: e (TS-8)

$$= \lim_{x\to 0} \left[e^x(1 + \frac{x}{e^x})\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e(1 + \frac{x}{e^x})^{\frac{1}{x}}$$

Ordenando el exponente. La expresión entre corchetes es e

$$= \lim_{x\to 0} e\left[(1 + \frac{x}{e^x})^{\frac{e^x}{x}}\right]^{\frac{1}{e^x}}$$

$$= e(e)^{\frac{1}{1}} = e^2$$

e) $$\lim_{x\to 0} (Sen\ x)^{\frac{1}{x}} = (Sen\ 0)^{\frac{1}{0}} = 0^\infty = 0$$

No existe Indeterminación, por tanto el Límite se calcula directamente.

5-40 Resolver los siguientes Límites de Funciones de diversa naturaleza:

a) $$\lim_{x\to a} \frac{Ln\, x - Ln\, a}{x - a} = \frac{Ln\, a - Ln\, a}{a - a} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación. Los Límites básicos poseen variables que tienden a cero.

$$= \lim_{u\to 0} \frac{Ln(a+u) - Ln\, a}{u}$$

Por tanto se debe efectuar un Cambio de variable, de manera que la nueva variable tienda a cero:
$u = x - a$; Si: $x \to a \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{Ln(\frac{a+u}{a})}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u} Ln(1 + \frac{u}{a})$$

Se aplica la Propiedad del Logaritmo de un cociente. Se reordena la posición de: u Se aplica la Propiedad del Logaritmo de potencias.

$$= \lim_{u\to 0} Ln\,(1 + \frac{u}{a})^{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to 0} Ln\left[(1 + \frac{u}{a})^{\frac{a}{u}}\right]^{\frac{1}{a}}$$

Reordenando el exponente, de manera que se lleve a la forma del Límite de: e

$$= Ln\,(e)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} Ln\, e = \frac{1}{a}$$

b)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,Sen^2 x + Sen\, x - 1}{2\,Sen^2 x - 3\,Sen\, x + 1} = \frac{2\,Sen^2\frac{\pi}{6} + Sen\frac{\pi}{6} - 1}{2\,Sen^2\frac{\pi}{6} - 3\,Sen\frac{\pi}{6} + 1} = \frac{2(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 1}{2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) + 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{u\to \frac{1}{2}} \frac{2u^2 + u - 1}{2u^2 - 3u + 1}$$

La Indeterminación se resuelve con el Cambio de variable:

$u = Sen\, x \quad x \to \frac{\pi}{6} \Rightarrow u \to \frac{1}{2}$

$$= \lim_{u\to \frac{1}{2}} \frac{(u+1)(2u-1)}{(2u-1)(u-1)} = \lim_{u\to \frac{1}{2}} \frac{u+1}{u-1}$$

El Límite Algebraico que queda, se resuelve por factorización.

$$= \frac{(1/2) + 1}{(1/2) - 1} = -3$$

c) $$\lim_{x\to \infty} Sen[Ln(x+1)] - Sen[Ln\, x] = Sen[Ln(\infty + 1)] - Sen[Ln\,\infty] = Sen\,\infty - Sen\,\infty$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\,Cos \frac{Ln(x+1) + Ln\, x}{2}\, Sen \frac{Ln(x+1) - Ln\, x}{2}$$

Usando Relaciones Trigonométricas.

$$Sen\, A \cdot Sen\, B = 2\,Cos\frac{A+B}{2} \cdot Sen\frac{A-B}{2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\,Cos \frac{Ln\,(x+1)x}{2}\, Sen \frac{Ln(\frac{x+1}{x})}{2}$$

Luego simplificando los Logaritmos que quedan dentro de cada Función Trigonométrica.

$$= \lim_{x\to\infty} 2\,Cos \frac{Ln(x^2 + x)}{2}\, Sen \frac{Ln(1 + \frac{1}{x})}{2}$$

$$= 2\,Cos \frac{Ln(\infty^2 + \infty)}{2}\, Sen \frac{Ln(1 + \frac{1}{\infty})}{2}$$

$$= 2\,Cos\,\infty\; Sen\, 0 = 2\,(Cos\,\infty)\, 0 = 0$$

d) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{x\, Ln\, x} = \frac{1^1 - 1}{1\, Ln\, 1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e^{(Ln\, x^x)} - 1}{(Ln\, x^x)} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

Ordenando y aplicando la Identidad: $f = e^{Ln f}$

Si: $u = Ln\, x^x$; $x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

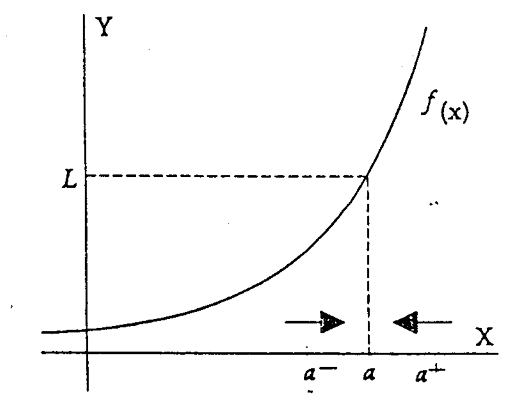
V-7 LÍMITES LATERALES

Anteriormente se ha trabajado con los Límites, indicando que: "x tiende hacia a", sin embargo cabe preguntarse, de que manera, "x tiende hacia a"

En las Funciones Reales de Variable Real, hay dos modos de acercamiento de: x hacia a

LÍMITE LATERAL DERECHO

Se obtiene, cuando desde un valor mayor, x tiende hacia a, su notación es: $\lim_{x \to a^+} f_{(x)}$



LÍMITE LATERAL IZQUIERDO

Se obtiene cuando desde un valor menor, x tiende hacia a, su notación es: $\lim_{x \to a^-} f_{(x)}$

Por el Teorema T5-1 de V-2, el Límite para existir debe ser único, por tanto el Límite existirá si:

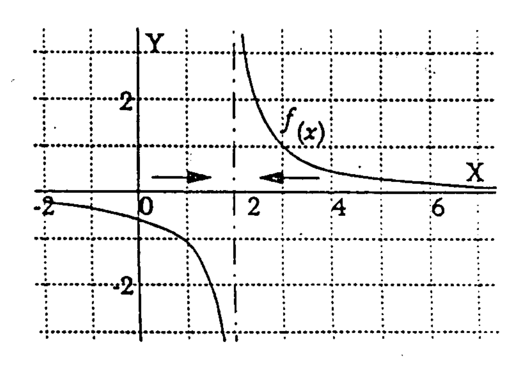
$$\lim_{x \to a^+} f_{(x)} = \lim_{x \to a^-} f_{(x)}$$

Cabe aclarar que: a^+, a^- son iguales en cuanto a su valor, los exponentes indican únicamente el modo de acercamiento de: x hacia a.

Algunas operaciones con estas expresiones son:

$$a^+ - a^- = 0^+ \quad ; \quad \frac{1}{0^+} = \infty \quad ; \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$a^- - a^+ = 0^-$$

Ej 5-16 Se calculan los Límites laterales de: $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$



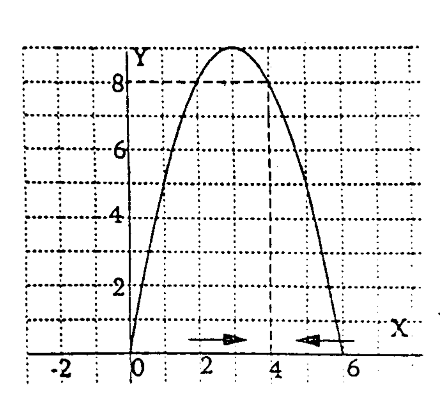
Los Límites Laterales respectivamente son:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^+ - 2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Los Límites Laterales son diferentes, por tanto no existe Límite.

5-41 Hallar los Límites Laterales de: $\lim_{x \to 4} (6x - x^2)$



$$\lim_{x \to 4^+} (6x - x^2) = 6 \cdot 4^+ - (4^+)^2 = 8$$

$$\lim_{x \to 4^-} (6x - x^2) = 6 \cdot 4^- - (4^-)^2 = 8$$

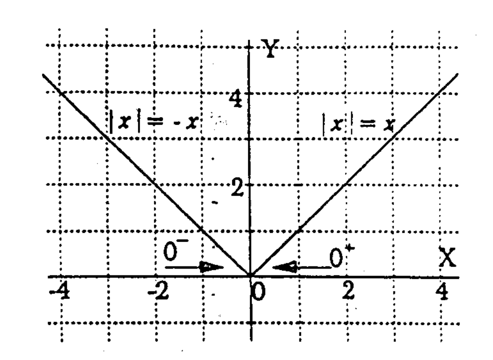
Los Límites Laterales son iguales, por tanto si existe Límite cuyo valor es: 8

En la gráfica se nota que para cualquier modo de acercamiento, el valor del Límite es el mismo, ya que en ambos casos la Función tiende hacia 8.

V-8 LIMITES DE FUNCIONES ESPECIALES

Los Límites Especiales, son Límites de Funciones Especiales cuyas Indeterminaciones, se resuelven de acuerdo a las características de cada Función, sin embargo su adecuado análisis requiere de los Límites Laterales.

<u>Ej 5-17</u> Se calcula el Límite de Función Especial $\lim_{x \to 0} |x|$



Se calculan los Límites Laterales de la Función

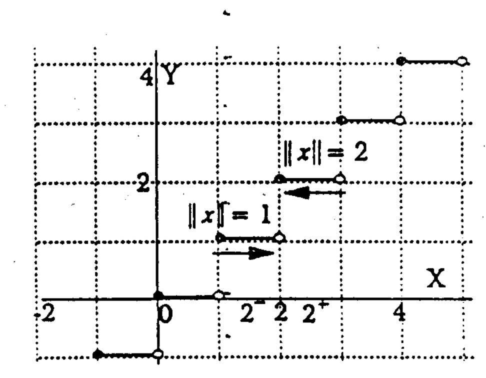
$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} (+x) = 0^+ = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0^- = 0$$

Los Límites Laterales son iguales entre sí, por tanto si existe Límite (De valor: 0)

Note en la gráfica que cuando: x tiende por derecha (0^+) se tiene: $|x| = x$; cuando tiende por izquierda (0^-) se tiene: $|x| = -x$

5-42 Hallar: $\lim_{x \to 2} [\![x]\!]$



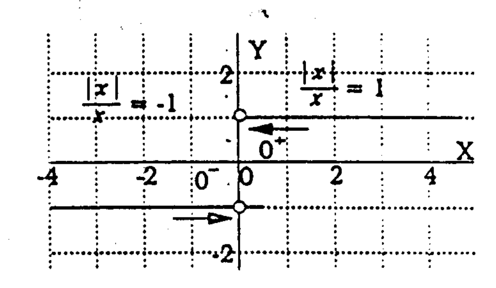
Calculando Límites Laterales de la Función Parte Entera y de acuerdo a características de la Función.

$$\lim_{x \to 2^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 2^+} 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 2^-} 1 = 1$$

Los Límites Laterales difieren, por tanto no existe Límite de la Función.

5-43 Hallar: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$



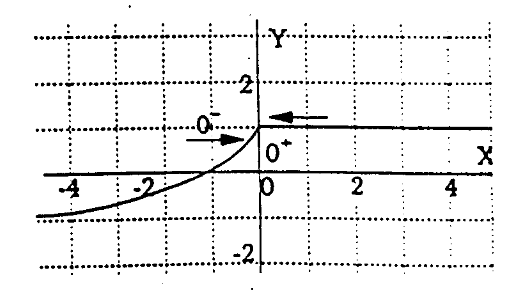
Calculando los Límites Laterales de la Función Signo, de acuerdo a sus características.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(+x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(-x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Los Límites Laterales difieren. No existe Límite de la Función.

5-44 Hallar: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - |x|}{1 - x}$



Calculando Límites Laterales de acuerdo a las características del Valor Absoluto.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - |x|}{1 - x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - (+x)}{1 - x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1 - |x|}{1 - x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - (-x)}{1 - x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + x}{1 - x} = 1$$

Los Límites Laterales son iguales, por tanto si existe Límite. Note que de acuerdo a sus definiciones, las Funciones Especiales cambian, de acuerdo a si la tendencia es por izquierda o por derecha.

V-9 CONTINUIDAD

La Función $f_{(x)}$ se define como Continua en $x = a$; si se cumple:



Para un análisis práctico de una Función, es conveniente desglosar lo anterior en tres requisitos de Continuidad:

i) $f_{(a)}$ está definida

ii) Existe $\lim_{x \to a} f_{(x)}$ $\quad [\lim_{x \to a^+} f_{(x)} = \lim_{x \to a^-} f_{(x)}]$

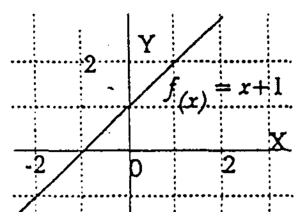
iii) $f_{(a)} = \lim_{x \to a} f_{(x)}$

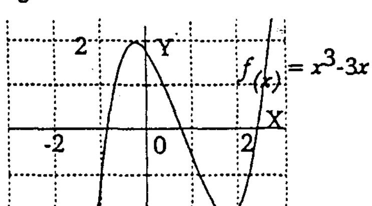
El tercer requisito de Continuidad, precisa del cumplimiento de los dos primeros.

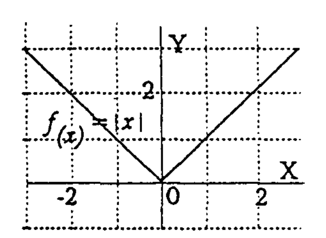
En ese tercer requisito se basa la Continuidad.

Una Función es Continua, si es Continua para todo: $a \in \mathbb{R}$

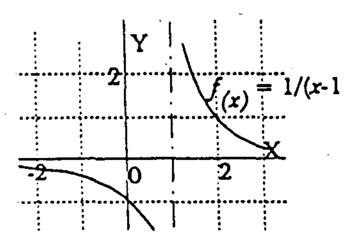
Son gráficas de Funciones Continuas, las siguientes:

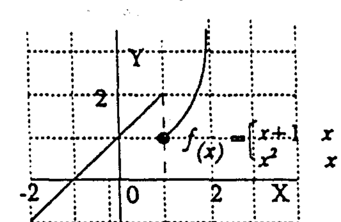


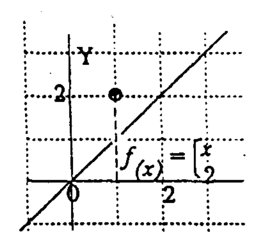




Son gráficas de Funciones No Continuas (O Discontinuas) las siguientes:







Una infantil (Pero útil) descripción, expresa que una Función es Continua, si su gráfica puede trazarse de principio a fin sin levantar el lápiz. Si se presentaran interrupciones y deba levantarse el lápiz, entonces la Función no es Continua.

Ej 5-18 Se determina si la Función: $f_{(x)} = x^2 - 1$ es Continua en: $x = 2$

Para indicar si es Continua la Función, deben revisarse los requisitos de Continuidad, en: $a = 2$

i) $f_{(a)}$ está definida

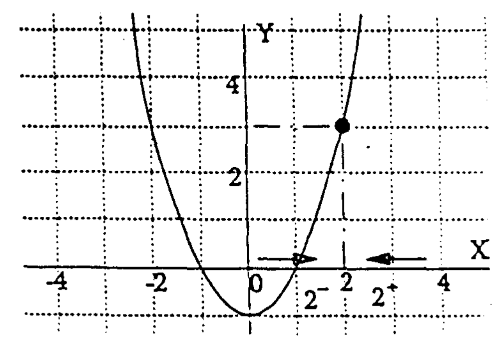
$f_{(2)} = 2^2 - 1 = 3$ Evidente, Función definida

ii) Existe $\lim_{x \to a} f_{(x)}$ calculando Límites Laterales:

$\lim_{x \to a^+} f_{(x)} = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = 3$

$\lim_{x \to a^-} f_{(x)} = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3$

Evidente, existe el Límite



iii) $f_{(a)} = \lim_{x \to a} f_{(x)}$

$3 = 3$

Se cumple la igualdad, entonces al cumplirse todos los requisitos de Continuidad, la Función es Continua en: $x = a = 2$

Se confirma la anterior conclusión, observando la gráfica, que es una curva única sin interrupciones. Se concluye que la Función es Continua, para todos los Reales.

5-45 Determinar si la Función es Continua en todos los Reales: $f_{(x)} = \dfrac{3}{x-1}$

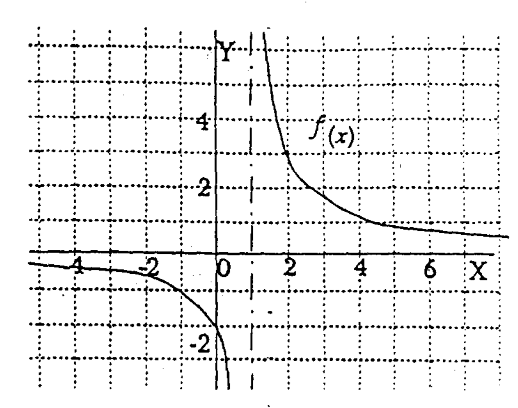
Verificando si cumple con todos los requisitos:

i) $f_{(a)}$ debe estar definida

$f_{(x)} = \dfrac{3}{x-1}$ No está definida en: $x = 1$

La Función no está definida para todo: $x \in \mathbb{R}$; entonces no se cumple el Primer requisito. Luego la Función no es Continua, para todo $x \in \mathbb{R}$

Ya no es necesario revisar los otros requisitos. Exceptuando: $x = 1$; la Función si es Continua en los restantes Números Reales.



5-46 Determinar si es Continua en todos los Números Reales: $f_{(x)} = [\![x]\!]$

i) $f_{(a)}$ está definida

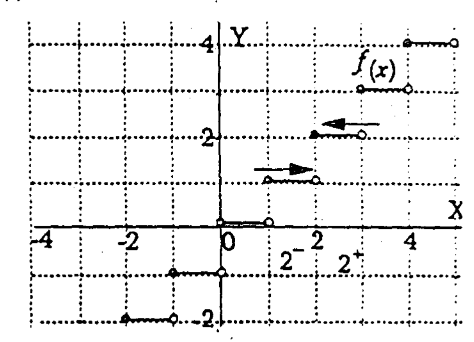
$f_{(a)} = [\![a]\!]$ Evidentemente la Función está definida en todo $a \in R$

ii) Existe $\lim\limits_{x \to a} f_{(x)}$ La Función está definida $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to a^+} = \lim\limits_{x \to a^+} [\![x]\!] = a$

$\lim\limits_{x \to a^-} = \lim\limits_{x \to a^-} [\![x]\!] = a - 1$

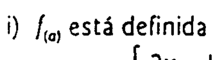
Los Límites Laterales son diferentes, por tanto no existe Límite de la Función.



Al no cumplirse el segundo requisito, la Función Parte Entera no es Continua. (Esta Función no es Continua en todos los Números Reales)

5-47 Determinar si la Función es Continua, para todos los Reales: $f_{(x)} = \begin{cases} 2x - 1 & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$

i) $f_{(a)}$ está definida



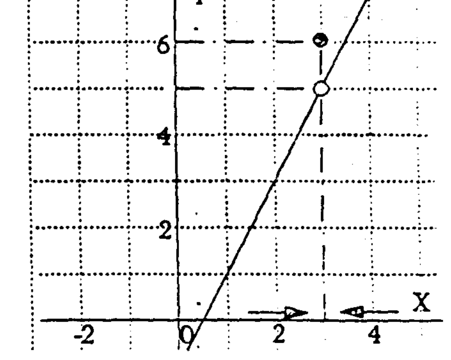
$f_{(x)} = \begin{cases} 2x - 1 & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ Evidente, Función definida para todo $a \in R$

ii) Existe $\lim f_{(x)}$ Calculando Límites Laterales, tomando $a = 3$

$\lim\limits_{x \to a^+} = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x - 1) = 5$

$\lim\limits_{x \to a^-} = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 1) = 5$

Límites Laterales Iguales, por tanto el Límite existe.



iii) $f_{(a)} = \lim\limits_{x \to a} f_{(x)}$



$6 \neq 5$

La igualdad no se cumple, para $a = 3$; por tanto la Función no es Continua

La Función no es Continua, para todos los Reales, en realidad excepto en: $x = a = 3$; la Función es Continua en los restantes Reales.

Para que una Función sea Continua, debe serlo en todos los Números Reales. (Basta que no sea Continua en un punto, para afirmar que la Función es Discontinua en los Reales). Sin embargo haciendo restricciones o excepciones, se pueden tomar ciertos Intervalos, donde la Función sea Continua.

En los anteriores Problemas, la misma gráfica ya indicaba ciertas conclusiones, que se confirman analíticamente

TEOREMAS DE FUNCIONES CONTINUAS

Si las Funciones: $f_{(x)}$; $g_{(x)}$ son Continuas en $x = a$

T5-11) $f + g$ es Continua en: a T5-13) $f \cdot g$ es Continua en: a

T5-12) $f - g$ es Continua en: a T5-14) f / g es Continua en: a

Estos Teoremas se demuestran utilizando la definición de Continuidad.

DISCONTINUIDADES EVITABLES E INEVITABLES

Si una Función Discontinua puede definirse de otra manera, tal que se convierta en Continua, entonces posee Discontinuidad Evitable o Removible.

Si una Función Discontinua, no puede definirse de otra manera, tal que se convierta en Continua, entonces posee Discontinuidad Inevitable o Esencial.

Ej 5-19 Se analiza la Discontinuidad de la Función:
$$f_{(x)} = \begin{cases} x - 1 & x \neq 3 \\ A & x = 3 \end{cases}$$

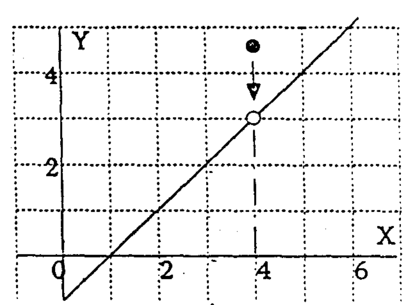
La Función es Discontinua en $x = 3$. Haciendo que se cumpla el 3^er requisito de Continuidad:

$$f_{(a)} = \lim_{x \to a} f_{(x)} = 2$$ Tomando: $a = 3$

$$\Rightarrow A = 2$$ Definiendo nuevamente

$$f_{(x)} = \begin{cases} x - 1 & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

Por tanto la Discontinuidad que presentaba la Función era Evitable.

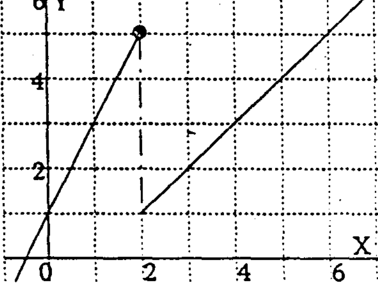


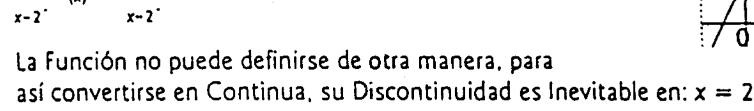
5-48 Analizar la Discontinuidad de:
$$f_{(x)} = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

La Función es Discontinua, ya que no cumple el 2^do requisito de Continuidad en: $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^+} f_{(x)} = \lim_{x \to 2^+} (x - 1) = 1$$ Límites Laterales diferentes.

$$\lim_{x \to 2^-} f_{(x)} = \lim_{x \to 2^-} (2x + 1) = 5$$ No Existe Límite.




La Función no puede definirse de otra manera, para así convertirse en Continua, su Discontinuidad es Inevitable en: $x = 2$

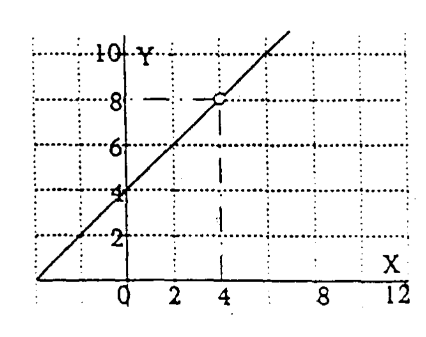
5-49 Analizar la Discontinuidad de la Función:
$$f_{(x)} = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

La Función es Discontinua en $x = 4$

$$f_{(4)} = \frac{4^2 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$ Indeterminación, la Función no está definida en $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 4) = 8$$

Para que la Función sea Continua, debe definirse de la siguiente manera:
$$f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & x \neq 4 \\ 8 & x = 4 \end{cases}$$

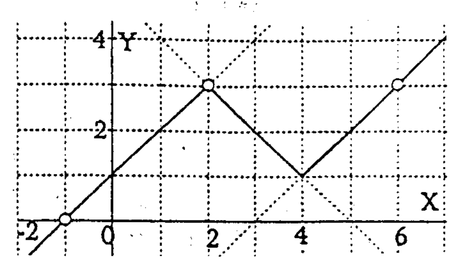


Por tanto la Discontinuidad que existía era Evitable.

5-50 Determinar la Continuidad de la Función:

$$f_{(x)} = \begin{cases} x+1 & x < 2 \\ 5-x & 2 \le x \le 4 \\ x-3 & x > 4 \end{cases}$$

Analizando los requisitos de Continuidad:



i) $f_{(a)}$ está definida, para todo x.

$$f_{(x)} = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 5-x & 2 \le x \le 4 \\ x-3 & x > 4 \end{cases}$$

$f_{(-1)} = 0;\ f_{(2)} = 3;\ f_{(6)} = 3$

Como ejemplos se calculan algunos valores de la Función.

ii) Existe $\lim\limits_{x \to a} f_{(x)}$. Calculando Límites Laterales en $a = 2; a = 4$

$$\lim_{x \to 2^+} f_{(x)} = \lim_{x \to 2^+} (5-x) = 3 \qquad \lim_{x \to 4^+} f_{(x)} = \lim_{x \to 4^+} (x-3) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f_{(x)} = \lim_{x \to 2^-} (x+1) = 3 \qquad \lim_{x \to 4^-} f_{(x)} = \lim_{x \to 4^-} (5-x) = 1$$

Límites Laterales iguales en ambos casos

Existe Límite.

iii) $f_{(a)} = \lim\limits_{x \to a} f_{(x)}$ $\qquad f_{(2)} = \lim\limits_{x \to 2} f_{(x)}$; $3 = 3$ $\qquad f_{(4)} = \lim\limits_{x \to 4} f_{(x)}$; $1 = 1$

Se cumplen las igualdades. Por tanto la Función es Continua, para todos los Reales.

5-51 Hallar A de manera tal que la función sea Continua:

$$f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & x \neq 1 \\ A & x = 1 \end{cases}$$

De acuerdo a los clásicos requisitos de Continuidad, debe cumplirse la igualdad: $A = \lim\limits_{x \to 1} f_{(x)}$ además deben tomarse en cuenta las consideraciones de: P-5-49

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{1^3-1}{1^2-1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación, el Límite es Algebraico, aplicando sus reglas.

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

Factorizando el numerador y denominador.

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Simplificando y reemplazando

$$= \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Entonces, para que la Función sea Continua, debe tomarse: $A = 3/2$

5-52 Hallar una Función Continua en todo x: $\forall x \in \mathbb{R}$, excepto en: $x = 2$

De acuerdo a requisitos de Continuidad, dos Funciones que no son Continuas en: $x = 2$, son las siguientes:

$$f_{(x)} = \frac{1}{x-2}$$

No Definida en: $x = 2$

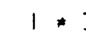
Por tanto no es Continua en 2

No cumple el 1er requisito.

$$f = \begin{cases} x+1 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

$$f_{(a)} = \lim_{x \to 2} f_{(x)}$$

$1 \neq 3$



No cumple el 3er requisito.

IV-10 VERIFICACIÓN DE LIMITES

Actualmente con el uso de las modernas Calculadoras Electrónicas, es posible verificar resultados de los Límites que presentan alguna Indeterminación.

De acuerdo al concepto de Límite, se debe lograr que la Función tienda hacia algún valor, cuando la variable tiende a cierto valor determinado.

Reenplazando en la variable, valores cercanos a su tendencia, se puede determinar la tendencia de la Función.

Ej 5-20

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0} \qquad \text{Si: } f_{(x)}=\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$$

$$f_{(1.99)}=\frac{1.99^2+1.99-6}{1.99^2-3\cdot 1.99+2}=5.04040404$$

$$f_{(2.01)}=\frac{2.01^2+2.01-6}{2.01^2-3\cdot 2.01+2}=4.96039604$$

$$f_{(1.9999)}=\frac{1.9999^2+1.9999-6}{1.9999^2-3\cdot 1.9999+2}=5.00040004$$

$$f_{(2.0001)}=\frac{2.0001^2+2.0001-6}{2.0001^2-3\cdot 2.0001+2}=4.99960004$$

Verificando un Límite, que presenta una Indeterminación. Tomando la Función cuyo Límite se calcula.

Reemplazando valores cercanos a la tendencia de la variable (2), tanto antes como después. Tomando valores mas cercanos aún. Es indudable que el Límite tiende hacia: 5

Por P-5-19-a el Límite es: 5, queda entonces verificado el resultado.

Programando la Función en una Calculadora, los resultados son inmediatos.

5-53 Verificar los resultados de los siguientes Límites:

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$$

$$\text{Si: } f_{(x)}=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

$f_{(0.99)}=1.994987434$

$f_{(1.01)}=2.004987567$

$f_{(0.9999)}=1.999949601$

$f_{(1.0001)}=2.000052001$

El Resultado es: 2 (Ver P-5-21-a)

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Si: } f_{(x)}=\frac{2x+3}{x-1}$$

$f_{(1000)}=2.005005005$

$f_{(1000000)}=2.00000500$

Se toman valores a reemplazar, cada vez mas altos, ya que la variable tiende a Infinito. Evidentemente el resultado es: 2 (Ver Ej 5-9)

c)

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}=1^{\infty}$$

$$\text{Si: } f_{(x)}=(1+3x)^{1/x}$$

$f_{(-0.01)}=21.02938506$

$f_{(0.01)}=19.21863198$

$f_{(-0.000001)}=20.08562731$

$f_{(0.000001)}=20.08544653$

Según P-5-27-a ; el resultado exacto es $e^3=20.08553692$; la aproximación es evidente.

d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$$

$$\text{Si: } f_{(x)}=\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$$

$f_{(0.99)}=1.570731734$

$f_{(1.01)}=1.570731724$

$f_{(0.9999)}=1.570796993$

$f_{(1.0001)}=1.570795993$

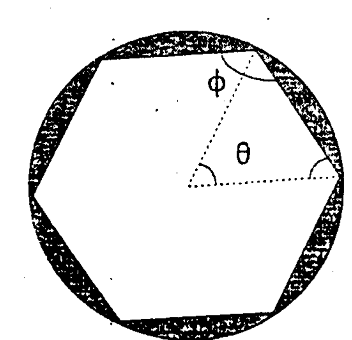
Por P-5-35 el resultado es:
$\pi/2=1.570796327$ según se verifica.

V-11 APLICACIONES DE LOS LÍMITES

La aplicación fundamental de los Límites es la de permitir la definición de otros conceptos. Los Límites por si mismos brindan además otras aplicaciones, tanto geométricas como físicas.

Ej 5-21 Hallar el Límite del ángulo interno de un Polígono regular de n lados, cuando n tiende a infinito.

Efectuando la construcción geométrica adjunta. El ángulo entre dos radios que van a los vértices del Polígono regular es: θ, será igual a $360°/n$ (n número de lados del Polígono)



El ángulo entre dos lados consecutivos es ϕ. La suma de ángulos internos de un Triángulo es de 180°. Por tanto:

$$\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} + \theta = 180° \quad \Rightarrow \quad \phi = 180° - \frac{360°}{n}$$

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \phi \;; \quad \alpha = \lim_{n \to \infty} \left(180° - \frac{360°}{n}\right) = 180°$$

Cuando el número de lados de un Polígono regular tiende a infinito. Entonces el ángulo entre dos lados consecutivos tiende a 180°, así el Polígono tiende ser Circunferencia.

ASÍNTOTAS OBLICUAS

Una aplicación de los Límites es el cálculo de las Asíntotas Oblicuas

ASÍNTOTA OBLICUA DERECHA

Es la Recta: $y = a_1 x + b_1$; donde:

$$a_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f_{(x)}}{x} \;; \quad b_1 = \lim_{x \to \infty} (f_{(x)} - a_1 x)$$

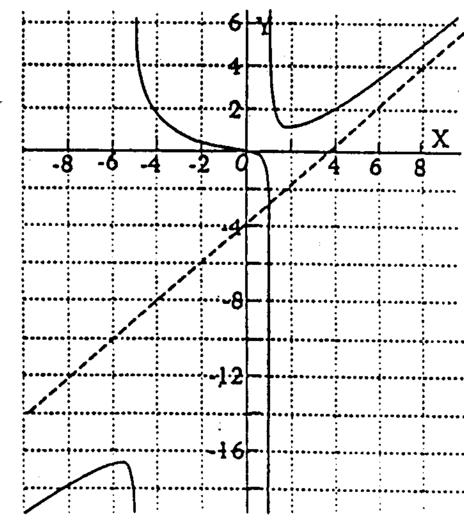
ASÍNTOTA OBLICUA IZQUIERDA

Es la Recta: $y = a_2 x + b_2$; donde:

$$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f_{(x)}}{x} \;; \quad b_1 = \lim_{x \to -\infty} (f_{(x)} - a_1 x)$$

Ej 5-22 a) Asíntotas Oblicuas de:

$$f_{(x)} = \frac{x^3}{x^2 + 4x - 5}$$



$$a_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f_{(x)}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^3}{x^2 + 4x - 5}}{x} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty} [f_{(x)} - a_1 x] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 4x - 5} - 1 \cdot x\right] = -4$$

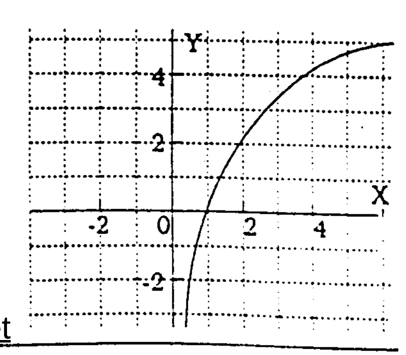
$$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f_{(x)}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x^3}{x^2 + 4x - 5}}{x} = 1$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} [f_{(x)} - a_2 x] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 4x - 5} - 1 \cdot x\right] = -4$$

$$\Rightarrow \quad y = 1 \cdot x + (-4) = x - 4$$

b) Asíntotas Oblicuas de: $f_{(x)} = x + \ln x$

Como el Logaritmo se define solo para positivos, no existirán Asíntotas Oblicuas a izquierda.



$$a_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f_{(x)}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{x} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty} [f_{(x)} - a_1 x] = \lim_{n \to \infty} [x + \ln x - 1 \cdot x] = \infty$$

V.- PROBLEMAS PROPUESTOS

5-1 Hallar los siguientes Límites y demostrarlos (Indicar L y δ)

$\lim_{x \to 3} (2x - 1)$; $\lim_{x \to 2} (4x - 1)$; $\lim_{x \to 0} (4 - 2x)$ — $5, \frac{\varepsilon}{2}$; $7, \frac{\varepsilon}{4}$; $4, \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)$; $\varepsilon = 0.1$; $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4x + 7)$; $\lim_{x \to 1} (x^3 - 1)$; $\varepsilon = 0.1$ — $5, 0.02$; $4, \frac{\varepsilon}{3}$; $0, \frac{\varepsilon}{7}$

$\lim_{x \to 4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$; $\lim_{x \to 4} \sqrt{x}$; $\varepsilon = 0.01$; $\lim_{x \to 2} \sqrt{x + 7}$; $\varepsilon = 0.1$ — $5, \frac{\varepsilon}{16}$; $2, 0.04$; $3, 0.58$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4}$; $M = 10^8$; $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x + 1}$; $\varepsilon = 0.1$; $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x + 1}$; $M = 10^6$ — $\infty, 0.01$; $2, 19$; $\infty, 10^6$

5-2 Hallar los siguientes Límites:

$\lim_{x \to 0} (5x + 3)$; $\lim_{x \to 0} (8 - 3x^2)$; $\lim_{x \to 0} \sqrt{x + 4}$ — $3 ; 8 ; 2$

$\lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x + 1}$; $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 3}$; $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}}$ — $0 ; 0 ; 1$

$\lim_{x \to 5} \sqrt{\frac{x + 5}{x - 5}}$; $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{7x + 1}$; $\lim_{x \to \infty} (6x + 1)$ — $\infty ; 0 ; \infty$

$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x - 1}$; $\lim_{x \to \infty} (x^5 - 3)$; $\lim_{x \to 0} (x^5 + 5^x)$ — $\infty ; \infty ; 1$

$\lim_{x \to \infty} (3^{1/x} + 1)$; $\lim_{x \to \infty} (x\,2^x + 1)$; $\lim_{x \to 0} x^{1/x}$ — $2 ; \infty ; 0$

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x$; $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x$; $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$ — $\infty ; 0 ; \infty$

5-3 Hallar los siguientes Límites Algebraicos:

$\lim_{x \to 2} \frac{6x - 12}{2x - 4}$; $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$; $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2}$ — $3 ; 6 ; 2$

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$; $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$; $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4}$ — $\frac{2}{3} ; -2 ; \infty$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$; $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + x - 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1}$; $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^6 - x^4 + x^2 - 1}$ — $0 ; 4 ; \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}$; $\lim_{x \to 2} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ — $6 ; 0 ; 7$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^3 - 1}{x}$; $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x^3)^2 - 1}{x^3}$; $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^3 - (1 - x)^2}{x}$ — $3 ; 2 ; 5$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^2 - (1 - x)^3}{(1 + x)^3 - (1 - x)^2}$; $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x^3)^4 - 1}{x}$; $\lim_{x \to 0} \frac{(a + x)^n - a^n}{(a + x)^m - a^m}$ — $1 ; 0 ; \frac{n}{m} a^{n - m}$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x}$; $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^2 - 1}{x^2 - x}$; $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$ — $6 ; -2 ; \frac{a - 1}{3a^2}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^{n+1} - (n + 1)x + n}{(x - 1)^2}$; $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 1)^2 - 4}$; $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^m - (1 + mx)}{x^2}$ — $\frac{n^2 + n}{2} ; -2 ; \frac{m^2 - m}{2}$

$\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n) - n a^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}$; $\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^m}{x^m - 1}$; $\lim_{x \to 1} \frac{x^{2m} - 2x^m + 1}{x^{2n} - 2x^n + 1}$ — $\frac{(n - 1)n}{2} a^{n-2} ; 0 ; (\frac{m}{n}$ [illegible]

5-4 Calcular los siguientes Límites Algebraicos con Radicales:

$\lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{2 - \sqrt{x}}$ $\qquad \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ $\qquad 4;\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to 3} \frac{1 - \sqrt{2x - 5}}{3 - x}$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x - 2}$ $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x - 1}$ $\qquad 1;\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{3 - \sqrt{x + 7}}$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{2x}}{x - 2}$ $\qquad \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 4}}{x^2 - 6x + 5}$ $\qquad 12;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{24}$

$\lim_{x \to 2} \frac{3 - \sqrt{x + 7}}{1 - \sqrt{x - 1}}$ $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{\sqrt{x + 3} - 2}$ $\qquad \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{\sqrt{2x - 7} - \sqrt{x - 3}}$ $\qquad \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to 3} \frac{5 - \sqrt{x^3 - 2}}{1 - \sqrt{x^2 - 8}}$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2\sqrt{x + 2}}{x^2 - 2\sqrt{2x}}$ $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3}}{3x - \sqrt{x^2 + 8}}$ $\qquad \frac{9}{10};\ \frac{7}{6};\ \frac{9}{16}$

$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}}$ $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{x - 1}$ $\qquad \lim_{x \to 4} \frac{1 - x}{1 - \sqrt[n]{x}}$ $\qquad 3;\ \frac{1}{5};\ n$

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[5]{3 - x} - \sqrt[5]{x - 1}}{x - 2}$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x - 3} - \sqrt[5]{2x - 3}}{x - 2}$ $\qquad \frac{m}{n};\ -\frac{2}{5};\ \frac{3}{5}$

$\lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt[3]{x - 1}}{1 - \sqrt{2x - 3}}$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt[4]{x + 1}}{x}$ $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{7 + x^3} - \sqrt{3 + x^2}}{x - 1}$ $\qquad \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}$

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[7]{x} - \sqrt[9]{x}}$ $\qquad \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{\sqrt{x} + 7} - 3}{x - 4}$ $\qquad \lim_{x \to 4} \frac{1 - \sqrt{x} + \sqrt{x - 3}}{x - 4}$ $\qquad \frac{21}{5};\ \frac{1}{24};\ \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{7 + x^3} - 2x}{x - 1}$ $\qquad \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x - 5} - \sqrt{x - 8}}{\sqrt{x + 7} - 2\sqrt{x} + 2}$ $\qquad 3;\ -\frac{7}{4};\ \frac{14}{5}$

5-5 Calcular los siguientes Límites:

$\lim_{x \to \infty} \frac{6x + 1}{2x - 1}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^3 - 5}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{4x^4 + 3x^2 + 1}{5x^2 + 7x + 10}$ $\qquad 3;\ 0;\ \infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{8x^2 + 6x - 1}{2x^2 - 1}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1 + x}}$ $\qquad 4;\ 1;\ 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x + 3)^3(6x + 2)^2}{4x^5 + 5}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{(2x^3 + 1)^6}{(3x^9 - 1)^2}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{(x + 1)^m x^n}{x^m (x^n - 1)}$ $\qquad 72;\ \frac{64}{9};\ 1$

5-6 Calcular los siguientes Límites:

$\lim_{x \to \infty} (x^3 - 6x)$ $\qquad \lim_{x \to \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1})$ $\qquad \lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ $\qquad \infty;\ 0;\ 0$

$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{2x + 1} - x)$ $\qquad \lim_{x \to \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 1})$ $\qquad \lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x})$ $\qquad -\infty;\ 0;\ 0$

$\lim_{x \to \infty} (e^{x+1} - e^x)$ $\qquad \lim_{x \to \infty} (3^{2x} - 3^x)$ $\qquad \lim_{x \to \infty} [Ln(x + 1) - Ln\, x]$ $\qquad \infty;\ \infty;\ 0$

$\lim_{x \to 1} (\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1})$ $\qquad \lim_{x \to \infty} (x - \frac{x^2}{x + 1})$ $\qquad \lim_{x \to 1} (\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}})$ $\qquad 0;\ 1;\ -\infty$

$\lim_{x \to \infty} (\frac{x^3}{x^2 + 1} - x)$ $\qquad \lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x})$ $\qquad \lim_{x \to \infty} (\frac{x^3}{x^2 - 1} - \frac{x^2}{x + 1})$ $\qquad 0,\ \infty;\ 1$

$\lim_{x \to 1} (\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n})$ $\qquad \lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ $\qquad \lim_{x \to \infty} x^{3/2}(\sqrt{x + 2} - 2\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})$ $\qquad \frac{m - n}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}$

5-7 Calcular los siguientes Límites Exponenciales y Logarítmicos:

$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{3/x}$; $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/2x}$; $\lim\limits_{x\to 0} (1+5x)^{1/x}$ — $e^3 ; e^{1/2} ; e^5$

$\lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{1/x}$; $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{2/x}$; $\lim\limits_{x\to 0} (1-8x)^{1/4x}$ — $e^{-2} ; e^6 ; e^2$

$\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{1}{x})^{2x}$; $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{5}{x})^{x}$; $\lim\limits_{x\to \infty} (1-\frac{1}{4x})^{8x}$ — $e^2 ; e^5 ; e^{-2}$

$\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1+5x}{1+2x})^{1/x}$; $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)^{\frac{1}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{5+x}{5-x})^{1/x}$ — $e^3 ; e ; e^{2/5}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{6^x-1}{2^x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-3^{-x}}{x}$ — $Ln\,5 ; \frac{Ln\,6}{Ln\,2} ; 2Ln\,3$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{8^x-4^x}{6^x-2^x}$; $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x-a^a}{x-a}$; $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{x-a}$ — $\frac{Ln\,2}{Ln\,3} ; a^a(1+Ln\,a) ; a^a(1-Ln\,a)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Ln(1-x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to e} \frac{Ln\,x-1}{x-e}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} Ln \frac{1+x}{1-x}$ — $-1 ; e^{-1} ; 2$

5-8 Calcular los siguientes Límites Trigonométricos:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sen\,x}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sen\,3x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sen\,6x}{3x}$ — $1/5 ; 3 ; 2$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sen\,8x}{Sen\,4x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Tan\,5x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} x\,Cot\,x$ — $2 ; 5 ; 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-Sen\,9x}{x-Sen\,3x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Tan\,6x}{Tan\,2x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sen\,5x-Sen\,3x}{Sen\,2x-Sen\,x}$ — $4 ; 3 ; 2$

$\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1-Sen\,x}{\pi-2x}$; $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1-x^2}{Sen\,\pi x}$; $\lim\limits_{x\to \pi/3} \frac{Sen(x-\pi/3)}{1-2\,Cos\,x}$ — $0 ; 2/\pi ; \sqrt{3}/3$

$\lim\limits_{x\to \pi/2} (\frac{\pi}{2}-x)Tan\,x$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{Cos\,x}}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{Sen\,x-Cos\,x}{Tan\,x-1}$ — $1 ; 1/4 ; \sqrt{2}/2$

$\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{Cos\,x-Sen\,x}{Cos\,2x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sen^2x}{1-Cos\,x}$; $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{Cos\,x}{(1-Sen\,x)^{2/3}}$ — $1/\sqrt{2} ; 2 ; \infty$

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+Sen^2x}{x+Cos\,x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Cos\,x-Cos\,3x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{Sen\,x}-\frac{1}{Tan\,x})$ — $1 ; 4 ; 0$

$\lim\limits_{x\to \infty} x^2(1-Cos\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to \pi/3} \frac{1-2\,Cos\,x}{\pi-3x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arcsen\,x-Arctan\,x}{x^3}$ — $1/2 ; -\sqrt{3}/3 ; 1/2$

$\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{Cos\,x}{1-Sen\,x}$; $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1+Cos\,x}{Sen\,x}$; $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1-\sqrt{Sen\,x}}{2x-\pi}$ — $-\infty ; 0 ; 0$

5-9 Calcular los Límites de Funciones Especiales (Previamente el Límite Lateral Derecho, luego el Izquierdo)

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$; $\lim\limits_{x\to 3} [\![x]\!]$ — $\pm\infty ; \pm 1 ; 3, 2$

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-|x|}{x}$; $\lim\limits_{x\to 2} \frac{|x|-[\![x]\!]}{x}$ — $\pm 1 ; 0, 2 ; 1, -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} (x)$; $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \delta_{(x)}$ — $0 ; \infty, 0 ; \infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{SGN(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot SGN(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{SGN(x)}{x-|x|}$ — $\infty ; \infty ; \infty$

5-10 Hallar los siguientes Límites, de Funciones de distinta naturaleza:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)^3-(x^3-1)^2}{x^3-5x^2+6x-2} \qquad \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+22}}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x+3}} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[5]{x+1}-1} \qquad 0;\ \frac{7}{9};\ \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(4x^2+1)^4(6x^3+1)^2}{(2x^4+1)^2(3x^2+1)^3} \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} \qquad \lim_{x \to 0} (1+Sen\,x)^{Cot\,x} \qquad \frac{256}{3};\ 3;\ e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{Sen\,x} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{e^x-e}{x-1} \qquad \lim_{x \to \infty} x(e^{1/x}-1) \qquad 2;\ e;\ 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-Cos\,x}{x^2} \qquad \lim_{x \to 0} (Cos\,x)^{1/Sen\,x} \qquad \lim_{x \to 0} (Cos\,x+Sen\,x)^{1/x} \qquad \frac{3}{2};\ 1;\ e$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{Ln(1+3^x)}{Ln(1+2^x)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{Ln(Cos\,6x)}{Ln(Cos\,2x)} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{Ln(2+e^{3x})}{Ln(3+e^{2x})} \qquad \frac{Ln\,3}{Ln\,2};\ 9;\ \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{Cos\,x}{Cos\,2x}\right)^{1/x^2} \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2} \qquad \lim_{x \to a} \frac{a^{x^a}-a^{a^x}}{x^a-a^x} \qquad e^{\frac{3}{2}};\ \frac{2}{3};\ a^{a^a}Ln\,a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x-Arcsen\,x}{2x+Arctan\,x} \qquad \lim_{x \to 0} (Sen\,x)^{1/Tan\,x} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x+x^2+x^3+x^4-4}{x-1} \qquad \frac{1}{3};\ 0;\ 10$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{Sen\,2x}-e^{Sen\,x}}{x} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{(x^n+1)^m}{(x^m+1)^n} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x+x^2+x^3+\dots+x^n-n}{x-1} \qquad 1;\ 1;\ \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{x \to 2} |x-2| \qquad \lim_{x \to \pi/4} \frac{Cos\,x-Sen\,x}{Sen\,4x} \qquad \lim_{x \to \infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}) \qquad 0;\ \frac{\sqrt{2}}{4};\ 1$$

$$\lim_{x \to 0} [SGN(x)]^2 \qquad \lim_{x \to 0} ((x)+1) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} \qquad 1;\ 1;\ \frac{nm(n-m)}{2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{3x-6} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{[x]}{x} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x^2-3|x|+2}{x^2-6|x|+8} \qquad \pm\frac{1}{3};\ 1,\ \frac{1}{2};\ \mp\frac{1}{2}$$

5-11 Determinar si son Continuas (C) o No Continuas (NC) las siguientes Funciones, indicar además los Puntos de Discontinuidad si los hubiere.

$$f = 2x-3 \qquad f = x^2-4x+5 \qquad f = \frac{1}{x-2} \qquad C;\ C;\ NC;\ 2$$

$$f = e^x \qquad f = Cos\,x \qquad f = Tan\,x \qquad C;\ C;\ NC;\ (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$f = x+[x] \qquad f = |x-1| \qquad f = (x)+[x] \qquad NC,\ Z;\ C;\ NC,\ Z$$

$$f = \frac{[x]}{x} \qquad f = (x) \qquad f = \frac{|x-3|}{x-3} \qquad NC,\ Z;\ C;\ NC,\ 3$$

$$f = \begin{cases} 3x-2 & x < 2 \\ 10-3x & x \geq 2 \end{cases} \qquad f = \begin{cases} x^2-1 & x < 1 \\ 3-x & x \geq 1 \end{cases} \qquad C;\ NC,\ 1$$

$$f = \begin{cases} x+1 & x \neq 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases} \qquad f = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Sen\,x & x \geq 0 \end{cases} \qquad NC,\ 3;\ C$$

5-12 Hallar el valor de A para que las siguientes Funciones sean Continuas:

$$f = \begin{cases} 2x+3 & x \neq 3 \\ A & x = 3 \end{cases} \qquad f = \begin{cases} \dfrac{Ln(Cos\,x)}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases} \qquad 9;\ 0$$

$$f = \begin{cases} 3x-1 & x < 4 \\ A & x = 4 \\ 15-x & x > 4 \end{cases} \qquad f = \begin{cases} 2x-1 & x < 3 \\ A & x = 3 \\ 9-x & x > 3 \end{cases} \qquad 11;\ NC\ (\nexists A)$$



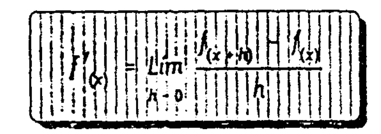
VI.- DERIVADAS

VI-1 DERIVADAS

Se entiende por Derivada de la Función $f_{(x)}$ a la siguiente serie de símbolos:

$$f'_{(x)} = \frac{d}{dx} f_{(x)} = \dot{f}_{(x)} = Dy = y' = \frac{dy}{dx}$$

La Derivada de una Función $f_{(x)}$ es otra Función $f'_{(x)}$ que se obtiene mediante la siguiente definición:



$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

Por tanto, analíticamente una Derivada es un Límite y existirá en la medida en que exista el Límite. (Note que la variable del Límite es h)

Ej 6-1 Se deriva por definición a la Función: $f_{(x)} = 3x^2 + 5x + 4$

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$ Definición de Derivada.

Reemplazando la Función dada.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 + 5(x+h) + 4] - [3x^2 + 5x + 4]}{h} = \frac{0}{0}$$

Al reemplazar la variable del Límite (h) por el valor al que tiende (0) se da una Indeterminación.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x^2 + 2xh + h^2) + 5(x+h) + 4] - [3x^2 + 5x + 4]}{h}$$

Por tanto, desarrollando el Cuadrado de una Suma.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5x + 5h + 4 - 3x^2 - 5x - 4}{h}$$

Desarrollando todo el numerador. Simplificando y ordenando.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 + 5h}{h}$$

Factorizando: h en el numerador. Simplificando.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h + 5)}{h}$$

Reemplazando, se calcula el Límite.

$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h + 5)$$

Derivada de la Función.

$$= 6x + 5$$

La Derivación por definición, anteriormente aplicada, no es la que se emplea en la práctica, ya se verán luego técnicas mucho mas rápidas y simples.

Para que exista la Derivada de una Función, esta Función debe ser Continua y no contener a Puntos Angulosos o de Esquina (Ver P-2-42 en $x = 2$)

Si una Función tiene Derivada en $x = x_0$ se dice que la Función es Derivable en ese punto.

El estudio de las condiciones de existencia de la Derivada, se llama DERIVABILIDAD, se analizará en VI-4 sin embargo previamente se observaran las Técnicas de Derivación en VI-3.

Las diversas interpretaciones de la Derivada, tanto en la Geometría como en Física o en otras ciencias, se verán en VI-7, VII-2, VII-6. La Derivada como instrumento de cálculo es amplia y versátil.

VI-2 TABLA DE DERIVADAS

Si: $f_{(x)}$. u . v . w son Funciones Reales de Variable Real; a es una constante. Entonces se tiene la siguiente relación de Derivadas de operaciones o Derivadas de Funciones:

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$ Definición de Derivada

$a' = 0$ La Derivada de una constante es cero

$(u + v)' = u' + v'$ La Derivada de Suma es la Suma de las Derivadas

$(a\,u)' = a\,u'$ Derivada de constante por Función

$(u\,v)' = u'v + u\,v'$ Derivada de un Producto de Funciones

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$ Derivada de un Cociente de Funciones

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ Derivada de un Producto de tres Funciones

$(u^v)' = u^v(v'\,Ln\,u + \frac{v}{u}u')$ Derivada de una Función elevada a otra Función.

$(x^m)' = m x^{m-1}$

$(a^x)' = a^x\,Ln\,a$

$(e^x)' = e^x$

$(Ln\,x)' = \frac{1}{x}$

$(Log_a x)' = \frac{Log_a e}{x} = \frac{1}{x\,Ln\,a}$

$(x^x)' = x^x(Ln\,x + 1)$

$(Sen\,x)' = Cos\,x$

$(Cos\,x)' = -Sen\,x$

$(Tan\,x)' = Sec^2 x$

$(Cot\,x)' = -Csc^2 x$

$(Sec\,x)' = Sec\,x\,Tan\,x$

$(Csc\,x)' = -Csc\,x\,Cot\,x$

$(Arcsen\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(Arccos\,x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(Arctan\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(Arccot\,x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

$(Arcsec\,x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$(Arccsc\,x)' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$(Senh\,x)' = Cosh\,x$

$(Cosh\,x)' = Senh\,x$

$(Tanh\,x)' = Sech^2 x$

$(Coth\,x)' = -Csch^2 x$

$(Sech\,x)' = -Sech\,x\,Tanh\,x$

$(Csch\,x)' = -Csch\,x\,Coth\,x$

$(Arcsenh\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(Arccosh\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(Arctanh\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(Arccoth\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(Arcsech\,x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$(Arccsch\,x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

$\left\{u_{[v_{(x)}]}\right\}' = u'_{(v)}\,v'_{(x)}$ Regla de la Cadena

$(u\,v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$ Regla de Leibnitz, donde n, k son órdenes de derivación.

$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$ Derivada de una Función Inversa.

Ej 6-2 Se demuestra: $(a)' = 0$ (La Derivada de una constante es cero)

Si: $f_{(x)} = a$ — La Función es una constante (Ver II-14), cuya Derivada se determinará.

$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$ — Definición de Derivada, donde a $f_{(x+h)}$, $f_{(x)}$ se las llama Función incrementada y Función original respectivamente.

$= \lim_{h \to 0} \frac{a - a}{h}$ — Reemplazando la Función dada. (Con esta función se verifica que: $f_{(x)} = f_{(x+h)} = a$)

$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0$ — Simplificando el numerador. Simplificando el cociente y tomando en cuenta que el Límite de una constante es la misma constante.

$= 0$

6-1 Demostrar: $(u + v)' = u' + v'$ (La Derivada de una Suma es igual a la Suma de Derivadas)

Si: $f_{(x)} = u_{(x)} + v_{(x)}$. — La Función a derivar es la suma de las otras dos Funciones: $u_{(x)}$, $v_{(x)}$.

$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$ — Definición de Derivada

$= \lim_{h \to 0} \frac{(u_{(x+h)} + v_{(x+h)}) - (u_{(x)} + v_{(x)})}{h}$ — Reemplazando la Función en la definición

$= \lim_{h \to 0} \frac{(u_{(x+h)} - u_{(x)}) + (v_{(x+h)} - v_{(x)})}{h}$ — Reordenando el numerador

$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u_{(x+h)} - u_{(x)}}{h}\right) + \left(\frac{v_{(x+h)} - v_{(x)}}{h}\right)$ — Reordenando la fracción, cada expresión entre paréntesis es una definición de Derivada.

$= u'_{(x)} + v'_{(x)}$

6-2 Demostrar: $(a u)' = a u'$ (La Derivada de una constante por una Función)

$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$; Si: $f_{(x)} = a\,u_{(x)}$ — La Función a derivar es el producto de una constante por otra Función.

Definición de Derivada

$= \lim_{h \to 0} \frac{a\,u_{(x+h)} - a\,u_{(x)}}{h}$ — Reemplazando en la definición.

$= \lim_{h \to 0} \frac{a(u_{(x+h)} - u_{(x)})}{h}$ — Factorizando: a en el numerador

$= a \lim_{h \to 0} \left(\frac{u_{(x+h)} - u_{(x)}}{h}\right)$ — Reordenando la fracción, el cociente que queda es la definición de Derivada de la Función: $u_{(x)}$

$= a\,u'_{(x)} = a\,u'$

6-3 Demostrar: $(a + u)' = u'$ (La Derivada de una constante más una Función)

Si: $f_{(x)} = a + u_{(x)}$ — Función dada por una constante más una Función

$f'_{(x)} = (a + u_{(x)})'$ — Planteando la Derivada de una Suma

$= a' + u'_{(x)}$ — Por P-6-1: La Derivada de una Suma, es la Suma de las Derivadas

$= 0 + u'_{(x)}$ — Por el Ej 6-1: La Derivada de una constante es cero.

$= u'$

6-4 Demostrar: $(uv)' = u'v + uv'$ (Derivada de un Producto de Funciones)

Si: $f_{(x)} = u_{(x)}\,v_{(x)}$ — Función dada, Producto de las Funciones: $u_{(x)}$; $v_{(x)}$

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$ Definición de Derivada.

Reemplazando, luego sumando y restando: $u_{(x+h)}v_{(x)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u_{(x+h)}v_{(x+h)} - u_{(x)}v_{(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u_{(x+h)}v_{(x+h)} - u_{(x)}v_{(x)} + u_{(x+h)}v_{(x)} - u_{(x+h)}v_{(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u_{(x+h)}[v_{(x+h)} - v_{(x)}] + v_{(x)}[u_{(x+h)} - u_{(x)}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} u_{(x+h)} \frac{v_{(x+h)} - v_{(x)}}{h} + v_{(x)} \frac{u_{(x+h)} - u_{(x)}}{h}$$

$$= u_{(x)}v'_{(x)} + v_{(x)}u'_{(x)} = u'v + uv'$$ Derivada de un Producto

6-5 Demostrar: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (Derivada de un Cociente de Funciones)

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} \quad ; \quad \text{Si: } f_{(x)} = \frac{u_{(x)}}{v_{(x)}}$$

La Función es el Cociente entre las Funciones: $u_{(x)}$; $v_{(x)}$

Definición de Derivada

Reemplazando la Función dada en la Definición.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u_{(x+h)}}{v_{(x+h)}} - \frac{u_{(x)}}{v_{(x)}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u_{(x+h)}v_{(x)} - u_{(x)}v_{(x+h)}}{h\,v_{(x+h)}v_{(x)}}$$

Efectuando las operaciones indicadas, sumando y restando: $u_{(x)}v_{(x)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u_{(x+h)}v_{(x)} - u_{(x)}v_{(x+h)} + u_{(x)}v_{(x)} - u_{(x)}v_{(x)}}{h\,v_{(x+h)}v_{(x)}}$$

Ordenando las expresiones y aplicando el concepto de Derivada.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v_{(x)}}{v_{(x+h)}v_{(x)}} \frac{u_{(x+h)} - u_{(x)}}{h} - \frac{u_{(x)}}{v_{(x+h)}v_{(x)}} \frac{v_{(x+h)} - v_{(x)}}{h}$$

$$= \frac{v_{(x)}}{v_{(x)}v_{(x)}} u'_{(x)} - \frac{u_{(x)}}{v_{(x)}v_{(x)}} v'_{(x)} = \frac{vu'}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Derivada de un cociente

6-6 Demostrar: $(u_{(v_{(x)})})' = u'_{(v)}\,v'_{(x)}$ (Derivada por la Regla de la Cadena)

Si: $f_{(x)} = u_{(v_{(x)})}$

Función dada, La Función: u depende de la Función: v ; A su vez v depende de: x

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$ Definición de Derivada.

Reemplazando, sumando y restando internamente: $v_{(x)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u_{(v_{(x+h)})} - u_{(v_{(x)})}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u_{(v_{(x)} + v_{(x+h)} - v_{(x)})} - u_{(v_{(x)})}}{h}$$

Se multiplica y divide por $v_{(x+h)} - v_{(x)}$

Cambio de variable: $\Delta v = v_{(x+h)} - v_{(x)}$ en la primera fracción.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u_{(v_{(x)} + v_{(x+h)} - v_{(x)})} - u_{(v_{(x)})}}{v_{(x+h)} - v_{(x)}} \frac{v_{(x+h)} - v_{(x)}}{h}$$

Note que cuando: h tiende a cero, Δv también tiende a cero.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u_{(v+\Delta v)} - u_{(v)}}{\Delta v} \frac{v_{(x+h)} - v_{(x)}}{h}$$

$$= u'_{(v)}\,v'_{(x)} = u'v'$$ Regla de la Cadena.

6-7 Demostrar la Regla de Derivación de Potencias: $(x^m)' = m x^{m-1}$

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} \quad ; \quad \text{Si: } f_{(x)} = x^m$$

Función Potencial a derivar

Definición de Derivada

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

Reemplazando en la definición, tanto a la Función incrementada: $f_{(x+h)} = (x+h)^m$ como a la misma Función: $f_{(x)} = x^m$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[x^m + \frac{m}{1!}x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}h^2 + \dots + h^m] - x^m}{h}$$

Desarrollando por el Binomio de Newton.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{m}{1!}x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}h^2 + \dots + h^m}{h}$$

Simplificando en el numerador.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(\frac{m}{1!}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}h + \dots + h^{m-1})}{h}$$

Factorizando: h

$$= \lim_{h \to 0} (\frac{m}{1!}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}h + \dots + h^{m-1})$$

Simplificando y luego aplicando el Límite.

$$= \frac{m}{1!}x^{m-1} = m x^{m-1}$$

6-8 Demostrar la Regla de Derivación de Exponenciales: $(a^x)' = a^x \ln a$

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} \quad \text{Si: } f_{(x)} = a^x$$

Definición de Derivada y Función Exponencial, que se va a derivar.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

Reemplazando en la Definición.

$$= \lim_{h \to 0} a^x (\frac{a^h - 1}{h}) = a^x \lim_{h \to 0} (\frac{a^h - 1}{h})$$

$$= a^x \ln a$$

Factorizando: a^x (Que se comporta como una constante, ya que la variable para el Límite es: h) Aplicando el Límite del Teorema T5-9, se obtiene la Derivada de la Función Exponencial.

6-9 Demostrar la Regla de Derivación de Logaritmos: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} \quad ; \quad \text{Si: } f_{(x)} = \ln x$$

Por la definición de Derivada y la Función Logaritmo Neperiano

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h}$$

Reemplazando la Función en la definición de Derivada.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln(1 + \frac{h}{x})$$

Aplicando la propiedad del Logaritmo de un Cociente y reordenando la expresión.

Luego usando la Propiedad del Logaritmo de una Potencia, para así llevar al exponente a: $1/h$

$$= \lim_{h \to 0} \ln\left[(1 + \frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}\right] = \lim_{h \to 0} \ln\left[(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

Reordenando el exponente de manera que se tenga la forma del Límite: e (Teorema T5-8), en el exponente se multiplica y divide por: x

$$= \ln(e)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} 1 = \frac{1}{x}$$

La expresión entre corchetes es: e, así se logra la Derivada del Logaritmo Neperiano

6-10 Demostrar la Regla de Derivación: $(Sen\,x)' = Cos\,x$

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} \quad Si: \; f_{(x)} = Sen\,x$$ Función Trigonométrica a derivar: *Sen x*. Reemplazando en la definición de Derivada

$$= \lim_{h\to 0}\frac{Sen(x+h) - Sen\,x}{h}$$ Reemplazando la Función a derivar.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{Sen\,x\,Cos\,h + Sen\,h\,Cos\,x - Sen\,x}{h}$$ Desarrollando por el *Seno* de una Suma

Factorizando: *Sen x*

$$= \lim_{h\to 0}\frac{Sen\,x(Cos\,h - 1) + Sen\,h\,Cos\,x}{h}$$ Reordenando y aplicando el Límites de: P-5-33-e, además del Teorema T5-10 sobre las expresiones entre paréntesis.

$$= \lim_{h\to 0} Sen\,x\left(\frac{Cos\,h - 1}{h}\right) + \left(\frac{Sen\,h}{h}\right)Cos\,x$$ Derivada de la Función Seno

$$= Sen\,x\,(0) + (1)\,Cos\,x = Cos\,x$$

6-11 Demostrar la Regla de Derivación: $(Cos\,x)' = -Sen\,x$

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} \; ; \quad Si: \; f_{(x)} = Cos\,x$$ Función Trigonométrica a derivar: *Cos x*

Definición de Derivada

$$= \lim_{h\to 0}\frac{Cos(x+h) - Cos\,x}{h}$$ Reemplazando

$$= \lim_{h\to 0}\frac{Cos\,x\,Cos\,h - Sen\,x\,Sen\,h - Cos\,x}{h}$$ Desarrollando el *Coseno* de una Suma

Factorizando: *Cos x* en el numerador

$$= \lim_{h\to 0}\frac{Cos\,x(Cos\,h - 1) - Sen\,x\,Sen\,h}{h}$$ Reordenando y aplicando los resultados de: P-5-33-3, además del Teorema T5-10.

$$= \lim_{h\to 0} Cos\,x\left(\frac{Cos\,h - 1}{h}\right) - Sen\,x\left(\frac{Sen\,h}{h}\right)$$ Derivada de la Función Coseno.

$$= Cos\,x\,(0) - Sen\,x\,(1) = -Sen\,x$$

6-12 Demostrar la Regla de Derivación: $(Senh\,x)' = Cosh\,x$

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} \; : \quad Si: \; f_{(x)} = Senh\,x$$ Función Hiperbólica a derivar: *Senh x*

Definición de Derivada

$$= \lim_{h\to 0}\frac{Senh(x+h) - Senh\,x}{h}$$ Reemplazando

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{e^{x+h} - e^{-(x+h)}}{2} - \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}}{h}$$ Usando la definición de la Función en términos de Exponenciales

Simplificando y ordenando

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^{-x-h} - e^{x} - e^{-x}}{2h}$$ Factorizando y reordenando de manera que se pueda aplicar el Teorema T5-9

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x}}{2}\left(\frac{e^{h} - 1}{h}\right) - \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{(e^{-1})^{h} - 1}{h}\right)$$

$$= \frac{e^{x}}{2}(Ln\,e) - \frac{e^{-x}}{2}(Ln\,e^{-1}) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = Cosh\,x$$

6-13 Demostrar la Regla de Derivación: $(x)' = 1$

Si: $f_{(x)} = x = x^{1}$ Función a derivar (Función Potencial con $m = 1$)

$f'_{(x)} = 1\cdot x^{1-1} = x^{0} = 1$ Aplicando el resultado de P-6-7 (Demostración de Derivada de Potencias)

VI-3 DERIVACIÓN DE FUNCIONES

En la práctica, para derivar Funciones, es muy conveniente el uso de la TABLA DE DERIVADAS (VI-2). Algunas de estas Fórmulas se demostraron por su definición. (Como la variable es siempre x en todas las Funciones, se usará la notación directa de: f, f' para una Función y su respectiva Derivada).

DERIVADA DE POTENCIAS



Ej 6-3 Si: $f = x^7 \Rightarrow f' = 7x^{7-1} = 7x^6$

Para derivar por esta Regla de derivación: Se baja la potencia que queda multiplicando, al mismo tiempo en el exponente se quita 1 a tal potencia. Simplificando luego.

6-14 Derivar por la Regla de Derivación de potencias.:

$f = x^5 \Rightarrow f' = 5x^4$

$f = x^2 \Rightarrow f' = 2x$

$f = x \Rightarrow f' = 1 \cdot x^0 = 1$

$f = x^{47} \Rightarrow f' = 47x^{46}$

$f = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f = \frac{1}{x^8} = x^{-8} \Rightarrow f' = (-8)x^{-9} = \frac{-8}{x^9}$

$f = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3} \Rightarrow f' = -\frac{1}{3}x^{-4/3} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

En los tres últimos ejemplos, antes de derivar, las expresiones se reordenan, mostrándose como potencias (Fraccionarias o negativas).

Luego se derivan, el resultado se vuelve a ordenar.

DERIVADA DE CONSTANTES



Ej 6-4 Si: $f = 7 \Rightarrow f' = 0$ La Derivada de toda Función constante es directamente igual a cero.

6-15 Derivar:

$f = 5 \Rightarrow f' = 0$

$f = -\frac{1}{2} \Rightarrow f' = 0$

$f = \pi^2 + \sqrt{5} + 1 \Rightarrow f' = 0$

$f = Ln\,3 + Sen\,\frac{\pi}{2} \Rightarrow f' = 0$

La Función constante puede adoptar diversas formas, pero su Derivada es siempre cero.

DERIVADA DE CONSTANTE POR FUNCIÓN



Ej 6-5 Si: $f = 3x^8 \Rightarrow f' = 3(8x^7) = 24x^7$

La constante que multiplica a una Función, sigue luego multiplicando a la Derivada de tal Función.

6-16 Derivar:

$f = 4x^3 \Rightarrow f' = 12x^2$

$f = 3x \Rightarrow f' = 3$

$f = 2x^\pi \Rightarrow f' = 2\pi x^{\pi-1}$

$f = \frac{5}{x^3} = 5x^{-3} \Rightarrow f' = -15x^{-4} = -\frac{15}{x^4}$

$f = 5\sqrt{x} = 5x^{1/2} \Rightarrow f' = \frac{5}{2}x^{-1/2} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$

En las dos últimas Funciones, previamente se reordena la potencia, luego se deriva

DERIVADA DE EXPONENCIALES



Ej 6-6 Si: $f = 3^x \Rightarrow f' = 3^x Ln\,3$

La Derivada de una Exponencial es la misma Exponencial, por el Logaritmo Natural de su Base.

6-17 Derivar:

$f = 2^x \Rightarrow f' = 2^x Ln\,2$

$f = 10^x \Rightarrow f' = 10^x Ln\,10$

$f = e^x \Rightarrow f' = e^x Ln\,e = e^x$

$f = (\frac{1}{2})^x \Rightarrow f' = (\frac{1}{2})^x Ln\,\frac{1}{2} = -2^{-x} Ln\,2$

DERIVADA DE SUMAS



Ej 6-7 Si: $f = x^3 + x^7 \Rightarrow f' = 3x^2 + 7x^6$

La Derivada de una Suma, es igual a la Suma de las Derivadas.

6-18 Derivar las siguientes Funciones, usando la Regla de derivación de Sumas:

$$f = x^5 + 6x + 2x^3 - 3x^5 + 8 \Rightarrow f' = 5x^4 + 6 + 6x^2 - 15x^4$$

$$f = 8\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = 8x^{1/2} + x^{-1/4} \Rightarrow f' = 4x^{-1/2} - \frac{1}{4}x^{-5/4} = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$$

DERIVADA DE OTRAS FUNCIONES



Ej 6-8 $f = x^{12} + Sen\,x \Rightarrow f' = 12x^{11} + Cos\,x$ Para derivar se usan Reglas antes indicadas.

6-19 Derivar las siguientes Funciones:

$$f = x^5 - Cos\,x + 5\,Sen\,x \Rightarrow f' = 5x^4 + Sen\,x + 5\,Cos\,x$$

$$f = x^7 + 7^x + 7\,Ln\,x + 7 \Rightarrow f' = 7x^6 + 7^x Ln\,7 + \frac{7}{x}$$

Derivando directamente de acuerdo a las reglas anteriormente mencionadas, para cada caso.

$$f = 4^x + x^4 + 4 + \frac{4}{x} + \frac{x}{4} + \sqrt[4]{x} = 4^x + x^4 + 4 + 4x^{-1} + \frac{1}{4}x + x^{1/4}$$

$$f' = 4^x Ln\,4 + 4x^3 - 4x^{-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^{-3/4} = 4^x Ln\,4 + 4x^3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$f = e^x + x^e + 3\,Sen\,x + x\,Sen\,3 + 5\,Ln\,x + x\,Ln\,5$$

$$f' = e^x + ex^{e-1} + 3\,Cos\,x + Sen\,3 + 5\frac{1}{x} + Ln\,5$$

Es conveniente observar cuidadosamente para detectar cuales son constantes y cuales las variables.

$$f = \sqrt{2x} + e^{x+2} + Ln\,(\frac{x}{2}) + Sen(x+2)$$

$$= \sqrt{2}\,x^{1/2} + e^x e^2 + Ln\,x - Ln\,2 + Sen\,x\,Cos\,2 + Sen\,2\,Cos\,x$$

En esta Función se desarrollan algunos de sus Términos. Luego de derivar, se vuelve a agrupar

$$f' = \sqrt{2}\,\frac{1}{2}x^{-1/2} + e^x e^2 + \frac{1}{x} + Cos\,x\,Cos\,2 + Sen\,2(-Sen\,x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x}} + e^{x+2} + \frac{1}{x} + Cos(x+2)$$

DERIVADA DE PRODUCTOS

$$f = (uv)' \Rightarrow f' = u'v + uv'$$

Ej 6-9 $\quad f = x^5\,Sen\,x \Rightarrow f' = (x^5)'\,Sen\,x + x^5\,(Sen\,x)'$
$= 5x^4\,Sen\,x + x^5\,Cos\,x$

Aplicando la Regla de Derivación de Productos. (Se deriva el 1er factor copiando el 2do, luego se copia el 1er factor derivando el 2do)

6-20 Derivar las siguientes Funciones usando la Regla del Producto:

$f = x^3\,Cos\,x \Rightarrow f' = 3x^2 Cos\,x + x^3(-Sen\,x) = 3x^2 Cos\,x - x^3\,Sen\,x$

$f = x^5\,Ln\,x \Rightarrow f' = 5x^4 Ln\,x + x^5\dfrac{1}{x} = 5x^4 Ln\,x + x^4$

$f = x^8\,3^x \Rightarrow f' = 8x^7\,3^x + x^8\,3^x\,Ln\,3$

$f = x^9\,Sen\,x\,4^x \Rightarrow f' = 9x^8\,Sen\,x\,4^x + x^9\,Cos\,x\,4^x + x^9\,Sen\,x\,4^x\,Ln\,4$

$f = x^7\,Ln\,x\,Cos\,x \Rightarrow f' = 7x^6 Ln\,x\,Cos\,x + x^7\dfrac{1}{x}Cos\,x + x^7\,Ln\,x(-Sen\,x)$
$= 7x^6 Ln\,x\,Cos\,x + x^6\,Cos\,x - x^7\,Ln\,x\,Sen\,x$

Note la generalización a tres factores, de la regla del producto en las dos últimas Funciones.

DERIVADA DE COCIENTES



$$f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ej 6-10 $\quad f = \dfrac{Sen\,x}{x^3} \Rightarrow f' = \dfrac{(Sen\,x)'\,x^3 - Sen\,x\,(x^3)'}{(x^3)^2}$

$= \dfrac{Cos\,x\;x^3 - Sen\,x\;3x^2}{x^6}$

$= \dfrac{x\,Cos\,x - 3\,Sen\,x}{x^4}$

Por la Regla de derivación de cocientes:

Se deriva el numerador se copia el denominador, restando luego la copia del numerador por la derivada del denominador, dividiendo todo entre el cuadrado del denominador.

Simplificando la Derivada obtenida.

6-21 Derivar las siguientes Funciones por la Regla del Cociente:

$x = \dfrac{x^7+1}{x^3+1} \Rightarrow f' = \dfrac{7x^6(x^3+1) - (x^7+1)3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{4x^9 + 7x^6 - 3x^2}{x^6 + 2x^3 + 1}$

$f = \dfrac{x^5}{Sen\,x} \Rightarrow f' = \dfrac{5x^4\,Sen\,x - x^5\,Cos\,x}{(Sen\,x)^2}$

$f = \dfrac{x^3+1}{3^x-1} \Rightarrow f' = \dfrac{3x^2(3^x-1) - (x^3+1)3^x Ln\,3}{(3^x-1)^2}$

$f = \dfrac{x^2\,Sen\,x}{x^5+1} \Rightarrow f' = \dfrac{(2x Sen\,x + x^2 Cos\,x)(x^5+1) - x^2 Sen\,x\,5x^4}{(x^5+1)^2}$

$= \dfrac{-3x^6 Sen\,x + x^7 Cos\,x + x^2 Cos\,x + 2x Sen\,x}{x^{10} + 2x^5 + 1}$

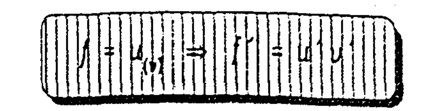
$f = \dfrac{x^3e^x+1}{x\,Ln\,x+1} \Rightarrow f' = \dfrac{(3x^2e^x + x^3e^x)(x\,Ln\,x+1) - (x^3e^x+1)(Ln\,x + x(1/x))}{(x\,Ln\,x+1)^2}$

Por la Regla del cociente.

Al derivar el numerador o denominador, se aplica la Regla correspondiente a cada Función

En los últimos Cocientes, además se derivan los Productos indicados que se presentan en los numeradores o denominadores.

DERIVADA POR REGLA DE LA CADENA



La Regla de la Cadena se escribe también $\left\{u_{[v_{(x)}]}\right\}' = u'_{(x)}\, v'_{(x)}$, se usa cuando se tiene Funciones Compuestas.

Ej 6-11 $f = (Sen\,x)^7 \Rightarrow$

$f' = 7(Sen\,x)^6\,(Sen\,x)'$

$= 7(Sen\,x)^6\,Cos\,x$

$= 7\,Sen^6 x\,Cos\,x$

Es una Función compuesta cuya Derivada precisa de la Regla de la Cadena.

Se deriva previamente la potencia 7. (Mientras se deriva para esta potencia, la Función *Seno* no se modifica), luego se multiplica por la derivada de la Función *Seno*. Ordenando resultados posteriormente.

6-22 Derivar las siguientes Funciones (Por la Regla de la Cadena)

$f = Sen(5 + x^3) \Rightarrow f' = Cos(5 + x^3)\,3x^2$

$f = (x^3 + 7\,Sen\,x + 1)^5 \Rightarrow f' = 5(x^3 + 7\,Sen\,x + 1)^4\,(3x^2 + 7\,Cos\,x)$

$f = \sqrt{1 + x^2} = (1 + x^2)^{1/2} \Rightarrow f' = \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$f = Sen\,x + Sen\,5x + Sen(x^5) \Rightarrow f' = Cos\,x + Cos\,5x\,5 + Cos(x^5)\,5x^4$

$f = e^x + e^{4x} + e^{Sen\,x} + e^{x^2 - 3x + 1} \Rightarrow f' = e^x + e^{4x}4 + e^{Sen\,x}Cos\,x + e^{x^2 - 3x + 1}(2x - 3)$

$f = 4^x + 4^{1 + 7x} + Ln\,x + Ln(1 + x^3) \Rightarrow f' = 4^x Ln\,4 + 4^{1 + 7x}Ln\,4\;7 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x^3}3x^2$

$f = Ln(Sen\,x) + Sen(Ln\,x) \Rightarrow f' = \frac{1}{Sen\,x}Cos\,x + Cos(Ln\,x)\frac{1}{x}$

$f = e^{x^4} + e^{4^x} + 4^{e^x} \Rightarrow f' = e^{x^4}4x^3 + e^{4^x}4^x Ln\,4 + 4^{e^x}Ln\,4\,e^x$

$f = Sen(x^5 e^x + 1) \Rightarrow f' = Cos(x^5 e^x + 1)(5x^4 e^x + x^5 e^x)$

$f = [Sen(2x^4 - 1)]^3 \Rightarrow f' = 3[Sen(2x^4 - 1)]^2 Cos(2x^4 - 1)\,8x^3$

$f = [Ln(x^2 + 6x + 1)]^9 \Rightarrow f' = 9[Ln(x^2 + 6x + 1)]^8\,\frac{1}{x^2 + 6x + 1}(2x + 6)$

DERIVADA EN UN PUNTO

La determinación de la Derivada de una Función, puede realizarse de acuerdo a las anteriores Reglas. La determinación de la Derivada en un punto, requiere del simple reemplazo del punto, en la Derivada antes calculada.

Ej 6-12 Se derivan Funciones y se determina el resultado de la Derivada para un valor de su variable.

a) Si: $f_{(x)} = 3x^2 + 7x - 1$; Calcular: $f'_{(4)}$

$\Rightarrow f'_{(x)} = 6x + 7 \Rightarrow f'_{(4)} = 6 \cdot 4 + 7 = 31$

Dada la Función, se deriva por Reglas conocidas. Reemplazando: $x = 4$

b) Si: $f_{(x)} = x^2 e^x + (3x + 2)^5$; Calcular: $f'_{(0)}$

$\Rightarrow f'_{(x)} = 2xe^x + x^2 e^x + 5(3x + 2)^4 3$

$f'_{(0)} = 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 0^2 e^0 + 5(3 \cdot 0 + 2)^4 3 = 240$

La Función se deriva por Reglas conocidas. Reemplazando en: $x = 0$

c) Si: $f_{(x)} = \frac{1}{x - 3} = (x - 3)^{-1}$; Calcular: $f'_{(3)}$

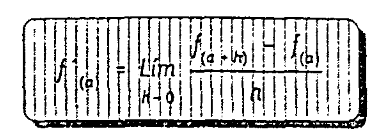
$\Rightarrow f'_{(x)} = (-1)(x - 3)^{-2} = \frac{-1}{(x - 3)^2}$; $f'_{(3)} = \nexists$

Ni la Función ni su Derivada están definidas en el valor de: $x = 3$. No existe: $f'_{(3)}$

VI-4 DERIVABILIDAD

La Derivabilidad es el estudio de la existencia de la Derivada de una Función.

En la definición de la Derivada de una Función $f_{(x)}$ en: $x = a$



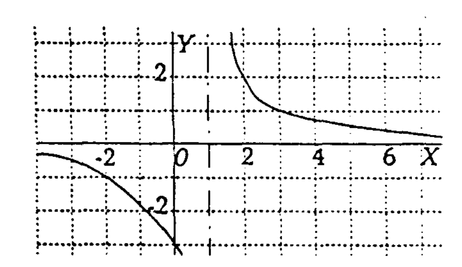
$$f'_{(a)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

Si existe el Límite en $x = a$; entonces: $f_{(x)}$ es Derivable en $x = a$. Si existe el Límite para todo: x del Dominio de: $f_{(x)}$ entonces: $f_{(x)}$ es Derivable para todo x.

Lo anterior en la práctica significa que: Una Función es Derivable, siempre y cuando sea Continua y no posea Puntos Angulosos.

Si una Función es Derivable en $x = x_0$ entonces se puede concluir que la Función está definida en $x = x_0$ además es Continua en ese punto. La conclusión en el otro sentido no es correcta, ya que una Función si está definida y es Continua, no necesariamente es Derivable (Ya que podría tratarse de un Punto Anguloso)

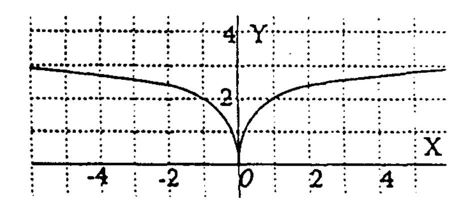
Ej 6-13 a) $f_{(x)} = \dfrac{3}{x-1}$



La Función es Derivable en todo: x excepto en: $x = 1$; ya que en ese punto la Función no es Continua (P-5-45)

Es decir que la derivada de la Función existe para todo x diferente de 1.

b) $f_{(x)} = \sqrt[3]{x^2}$



La Función es Derivable en todo: x excepto en: $x = 0$; ya que en ese punto la Función tiene un Punto Anguloso (La Función es Continua para todo: x)

6-23 Determinar si: $f_{(x)} = 3x^2$; es Derivable en: $x = a = 1$

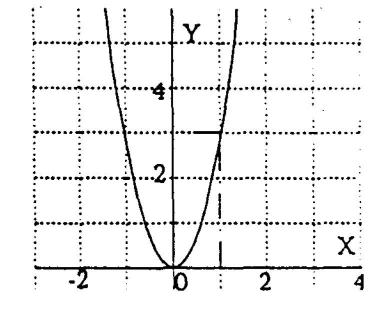
$$f'_{(a)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

$$f'_{(1)} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 - 3 \cdot 1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

De acuerdo al concepto de Derivabilidad:

El Límite existe, de valor 6, por tanto la Función es Derivable en: $x = a = 1$



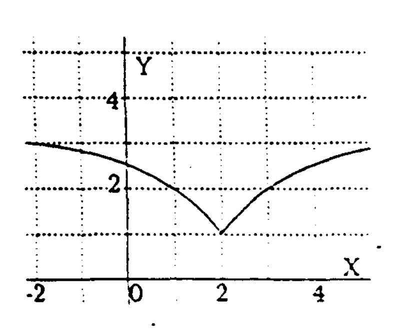
6-24 Determinar la Derivabilidad de: $f_{(x)} = (x-2)^{2/5} + 1$

La Función indicada, es Continua, para todo x ; sin embargo posee un Punto Anguloso en: $x = 2$; por ello no es Derivable en: $x = 2$

Si se deriva sin el análisis anterior se obtendría:

$$f_{(x)} = (x-2)^{2/5} + 1 \Rightarrow f'_{(x)} = \frac{2}{5(x-2)^{3/5}}$$

Evidentemente no existe la Derivada para: $x = 2$ (Por no aceptarse la división entre cero)



DERIVADAS LATERALES

La Derivada Lateral Derecha de: $f_{(x)}$ en $x = a$, se define como:

$$f'^{+}_{(a)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

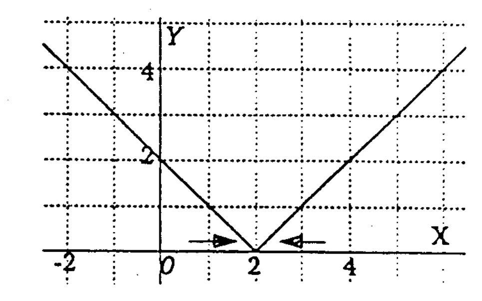
La Derivada Lateral Izquierda de: $f_{(x)}$ en $x = a$, se define como:

$$f'^{-}_{(a)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

Note que respectivamente se usan los Límites Laterales Derecho e Izquierdo:

Ej 6-14 Se calculan las Derivadas Laterales de: $f_{(x)} = |x - 2|$ en: $x = a = 2$

Derivada Lateral Derecha



$$f'^{+}_{(a)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

$$f'^{+}_{(2)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|2 + h - 2| - |2 - 2|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

La Función posee Derivadas Laterales en: $x = 2$; respectivamente de valor: 1; -1

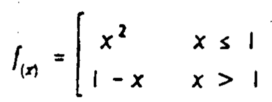
$$f'^{-}_{(a)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

$$f'^{-}_{(2)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|2 + h - 2| - |2 - 2|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1$$

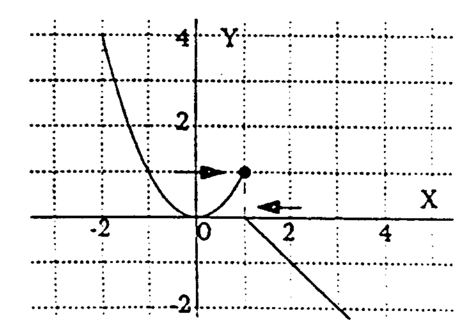
La Función no posee Derivada en $x = 2$; ya que en ese punto, sus Derivadas Laterales son diferentes entre sí.
Esta situación de que existan las Derivadas Laterales, pero no la Derivada en el Punto es usual en las Funciones Especiales, por la presencia de Puntos Angulosos como el visto en $x = 2$.

6-25 Hallar las Derivadas Laterales en: $x = a = 1$ de:



$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ 1 - x & x > 1 \end{cases}$$

Derivada Lateral Derecha



$$f'^{+}_{(a)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

$$f'^{+}_{(1)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[1 - (1 + h)] - [1 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^+} (-1) = 1$$

Derivada Lateral Izquierda

$$f'^{-}_{(a)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

$$f'^{-}_{(1)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h}$$

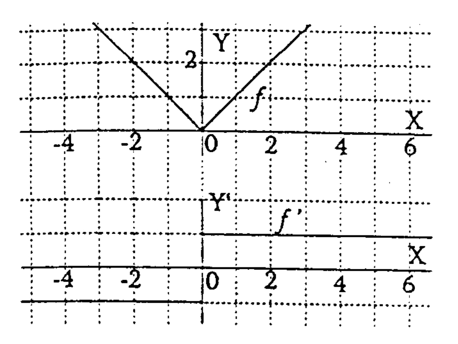
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

Los Límites Laterales en ambos casos existen, por tanto las Derivadas Laterales también existen, respectivamente son de valor: -1; 2

Los Límites Laterales, son diferentes entre sí, por tanto no existirá Límite en: $x = a = 1$

Por tanto no existe Derivada en el valor de $x = a = 1$.

6-26 Derivar: $f_{(x)} = |x|$

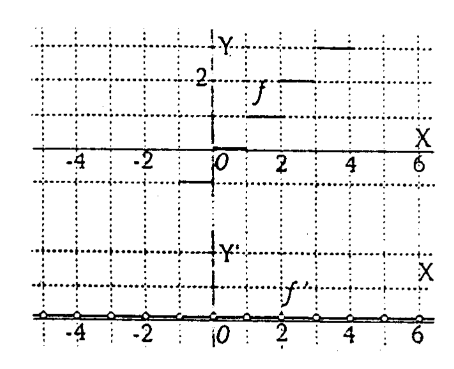


Utilizando la definición de Valor Absoluto:

$$f = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f' = |x|' = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

No Existe Derivada en $x = 0$; por tratarse de un Punto Anguloso. Por tanto la derivada de la Función Valor Absoluto es la Función Signo

6-27 Derivar: $f_{(x)} = [\![x]\!]$

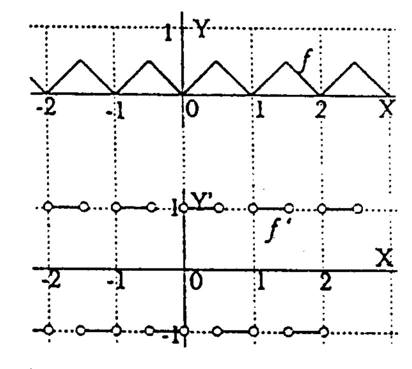


Utilizando la definición de la Parte Entera:

$$[\![x]\!] = \begin{cases} .. & ..... \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ .. & .... \end{cases} \Rightarrow [\![x]\!]' = \begin{cases} .. & ..... \\ 0 & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 < x < 3 \\ .. & .... \end{cases}$$

No Existe Derivada en los Enteros, ya que en estos puntos la Función no es Continua. En los restantes Reales es cero.

6-28 Derivar: $f_{(x)} = \{ x \}$

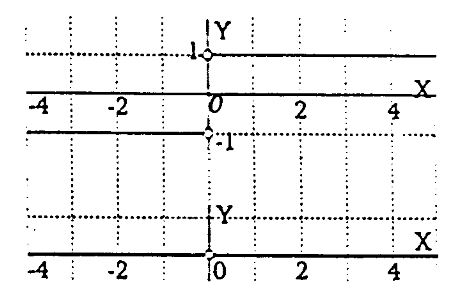


Utilizando la definición de la Función Distancia:

$$\{x\} = \begin{cases} .... & ..... \\ -x & -1/2 \le x \le 0 \\ x & 0 \le x \le 1/2 \\ 1-x & 1/2 \le x \le 1 \\ x-1 & 1 \le x \le 3/2 \\ .... & .... \end{cases} \Rightarrow \{x\}' = \begin{cases} .... & ..... \\ -1 & -1/2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1/2 \\ -1 & 1/2 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 3/2 \\ .... & .... \end{cases}$$

No Existe Derivada en los múltiplos de 1/2; ya que en estos se hallan los Puntos Angulosos.

6-29 Derivar: $f_{(x)} = SGN(x) = \dfrac{|x|}{x}$

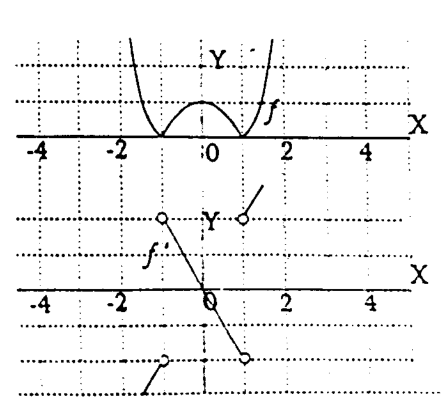


Utilizando la definición de la Función Signo:

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{|x|}{x}\right)' = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

No existe Derivada en $x = 0$; Función no definida en $x = 0$

6-30 Derivar $f_{(x)} = |x^2 - 1|$



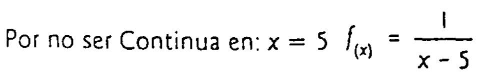
$$f_{(x)} = |x^2 - 1| = \begin{cases} (x^2 - 1) & x^2 - 1 > 0 \\ 0 & x^2 - 1 = 0 \\ -(x^2 - 1) & x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = |x^2 - 1|' = \begin{cases} 2x & x^2 - 1 > 0 \\ \nexists & x^2 - 1 = 0 \\ -2x & x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

La Derivada no existe en los dos puntos Angulosos de la Función.

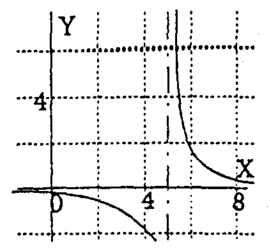
6-31 Indicar dos Funciones, no Derivables en: $x = 5$; Derivables en todo otro: x

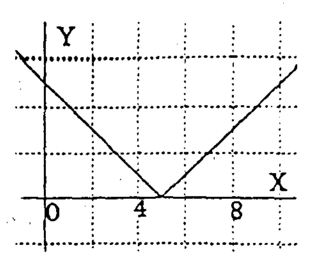
Una Función es No Derivable en: $x = 5$, por no ser Continua o poseer un Punto Anguloso en ese valor, luego:



Por no ser Continua en: $x = 5$ $\quad f_{(x)} = \dfrac{1}{x-5}$

Por poseer un Punto Anguloso en: $x = 5$ $\quad f_{(x)} = |x - 5|$



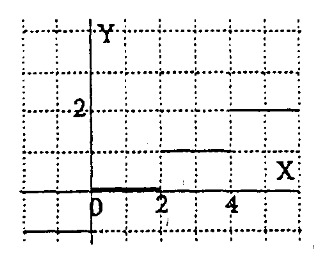


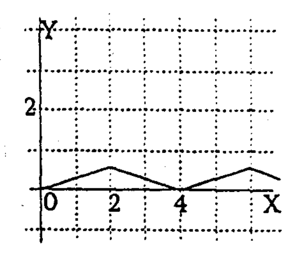
6-32 Indicar dos Funciones No Derivables en x par, Derivables en todo otro: x

Nuevamente se consideran las condiciones de no derivabilidad, esta vez para: x par

Por no ser Continua en x par: $\quad f_{(x)} = [\![\dfrac{x}{2}]\!]$

Por poseer Puntos Angulosos en x par $\quad f_{(x)} = \{\dfrac{x}{4}\}$

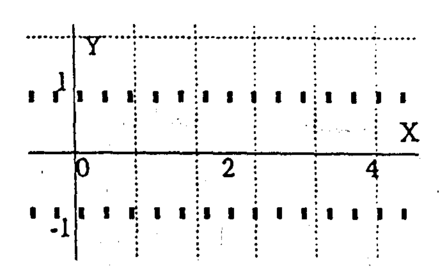




6-33 Indicar una Función definida para todo: x, no Derivable en ningún x

Una Función no Derivable en ningún x, deberia ser Discontinua para todo: x; o también una Función que posea Puntos Angulosos para todo: x

Por la 1[era] posibilidad: $\quad f_{(x)} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

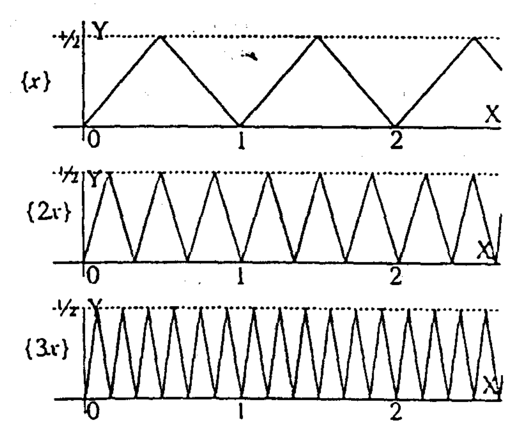


6-34 Indicar una Función Continua para todo x; No Derivable en ningún $x \in R$

Para no ser Derivable en ningún x; siendo Continua para todo: x, necesariamente la Función deberá poseer Puntos angulosos en todo x

La Función Distancia, cuya evolución se muestra en las gráficas, puede incrementar sus Puntos Angulosos a medida que crece n y si se suman las Funciones Distancia, con todo n. La Función poseerá Puntos Angulosos, para todo x

$$f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \{nx\}$$



6-35 Indicar en que Puntos existe Derivada, para las siguientes Funciones:

$f_{(x)} = x^2 - 3$	$\Rightarrow$	$f'_{(x)} = 2x$	Existe Derivada para todo: $x \in \mathbb{R}$
$f_{(x)} = 3^x + 1$	$\Rightarrow$	$f'_{(x)} = 3^x \, Ln\, 3$	Existe Derivada para todo: $x \in \mathbb{R}$
$f_{(x)} = Ln\, x$	$\Rightarrow$	$f'_{(x)} = \dfrac{1}{x}$	Existe Derivada para todo: $x \in \mathbb{R}^+$
$f_{(x)} = Sen\, x$	$\Rightarrow$	$f'_{(x)} = Cos\, x$	Existe Derivada para todo: $x \in \mathbb{R}$
$f_{(x)} = 1$	$\Rightarrow$	$f'_{(x)} = 0$	Existe Derivada para todo: $x \in \mathbb{R}$
$f_{(x)} = x^1$	$\Rightarrow$	$f'_{(x)} = ??$	No Existe Derivada para ningún $x \in R$

VI-5 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La Derivada de una Función es también otra Función, por tanto podría a su vez derivarse, obteniendo así la llamada Segunda Derivada, ésta al derivarse determinará la Tercera Derivada y así sucesivamente.

A partir de la Segunda Derivada, se llaman Derivadas de Orden Superior.

Si: f Función original

f'	Primera derivada
$(f')' = f'' = f^{(2)}$	Segunda derivada
$(f'')' = f''' = f^{(3)}$	Tercera derivada
$\ldots = f''^{\cdots} = f^{(n)}$	Enésima derivada

<u>Ej 6-15</u>

$f = x^3 - 4x^2 + 7x + 1$	Función original
$f' = 3x^2 - 8x + 7$	Derivada (O Primera Derivada)
$f'' = 6x - 8$	Derivada de la Primera Derivada (O Segunda Derivada)
$f''' = 6$	Derivada de la Segunda Derivada (O Tercera Derivada)

Las condiciones de existencia de las Derivadas de Orden Superior, son equivalentes a las condiciones de la Primera Derivada.

6-36 Hallar hasta la Derivada de Orden siete : Si: $f = x^5 + x^3 - 1$; $g = Sen\,x + 1$

$f = x^5 + x^3 - 1$	$g = Sen\,x$	
$f' = 5x^4 + 3x^2$	$g' = Cos\,x$	Primera Derivada
$f'' = 20x^3 + 6x$	$g^{(2)} = -Sen\,x$	Segunda Derivada
$f''' = 60x^2 + 6$	$g^{(3)} = -Cos\,x$	Tercera Derivada
$f^{iv} = 120x$	$g^{(4)} = Sen\,x$	Cuarta Derivada
$f^{v} = 120$	$g^{(5)} = Cos\,x$	Quinta Derivada
$f^{vi} = 0$	$g^{(6)} = -Sen\,x$	Sexta Derivada
$f^{vii} = 0$	$g^{(7)} = -Cos\,x$	Séptima Derivada

Otra notación para las Derivadas de Orden Superior, es la siguiente: $f^{(n)}$, donde n es el Orden de Derivada. Así la expresión $f^{(7)}$ representa a la Derivada de orden 7.

En los casos anteriores se muestran las Derivadas con ambas notaciones.

6-37 Hallar las Derivadas de Orden 2; Si: $f = x^3 Sen\,x$; $g = Cos\,3x$

$$f = x^3 Sen\,x$$
$$f' = 3x^2 Sen\,x + x^3 Cos\,x$$
$$f'' = 6x\,Sen\,x + 3x^2 Cos\,x + 3x^2 Cos\,x + x^3(-Sen\,x)$$
$$= -x^3 Sen\,x + 6x^2 Cos\,x + 6x\,Sen\,x$$

$$g = Cos\,3x$$
$$g' = -Sen\,3x\,3$$
$$g'' = -Cos\,3x\,3 \cdot 3$$
$$= -9\,Cos\,3x$$

Note la plena validéz de la Regla del Producto y de la Cadena en las Derivadas de Orden Superior.

6-38 Hallar las Derivadas de Orden 2. Si: $f = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$; $g = e^{7x-1}$

$$f = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$$

$$f' = \frac{3x^2(x^3 + 1) - (x^3 - 1)3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$f'' = \frac{12x(x^3 + 1)^2 - 6x^2\,2(x^3 + 1)3x^2}{[(x^3 + 1)^2]^2} = \frac{12x - 24x^4}{(x^3 + \text{[illegible]}}$$

$$g = e^{7x-1}$$
$$g' = e^{7x-1}\,7$$
$$g'' = e^{7x-1}\,7 \cdot 7$$
$$= 49\,e^{7x-1}$$

6-39 Hallar la Derivada Enésima (Orden: n) de: $f_{(x)} = \dfrac{1}{x + a}$

Para hallar la Derivada Enésima o Fórmula general de Derivada de orden: n; es conveniente derivar unas cuantas veces y observar la evolución de las expresiones obtenidas. (No simplificar las expresiones obtenidas). A izquierda se anotan las Derivadas, a derecha se ordenan tales Derivadas

$$f = \frac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}$$
$$f' = (-1)(x+a)^{-2}$$
$$f'' = (-1)(-2)(x+a)^{-3}$$
$$f''' = (-1)(-2)(-3)(x+a)^{-4}$$
$$f^{iv} = (-1)(-2)(-3)(-4)(x+a)^{-5}$$
$$\ldots = \ldots$$
$$f^{(n)} = (-1)(-2)(-3)\ldots(-n)(x+a)^{-(n+1)}$$

$$f = (x+a)^{-1}$$
$$f' = (-1)\,1!\,(x+a)^{-2}$$
$$f'' = (-1)^2\,2!\,(x+a)^{-3}$$
$$f''' = (-1)^3\,3!\,(x+a)^{-4}$$
$$f^{iv} = (-1)^4\,4!\,(x+a)^{-5}$$
$$\ldots = \ldots$$
$$f^{(n)} = (-1)^n\,n!\,(x+a)^{-(n+1)}$$

La última expresión obtenida es la Derivada Enésima.

Sin embargo su validez total, debe aún demostrarse por Inducción Matemática.

6-40 Hallar la Derivada Enésima de: $f_{(x)} = 2^{5x}$

$$f = 2^{5x}$$
$$f' = 2^{5x}\,(Ln\,2)\,5$$
$$f'' = [2^{5x}\,(Ln\,2)\,5]\,(Ln\,2)\,5$$
$$f''' = [2^{5x}\,(Ln\,2)\,5]\,(Ln\,2)\,5\,(Ln\,2)\,5$$
$$\ldots = \ldots$$
$$f^{(n)} = [2^{5x}\,(Ln\,2)\,5]\,(Ln\,2)\,5(Ln\,2)\,5\ldots\ldots(Ln\,2)\,5$$

$$f = 2^{5x}$$
$$f' = 2^{5x}\,(Ln\,2)\,5$$
$$f'' = 2^{5x}\,(Ln\,2)^2\,5^2$$
$$f''' = 2^{5x}\,(Ln\,2)^3\,5^3$$
$$\ldots = \ldots$$
$$f^{(n)} = 2^{5x}\,(Ln\,2)^n\,5^n$$

Previamente se calculan varias Derivadas, para luego ordenarlas

Se comparan los resultados que se obtienen.

6-41 Hallar la Derivada Enésima de: $f_{(x)} = Ln(ax + b)$

$$f = Ln(ax+b)$$
$$f' = \frac{1}{ax+b}\,a = (ax+b)^{-1}\,a$$
$$f'' = (-1)(ax+b)^{-2}\,a\cdot a$$
$$f''' = (-1)(-2)(ax+b)^{-3}\,a\cdot a\cdot a$$
$$f^{iv} = (-1)(-2)(-3)(ax+b)^{-4}\,a\cdot a\cdot a\cdot a$$
$$\ldots = \ldots$$
$$f^{(n)} = (-1)(-2)\ldots[-(n-1)](ax+b)^{-n}\,a\cdot a\cdot a\ldots$$

$$f = Ln(ax+b)$$
$$f' = (ax+b)^{-1}\,a$$
$$f'' = (-1)\,1!\,(ax+b)^{-2}\,a^2$$
$$f''' = (-1)^2\,2!\,(ax+b)^{-3}\,a^3$$
$$f^{iv} = (-1)^3\,3!\,(ax+b)^{-4}\,a^4$$
$$\ldots = \ldots$$
$$f^{(n)} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,(ax+b)^{-n}\,a^n$$

6-42 Hallar la Derivada Enésima de: $f_{(x)} = (ax + b)^m$

$$f = (ax+b)^m$$
$$f' = m\,(ax+b)^{m-1}\,a$$
$$f'' = m(m-1)(ax+b)^{m-2}\,a\cdot a$$
$$f''' = m(m-1)(m-2)(ax+b)^{m-3}\,a\cdot a\cdot a$$
$$f^{iv} = m(m-1)(m-2)(m-3)(ax+b)^{m-4}\,a\cdot a\cdot a\cdot a$$
$$\ldots = \ldots$$
$$f^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](ax+b)^{m-n}\,a\cdot a\ldots$$

$$f = (ax+b)^m$$
$$f' = \frac{m!}{(m-1)!}(ax+b)^{m-1}\,a$$
$$f'' = \frac{m!}{(m-2)!}(ax+b)^{m-2}\,a^2$$
$$f''' = \frac{m!}{(m-3)!}(ax+b)^{m-3}\,a^3$$
$$f^{iv} = \frac{m!}{(m-4)!}(ax+b)^{m-4}\,a^4$$
$$\ldots = \ldots$$
$$f^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!}(ax+b)^{m-n}\,a^n$$

6-43 Deducir una fórmula para la Derivada Enésima de: $f = Sen\,x$; $g = Cos\,x$

$$f = Sen\,x = Sen(x + 0) \qquad g = Cos\,x = Cos(x + 0)$$

$$f' = Cos\,x = Sen(x + 1\frac{\pi}{2}) \qquad g' = -Sen\,x = Cos(x + 1\frac{\pi}{2})$$

$$f'' = -Sen\,x = Sen(x + 2\frac{\pi}{2}) \qquad g'' = -Cos\,x = Cos(x + 2\frac{\pi}{2})$$

$$f''' = -Cos\,x = Sen(x + 3\frac{\pi}{2}) \qquad g''' = Sen\,x = Cos(x + 3\frac{\pi}{2})$$

$$f^{iv} = Sen\,x = Sen(x + 4\frac{\pi}{2}) \qquad g^{iv} = Cos\,x = Cos(x + 4\frac{\pi}{2})$$

$$.... = ... \qquad ... = ...$$

$$f^{(n)} = ... = Sen(x + n\frac{\pi}{2}) \qquad g^{(n)} = ... = Cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

En ambos casos las Funciones Trigonométricas tienen un periodo de 2π Radianes.

Al repetirse la misma Función cada 4 órdenes de derivación, es suficiente con agregar: $2\,\pi/4$ al ángulo, cada vez que se deriva.

6-44 Deducir una Fórmula para la Derivada Enésima de: $f = Cos\,2x$; $g = Sen^2x$

$$f = Cos\,2x = Cos(2x + 0)$$

$$f' = -Sen\,2x\,2 = Cos(2x + 1\frac{\pi}{2})\,2$$

$$f'' = -Cos\,2x\,2\cdot 2 = Cos(2x + 2\frac{\pi}{2})\,2^2$$

$$f''' = Sen\,2x\,2\cdot 2\cdot 2 = Cos(2x + 3\frac{\pi}{2})\,2^3$$

$$f^{iv} = Cos\,2x\,2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = Cos(2x + 3\frac{\pi}{2})\,2^4$$

$$... = ...$$

$$f^{(n)} = ... = Cos(2x + n\frac{\pi}{2})\,2^n$$

$$g = Sen^2x$$

$$g = \frac{1 - Cos\,2x}{2}$$

$$g = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Cos\,2x$$

$$g^{(n)} = -\frac{1}{2}Cos(2x + n\frac{\pi}{2})\,2^n$$

Para el segundo caso, se usa una Identidad Trigonométrica y se aplica el resultado de la Primera Función.

6-45 Deducir una Fórmula para la Derivada Enésima: $f = \dfrac{7x - 1}{x^2 - 2x - 3}$

En este caso, no es conveniente derivar directamente, ya que las expresiones se complican, es preferible separar la Fracción como una Suma de Fracciones Parciales, de acuerdo a un Teorema Algebraico.

$$f = \frac{7x - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{7x - 1}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)}$$

Las Fracciones Simples poseen por numerador a una constante (Cuyo valor se determinará luego) y por denominador a uno de los factores del denominador original. Igualando numeradores de la fracción original y de la suma de fracciones simples.

$$7x - 1 = A(x + 1) + B(x - 3)$$

$$\text{Si: } x = 3 \quad 7\cdot 3 - 1 = A(3 + 1) + B(3 - 3) \Rightarrow A = 5$$

$$x = -1 \quad 7(-1) - 1 = A(-1 + 1) + B(-1 - 3) \Rightarrow B = 2$$

Reemplazando valores adecuados en: x se calculan las constantes.

$$\text{Por tanto: } f = \frac{7x - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x + 1}$$

La Fracción queda expresada como una Suma de Fracciones Simples.

Aplicando los resultados de las Derivadas Enésimas del anterior Problema de P-6-39: con $a = -3$; $a = 1$ respectivamente, obteniendo:

$$f^{(n)} = 5\,(-1)^n n!\,(x - 3)^{-(n+1)} + 2\,(-1)^n n!\,(x + 1)^{-(n+1)}$$

$$= (-1)^n n!\,[5\,(x - 3)^{-(n+1)} + 2\,(x + 1)^{-(n+1)}]$$

Factorizando, se obtiene la expresión final de la Derivada Enésima.

VI-6 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

FUNCIONES EXPLÍCITAS

Son aquellas Funciones que presentan la forma: $y = f_{(x)}$; mostrando una relación explícita entre las variables: x, y (y está despejada en términos de: x)

Ej 6-16 $y = x^2 + 5x - 1$ Son ejemplos de Funciones Explícitas

$y = x^8 \text{Sen}\, x + 5x$ Para derivarlas se recurre a las Reglas de Derivación antes estudiadas.

FUNCIONES IMPLÍCITAS

Son aquellas Funciones que presentan la forma: $F_{(x,y)} = 0$; asumiendo una relación implícita entre las variables: x, y (y no está despejada en términos de: x)

Ej 6-17 $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$x^5 + y^5 + y + x - 1 = 0$

Si: $x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$

Son dos Funciones Implícitas, donde se asume que: $y = f_{(x)}$

Algunas Funciones Implícitas pueden convertirse en Explícitas (Despejando: y), como en el último ejemplo.

Sin embargo no toda Función Implícita, puede convertirse en Explícita. Como la 2da Función anterior (Debido a que no siempre es posible el despeje de: y)

Para derivar Funciones Implícitas, asumiendo siempre que $y = f_{(x)}$ se aplica la Regla a los Términos de y (Por tanto si $y = f_{(x)}$ su Derivada es: y')

Ej 6-18 $x^5 + y^3 - 8 = 0$ Función Implícita dada

$5x^4 + 3y^2y' = 0$ Derivando implícitamente (Se derivan todos los Términos, los de: x por Reglas conocidas, los de y también pero luego se multiplican por: y').

$\Rightarrow y' = -\dfrac{5x^4}{3y^2}$ Despejando luego la Derivada: y'

Ej 6-19

$x^9 + y^7 + 3x^4 + 5y^3 = 0$ Función Implícita dada.

$9x^8 + 7y^6y' + 12x^3 + 15y^2y' = 0$ Derivando implícitamente (Se derivan todos los Términos)

$y'(7y^6 + 15y^2) = -9x^8 - 12x^3$ Factorizando: y', para luego despejar

$\Rightarrow y' = -\dfrac{9x^8 + 12x^3}{7y^6 + 15y^2}$

6-46 Derivar implícita y explícitamente: $x^2 + y^2 = 1$

Derivada implícita

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$2x + 2yy' = 0$

$\Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

Derivada explícita

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2}$ Despejando y, Derivando

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$ Ordenando el resultado. Por despeje previo

Los resultados de ambos procedimientos son los mismos, note la sencillez de la resolución por la Derivada Implícita. En ambos casos, los resultados se expresan en términos de las variables: x, y

6-47 Derivar las siguientes Funciones Implícitas:

a) $y^3 - x^2 + y^2 = 1$

$3y^2y' - 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{3y^2 + 2y}$

Dada la Función Implícita, se deriva implícitamente. Luego se despeja la Derivada: y'

b) $y^5 + x^4 + y^4 + x^2 + y = 5x$

$5y^4y' + 4x^3 + 4y^3y' + 2x + y' = 5 \Rightarrow y' = \dfrac{5 - 4x^3 - 2x}{5y^4 + 4y^3 + 1}$

c) $y^3x^2 + x^3 + y^2 = 1$

$3y^2y'x^2 + y^3 2x + 3x^2 + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-y^3 2x - 3x^2}{3y^2x^2 + 2y}$

En la Derivación del Primer Término, se usa la Regla del Producto.

d) $x^5y^5 - x^2y^2 = 1$

$5x^4y^5 + x^5 5y^4y' - 2xy^2 - x^2 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{2xy^2 - 5x^4y^5}{5x^5y^4 - 2x^2y} = \dfrac{2y - 5x^3y^4}{5x^4y^3 - 2x}$

e) $\dfrac{y^3 - 1}{x^3 + 1} - y^2 = 1$

$\dfrac{3y^2y'(x^3 + 1) - (y^3 - 1)3x^2}{(x^3 + 1)^2} - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{(y^3 - 1)3x^2}{3y^2(x^3 + 1) - 2y(x^3 + 1)^2}$

6-48 Derivar implícitamente las siguientes Funciones de diversa naturaleza:

a) $Sen\, y - Sen\, x + y - x = 1 \Rightarrow Cos\, y\, y' - Cos\, x + y' - 1 = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{Cos\, x + 1}{Cos\, y + 1}$

b) $Sen^3 x - Cos^3 y = 1 \Rightarrow 3\, Sen^2 x\, Cos\, x + 3\, Cos^2 y\, Sen\, y\, y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-Sen^2 x\, Cos\, x}{Cos^2 y\, Sen\, y}$

c) $Sen\, \dfrac{x}{y} = 1 + x \Rightarrow Cos\, \dfrac{x}{y}\, \dfrac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = 1 \Rightarrow y' = \dfrac{y^2 - y\, Cos\, \dfrac{x}{y}}{- x\, Cos\, \dfrac{x}{y}}$

Para derivar el Término x/y se aplica la Regla del cociente.

d) $e^y - e^x - e^{x^2} + e^{y^2} = 1 \Rightarrow e^y y' - e^x - e^{x^2} 2x + e^{y^2} 2y y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{e^x + 2xe^{x^2}}{e^y + 2ye^{y^2}}$

e) $Ln(x^3 - y^3) + x^3y^3 = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{(3x^2 - 3y^2y')}{x^3 - y^3} + 3x^2y^3 + x^3 3y^2 y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-3x^2 - 3x^2y^3(x^3 - y^3)}{-3y^2 + x^3 3y^2(x^3 - y^3)}$

f) $Sen(x^2 + y^2) = x \Rightarrow Cos(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 1 \Rightarrow y' = \left(\dfrac{1}{Cos(x^2 + y^2)} - 2x\right)\dfrac{1}{2y}$

g) $e^{Sen(x^2 - y^2)} = x$

$e^{Sen(x^2 - y^2)} Cos(x^2 - y^2)(2x - 2yy') = 1 \Rightarrow y' = \dfrac{2x e^{Sen(x^2 - y^2)} Cos(x^2 - y^2) - 1}{2y\, e^{Sen(x^2 - y^2)} Cos(x^2 - y^2)}$

Ej 6-20 Hallar la Segunda derivada Implícita en:

$$x^5 + y^3 = 1$$

Función Implícita dada

$$5x^4 + 3y^2y' = 0$$

Derivando Implícitamente cada uno de los Términos de la Función.

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{5x^4}{3y^2}$$

Despejando: y', se obtiene la Derivada Implícita.

$$\Rightarrow \quad y'' = -\frac{(20x^3)(3y^2) - (5x^4)(6yy')}{(3y^2)^2}$$

Para calcular y'' se deriva y' por la Regla del Cociente. Al derivar términos que contienen a y, se debe multiplicar por y'

$$= \frac{(20x^3)(3y^2) - (5x^4)(6y(-5x^4/3y^2))}{9y^4}$$

Reemplazando la Expresión de: y', por lo obtenido anteriormente.

$$= -\frac{60x^3y^3 + 50x^8}{9y^5}$$

Simplificando y ordenando.

6-49 Calcular la Segunda derivada Implícita

$$2^x - 2^y = 1$$

Función Implícita dada

$$2^x \ln 2 - 2^y \ln 2 = 0$$

Derivando implícitamente, de acuerdo a Reglas conocidas.

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{2^x \ln 2}{2^y \ln 2} = 2^{x-y}$$

Despejando: y', simplificando el cociente por Leyes de exponentes.

$$\Rightarrow \quad y'' = 2^{x-y}\ln 2\,(1 - y')$$

Volviendo a derivar: y', para obtener: y''

$$= 2^{x-y}\ln 2\,(1 - 2^{x-y})$$

Reemplazando la Expresión de: y'

6-50 Demostrar: $y'' = -\dfrac{R^2}{y^3}$; Si: $x^2 + y^2 = R^2$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$2x + 2yy' = 0$$

Función Implícita dada

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Derivando implícitamente y despejando: y'

$$\Rightarrow \quad y'' = -\frac{1\cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2}$$

Derivando nuevamente para obtener: y'', usando la Regla de Derivada de Cocientes.

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}$$

Reemplazando: y', luego ordenando, reemplazando la expresión original se demuestra lo requerido.

6-51 Demostrar Si: $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow y'' = -\dfrac{a^4}{b^2y^3}$

Si: $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$

Función Implícita dada.

$$a^2 2x + b^2 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{a^2x}{b^2y} \Rightarrow$$

Derivando Implícitamente, despejando: y'

$$y'' = -\frac{a^2b^2y - a^2xb^2y'}{(b^2y)^2} = -\frac{a^2b^2y - a^2xb^2(-a^2x/b^2y)}{b^4y^2}$$

Derivando nuevamente para obtener: y''. Reemplazando y'

$$= -\frac{a^2(b^2y^2 + a^2x^2)}{b^4y^3} = -\frac{a^2(a^2b^2)}{b^4y^3} = -\frac{a^4}{b^2y^3}$$

El numerador presenta la forma de la Función Implícita originalmente planteada, reemplazando queda demostrado la Proposición

DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Para obtener las Derivadas de las Funciones Trigonométricas Inversas (En realidad de todas las Funciones del Tipo Inversas), se recurre a la Derivación Implícita, por las ventajas que representa.

Ej 6-21 Si: $y = Arcsen\, x$ — Función Trigonométrica Inversa

$Sen\, y = x$ — Por definición, despejando: x

$Cos\, y\, y' = x$ — Derivando Implícitamente por sus reglas.

$y' = \dfrac{1}{Cos\, y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - Sen^2 y}}$ — Despejando: y'. Por Identidad Trigonométrica, se reemplaza la expresión de: $Cos\, y$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ — De acuerdo a la Ecuación anterior: $Sen\, y = x$. Derivada de la Función, en términos de: x

6-52 Derivar las siguientes Funciones Trigonométricas Inversas:

a)

$$y = Arccos\, x$$
$$Cos\, y = x$$
$$-Sen\, y\, y' = 1$$
$$y' = \frac{-1}{Sen\, y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - Cos^2 y}}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b)

$$y = Arctan\, x$$
$$Tan\, y = x$$
$$Sec^2 y\, y' = 1$$
$$y' = \frac{1}{Sec^2 y} = \frac{1}{1 + Tan^2 y}$$
$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

MÉTODO DE DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

El Método de Derivación Logarítmica, es un método de Derivación de Funciones, mediante Logaritmos previos y aplicando luego la Derivación Implícita.

Este método permite también la demostración de algunas Reglas de Derivación.

Ej 6-22 Si: $y = x^r$ — Función donde: r es un Número Real (Racional o Irracional)

$Ln\, y = Ln(x^r)$ — Aplicando Logaritmos y desarrollando.

$Ln\, y = r\, Ln\, x$ — Derivando implícitamente por sus reglas.

$\dfrac{1}{y} y' = r \dfrac{1}{x}$ — Despejando: y'

$y' = r \dfrac{1}{x} y = r \dfrac{1}{x} x^r$ — Reemplazando: $y = x^r$; como originalmente se planteó la Función. Simplificando.

$= r\, x^{r-1}$ — Derivada de la Función. Esta Derivada es una generalización de la demostrada en P-6-7

Si: $y = u^v$ — Función donde: u, v son Funciones de la variable x

$Ln\, y = Ln(u^v) = v\, Ln\, u$ — Aplicando Logaritmos y desarrollando.

$\dfrac{1}{y} y' = v'\, Ln\, u + v \dfrac{1}{u} u'$ — Derivando implícitamente. Despejando: y'

$y' = y(v'\, Ln\, u + v \dfrac{u'}{u})$ — Reemplazando: $y = u^v$

$= u^v (v'\, Ln\, u + v \dfrac{u'}{u})$

6-53 Derivar las siguientes Funciones, aplicando previamente Logaritmos.

a)

$$y = \frac{x^2 \cos x}{1 + x^5}$$ Función dada a derivar

Aplicando Logaritmos Neperianos a ambos miembros de la igualdad.

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^2 \cos x}{1 + x^5}\right)$$ Desarrollando por propiedad del Logaritmo de un cociente.

$$= \ln(x^2 \cos x) - \ln(1 + x^5)$$ Por el Logaritmo de un producto.

$$= \ln(x^2) + \ln(\cos x) - \ln(1 + x^5)$$ Por el Logaritmo de una potencia.

$$= 2\ln x + \ln(\cos x) - \ln(1 + x^5)$$ Derivando implícitamente.

$$\frac{1}{y}y' = 2\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{Sen} x) - \frac{1}{1 + x^5}(5x^4)$$ Despejando y', ordenando la expresión.

Reemplazando la Función y por su expresión original, se obtiene la derivada requerida.

$$y' = y\left(\frac{2}{x} - \frac{\operatorname{Sen} x}{\cos x} - \frac{5x^4}{1 + x^5}\right) = \frac{x^2 \cos x}{1 + x^5}\left(\frac{2}{x} - \tan x - \frac{5x^4}{1 + x^5}\right)$$

b)

$$y = \sqrt{\frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 - x - 1}}$$ Función dada a derivar

Aplicando Logaritmos a ambos miembros.

$$\ln y = \ln\left[\left(\frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 - x - 1}\right)^{1/2}\right]$$ Desarrollando por propiedades de los Logaritmos, tanto la potencia como el cociente.

$$= \frac{1}{2}[\ln(x^4 - x^2 - 1) - \ln(x^2 - x - 1)]$$ Derivando implícitamente, por reglas conocidas

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^4 - x^2 - 1}(4x^3 - 2x) - \frac{1}{x^2 - x - 1}(2x - 1)\right]$$ Despejando y'

$$y' = y\frac{1}{2}\left[\frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 - 1} - \frac{2x - 1}{x^2 - x - 1}\right]$$ Reemplazando la Función: y por su expresión original.

$$y' = \sqrt{\frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 - x - 1}}\,\frac{1}{2}\left(\frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 - 1} - \frac{2x - 1}{x^2 - x - 1}\right)$$

6-54 Derivar las siguientes Funciones usando: $(u^v)' = y' = u^v(v'\ln u + v\frac{u'}{u})$

$y = x^x$	$u = x$, $v = x$	$y' = x^x(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$
$y = x^{\operatorname{Sen} x}$	$u = x$, $v = \operatorname{Sen} x$	$y' = x^{\operatorname{Sen} x}(\cos x \ln x + \operatorname{Sen} x\frac{1}{x})$
$y = \tan^x x$	$u = \tan x$, $v = x$	$y' = \tan^x x[1 \cdot \ln(\tan x) + x\frac{\operatorname{Sec}^2 x}{\tan x}]$
$y = x^{x^x}$	$u = x$, $v = x^x$	$y' = x^{x^x}[x^x(\ln x + 1)\ln x + x^x\frac{1}{x}]$
$y = x^{x^2 - 3x - 1}$	$u = x$, $v = x^2 - 3x - 1$	$y' = x^{x^2 - 3x - 1}[(2x - 3)\ln x + \frac{x^2 - 3x - 1}{x}]$
$y = x^3$	$u = x$, $v = 3$	$y' = x^3(0 \cdot \ln x + 3\frac{1}{x}) = 3x^2$

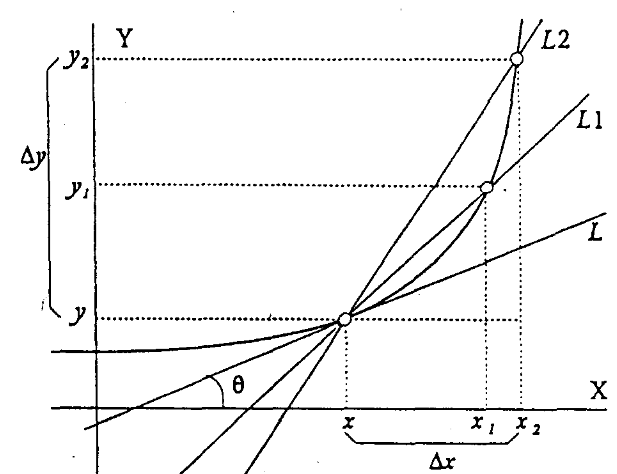
VI-7 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Luego del estudio analítico de la Derivada, es conveniente estudiar la Interpretación Geométrica de la Derivada.

Por la definición de Derivada: $f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$

Si: $\Delta x = h$; $\Delta y = f_{(x+h)} - f_{(x)} \Rightarrow f'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; Note que cuando Δx tiende a cero, también Δy tiende a cero.

Representando gráficamente la Función: $f_{(x)}$



El análisis se efectúa alrededor del punto: (x,y)

Tomando: $x_2 = x + \Delta x$; $y_2 = y + \Delta y$

La Recta: $L2$ que pasa por los puntos (x,y); (x_2,y_2) es una Recta Secante (Corta en dos puntos a la curva)

Al disminuir Δx, la Recta $L1$ pasará por: (x,y); (x_1,y_1): también es una Recta Secante.

Las pendientes de las Rectas $L1$, $L2$ son:

$$m_2 = \frac{y_2 - y}{x_2 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad ; \quad m_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

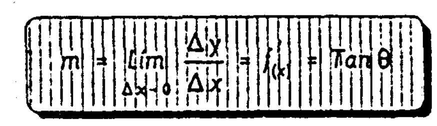
Cuando Δx tiende a cero (Δy tiende también a cero); La Recta L pasará únicamente por el punto (x,y); entonces se constituye en una Recta Tangente; la pendiente de esta Recta es:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sin embargo esta pendiente es también la definición de la Derivada, por tanto:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{(x)}$$

La Recta Tangente al tener una determinada pendiente, tendrá también un ángulo de inclinación (θ); con respecto al Semieje Positivo de las abscisas; por definición de pendiente: $m = Tan\,\theta$; se tendrá definitivamente que:



$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{(x)} = Tan\,\theta$$

Por tanto, la Derivada de una Función geométricamente es una pendiente; Esta pendiente es de la Recta Tangente que pasa por un punto de la curva.

Ej 6-23 Se calcula la Pendiente de una ecuación de recta

$y = 3x + 1$ Función (Ecuación de una Recta)

$y' = 3$ Derivando, su pendiente es una constante ($y' = m = 3$)

La pendiente calculada por derivación, coincide con el concepto de pendiente de una Recta (Ver IV-5); Se calculaba como el coeficiente de x, cuando y está despejado, según los conceptos de Geometría Analítica.

Ej 6-24 $y = x^2 + 1$ Función (Ecuación de una Parábola)

$y' = 2x$ Derivando (y' es variable en términos de: x)

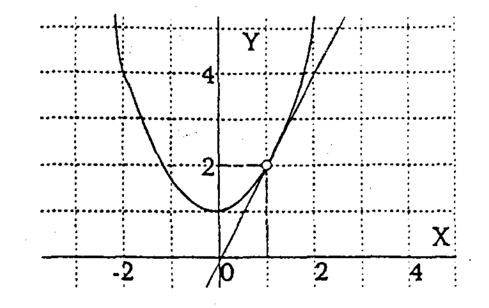
Si $x = 3 \Rightarrow y' = 2 \cdot 3 = 6$ Al ser posible reemplazar cualquier valor en x ; se obtiene cualquier valor como pendiente.

VI-8 RECTA TANGENTE

Recta Tangente a una curva es aquella Recta, que pasa por un punto de la curva y tiene por pendiente, la Derivada de la curva en ese punto.



Ej 6-25 En la Función: $f_{(x)} = x^2 + 1$



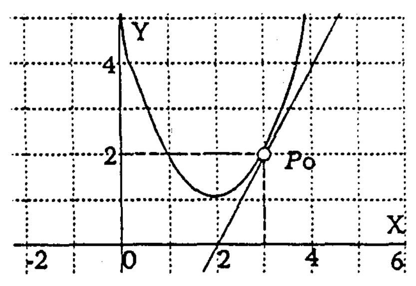
La Recta Tangente en el punto $Po(1,2)$; tiene por pendiente a:

$$m = f'_{(x)} = 2x$$

Si: $x = 1 \Rightarrow m = f'_{(1)} = 2 \cdot 1 = 2$

La Recta Tangente pasa por el punto $Po(1,2)$

6-55 Hallar la Ecuación de la Recta Tangente a la curva de: $f_{(x)} = x^2 - 4x + 5$; en el punto $Po(3,2)$



En la curva de: $f_{(x)} = x^2 - 4x + 5$ la pendiente es:

$$m = f'_{(x)} = 2x - 4$$

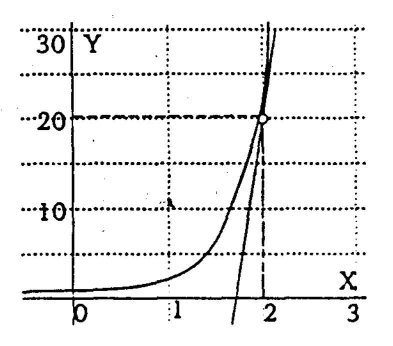
Si: $x = 3 \Rightarrow m = f'_{(3)} = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

Utilizando la Ecuación de Recta, forma de Punto-Pendiente:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$Po(3,2) \Rightarrow y - 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 4$

6-56 Ecuación de la Recta Tangente a: $y = e^{2x-1}$ en: $x = 2$



Para la curva de: $y = e^{2x-1}$; la pendiente es:

$$m = y'_{(x)} = e^{2x-1} 2$$

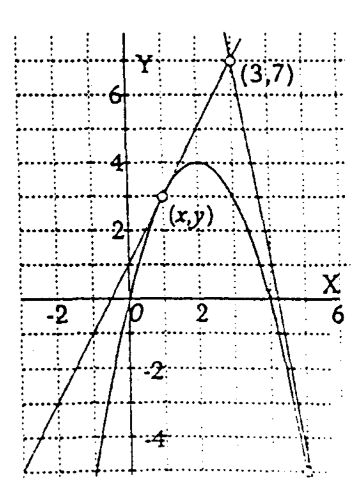
Si: $x = 2 \Rightarrow m = f'_{(2)} = e^{2 \cdot 2 - 1} 2 = 40.17$

El Punto: $x = 2 \Rightarrow y = f_{(2)} = e^{2 \cdot 2 - 1} = 20.08$

Por la Ecuación de Punto - Pendiente: $y - y_o = m(x - x_o)$

$Po(2,20.08) \Rightarrow y - 20.08 = 40.17(x - 2) \Rightarrow y = 40.17x - 60.26$

6-57 Hallar la Ecuación de la Recta Tangente a: $y = 4x - x^2$; que pase por: $P(3,7)$



Si la curva es: $y = 4x - x^2$; Su pendiente es: $y' = m = 4 - 2x$

El punto $P(3,7)$; no pertenece a la curva. Por tanto la Recta Tangente pasará por el punto $P(3,7)$ y por un punto: (x,y) que si pertenece a la curva, tal Recta Tangente será de la forma:

$$y - y_o = m(x - x_o) \Rightarrow y - 7 = (4 - 2x)(x - 3)$$

Usando la Ecuación de la Recta Tangente y la Ecuación de la curva, se presenta un Sistema de dos Ecuaciones con dos incógnitas, que permite calcular el punto: (x,y) de la curva.

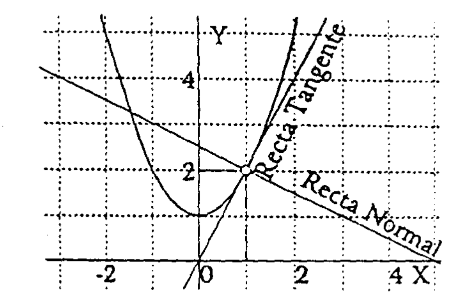
Recta Tangente	$y - 7 = (4 - 2x)(x - 3)$	$\Rightarrow$	$x = 1 ; y = 3$
Curva dada:	$y = 4x - x^2$		$x = 5 ; y = -5$

Se logran dos puntos $(1,3)$, $(5,-5)$ por tanto existen dos Rectas Tangentes, cuyas pendientes son: 2; -6 Las Rectas que pasan por $P(3,7)$ son: $\Rightarrow y - 7 = 2(x - 3)$ $\quad y - 7 = -6(x - 3)$

RECTA NORMAL

La Recta Normal a una curva, es aquella Recta que pasa por un punto de la curva y es Normal (Perpendicular) a la curva en ese punto.

En la práctica, para hallar una Recta Normal a una curva, es suficiente con hallar la Pendiente Normal o Perpendicular: $m^{\perp}$, mediante: $m^{\perp} = -1/m$ (Ver IV-9)



Ej 6-26 En la Función: $f_{(x)} = x^2 + 1$; su pendiente es:

$$m = f'_{(x)} = 2x$$

En: $P(1,2)$ $\quad m = 2 \cdot 1 = 2$

La pendiente perpendicular correspondiente a la Recta Normal es: $\quad m^{\perp} = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{2}$

6-58 En la curva de: $f_{(x)} = x^3 + 4$; Hallar Ecuaciones de la Recta Tangente y Normal en el punto $Po(1,5)$

$f_{(x)} = x^3 + 4$ — Curva dada

$m = f'_{(x)} = 3x^2$ — Pendiente: m

$m = f'_{(1)} = 3 \cdot 1^2 = 3$ — Para $x = 1$

Usando la Ecuación del Punto Pendiente, la Recta Tangente que pasa por $Po(1,5)$ es:

$$y - y_o = m(x - x_o) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 2$$

La pendiente perpendicular es: $m^{\perp} = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{3}$

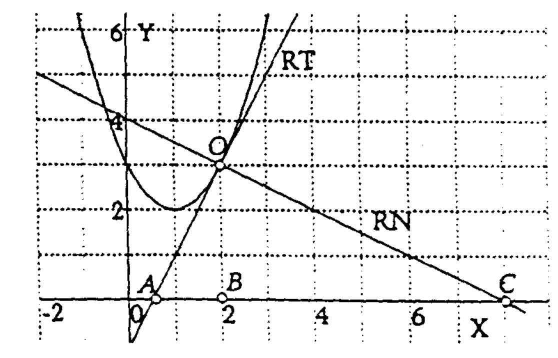


La Recta Normal que pasa por $Po(1,5)$ es:

$$y - y_o = m^{\perp}(x - x_o) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = -\frac{1}{3}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$$

6-59 En la curva de: $f_{(x)} = x^2 - 2x + 3$ Hallar las Longitudes de la Tangente, Normal, Subtangente, Subnormal en el punto: (2,3)

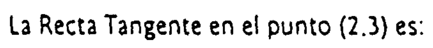
Hallando las Ecuaciones de la Recta Tangente, Normal y sus Intersecciones con las Abscisas.



$f_{(x)} = x^2 - 2x + 3$ — Curva dada

$m = f'_{(x)} = 2x - 2$ — Pendiente

$m = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ — En: $x = 2$



La Recta Tangente en el punto (2,3) es:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = 2(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1$$

Esta Recta intersecta al Eje X en: $x = 1/2$

La Recta Normal en el punto: (2,3) es:

$$y - y_o = m^{\perp}(x - x_o) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Esta Recta intersecta al Eje X en: $x = 8$

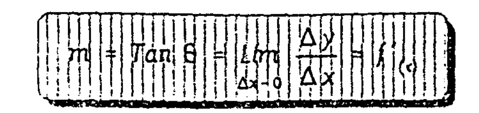
Las Longitudes requeridas, se definen y determinan (Como Distancia entre puntos) del siguiente modo

LONGITUD DE TANGENTE: $\overline{OA} = \sqrt{45/4}$ $\qquad$ LONGITUD DE NORMAL: $\overline{OC} = \sqrt{45}$

LONGITUD DE SUBTANGENTE: $\overline{AB} = 3/2$ $\qquad$ LONGITUD DE SUBNORMAL: $\overline{CB} = 6$

ÁNGULOS DE CURVAS

En la interpretación geométrica de la Derivada se obtuvo la siguiente relación:



$$m = Tan\ \theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{(x)}$$

Donde θ es el ángulo, que posee la Recta Tangente a una curva, con respecto al semieje positivo de las Abscisas. θ se llama también: ÁNGULO DE CURVA, se calcula por:

$$\theta = Arctan\ m = Arctan\ f'_{(x)}$$

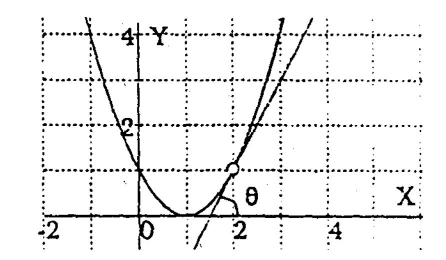
Ej 6-27 En la curva de: $f_{(x)} = x^2 - 2x + 1$; se calcula el ángulo de inclinación para el punto (2,1).

$$m = Tan\ \theta = f'_{(x)}$$

$$Tan\ \theta = 2x - 2$$

$$\text{Si: } x = 2 \quad Tan\ \theta = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

$$\theta = Arctan\ 2 = 63.43°$$



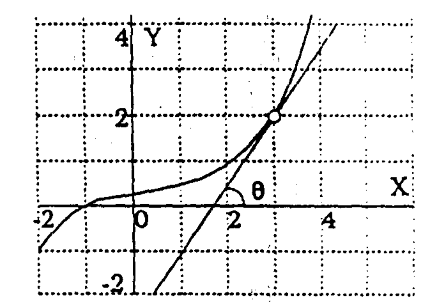
6-60 Hallar el ángulo de la curva de: $f_{(x)} = (x^3 + 1)/14$ en el punto: (3,2)

$$\text{Si: } f_{(x)} = \frac{x^3 + 1}{14} = \frac{1}{14}x^3 + \frac{1}{14}$$

$$\text{Aplicando: } Tan\ \theta = f'_{(x)} = \frac{1}{14}3x^2$$

$$\text{Si: } x = 3 \ ; \ Tan\ \theta = \frac{1}{14} 3 \cdot 3^2 = \frac{27}{14}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = Arctan\ \frac{27}{14} = 62.59°$$



6-61 Calcular el punto en el cuál la Función: $f_{(x)} = x^2 - 5x + 8$; posee un ángulo de 45°

Este es un problema inverso al anterior, dado un ángulo se trata de hallar el punto.

$$\text{Si: } f_{(x)} = x^2 - 5x + 7$$

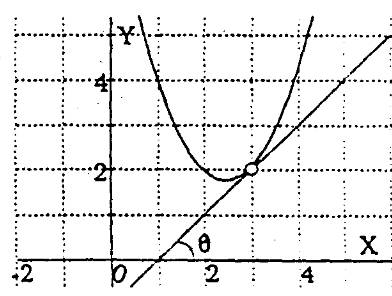
$$f'_{(x)} = Tan\ \theta = 2x - 5$$

$$\theta = 45° \ ; \ Tan\ 45° = 2x - 5$$

$$1 = 2x - 5 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f_{(3)} = 2$$



El punto con ángulo de 45° es: (3,2)



6-62 ¿En que punto la Función: $f_{(x)} = 1 + Ln\ x$; forma un ángulo de 35°?

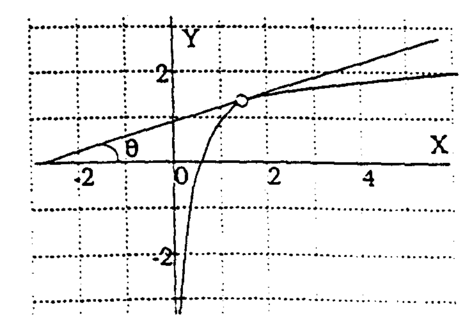
$$\text{Si: } f_{(x)} = 1 + Ln\ x$$

$$\text{Aplicando: } Tan\ \theta = f'_{(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\text{Si: } \theta = 35° \quad Tan\ 35° = \frac{1}{x}$$

$$0.70 = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$x = 1.43 \Rightarrow y = f_{(1.43)} = 1.35 \Rightarrow P(1.43, 1.35)$$



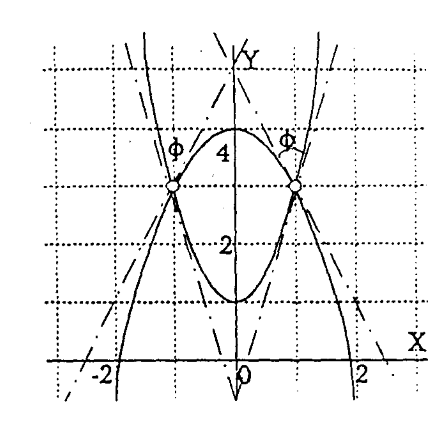
ÁNGULOS DE INTERSECCIÓN

El ángulo entre dos curvas, es en realidad el ángulo existente entre sus Rectas Tangentes en el Punto de Intersección.

Para hallar el ángulo entre las curvas, previamente se debe determinar el Punto de Intersección, en este punto se calculan las pendientes de las curvas, para luego calcular la Pendiente Diferencia, que es la Tangente del ángulo buscado (Ver IV-7)

$$Tan\,\phi = m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Ej 6-28 Ángulo entre: $f_{(x)} = 4 - x^2$; $g_{(x)} = 2x^2 + 1$



Para el Punto de Intersección, se resuelve el Sistema:

$$\begin{matrix} y = 4 - x^2 \\ y = 2x^2 + 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{matrix}$$

Pendientes: $m_1 = f' = -2x$; $m_2 = g' = 4x$

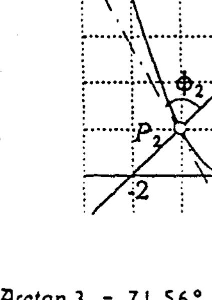
Si: $x = 1 \Rightarrow m_1 = -2$; $m_2 = 4$

$$m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{(-2) - 4}{1 + (-2)4} = \frac{6}{7}$$

Ángulo: $Tan\,\phi = \frac{6}{7} \Rightarrow \phi = Arctan\frac{6}{7} = 40.6°$

Pendiente Diferencia: El ángulo en el otro Punto de Intersección es el mismo.

6-63 Hallar los ángulos de Intersección entre: $f = x^2$; $g = x + 2$



$$\begin{matrix} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow P_1(2.4) \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P_2(-1.1) \end{matrix}$$

Puntos de Intersección:

Pendientes: $m_1 = f' = 2x$; $m_2 = g' = 1$

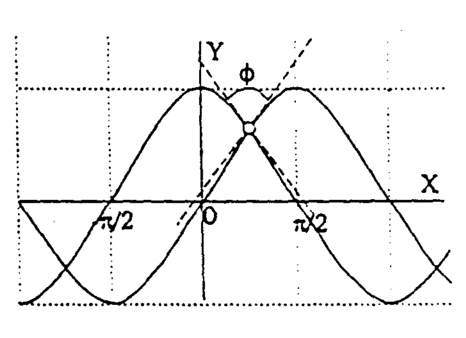
En: $P_1(2.4) \Rightarrow m_1 = 4$; $m_2 = 1$

$$m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{4 - 1}{1 + 4 \cdot 1} = \frac{3}{5} \Rightarrow Tan\,\phi_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow \phi_1 = 30.96°$$

En: $P_2(-1.1) \Rightarrow m_1 = -2$; $m_2 = 1$

$$m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{(-2) - 1}{1 + (-2)1} = 3 \Rightarrow Tan\,\phi_2 = 3 \Rightarrow \phi_2 = Arctan\,3 = 71.56°$$

6-64 Hallar el ángulo de intersección entre las curvas de: $f = Sen\,x$; $g = Cos\,x$



Si: $\begin{matrix} y = Sen\,x \\ y = Cos\,x \end{matrix} \Rightarrow 1 = Tan\,x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Dividiendo entre ecuaciones

Pendientes: $m_1 = f' = Cos\,x$; $m_2 = g' = -Sen\,x$

Si: $x = \pi/4 \Rightarrow m_1 = 0.707$; $m_2 = -0.707$

$$m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{0.707 - (-0.707)}{1 - 0.707\ 0.707} = 2.828$$

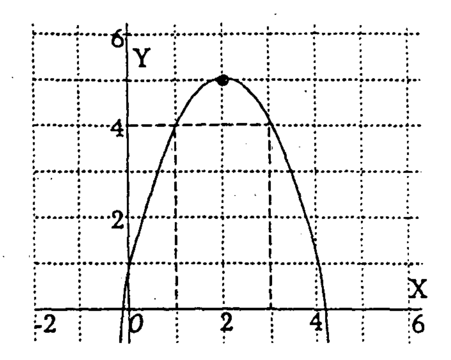
Ángulo $Tan\,\phi = m \Rightarrow \phi = Arctan\,2.828 = 70.52°$

VI-9 MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

MÁXIMOS RELATIVOS

La Función $f_{(x)}$ tiene un Máximo Relativo en x_o si $f_{(x_o)} \geq f_{(x)}$ en un Intervalo Abierto que contenga a: x_o

Ej 6-29 La Función: $f_{(x)} = 1 + 4x - x^2$ posee Máximo Relativo en: $x = 2$



El Valor del Máximo: $f_{(2)} = 1 + 4 \cdot 2 - 2^2 = 5$

Tomando el Intervalo Abierto: $1 < x < 3$

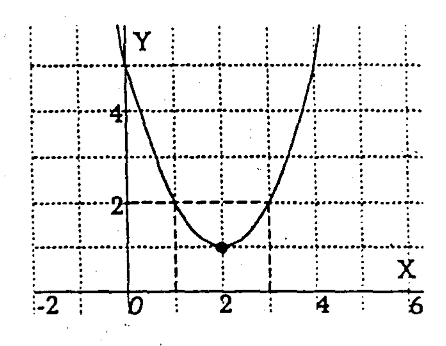
En tal Intervalo se cumple: $f_{(2)} \geq f_{(x)}$

En realidad la Desigualdad se cumple para todos los Reales: $-\infty < x < \infty$

MÍNIMOS RELATIVOS

La Función: $f_{(x)}$ posee un Mínimo Relativo en x_o ; si $f_{(x_o)} \leq f_{(x)}$ en un Intervalo Abierto contiene a: x_o

Ej 6-30 La Función: $f_{(x)} = x^2 - 4x + 5$ posee Mínimo Relativo en: $x = 2$



El Valor del Mínimo: $f_{(2)} = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$

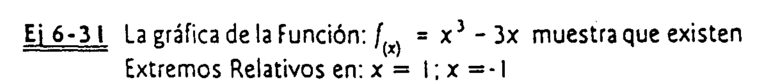
Tomando el Intervalo Abierto: $1 < x < 3$

En tal Intervalo se cumple: $f_{(2)} \leq f_{(x)}$

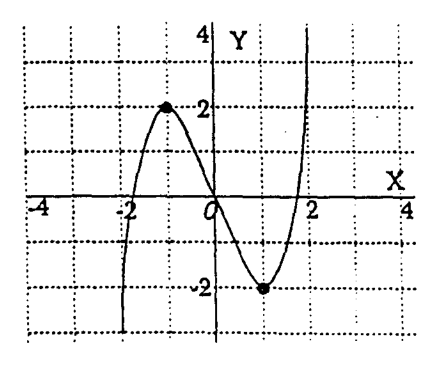
En realidad la Desigualdad se cumple para todos los Reales: $-\infty < x < \infty$

Si una Función posee un Máximo o un Mínimo Relativos, se dice que la Función posee un Extremo Relativo.

Un Teorema de mucha importancia expresa: Si $f_{(x)}$ está definida en el Intervalo Abierto: $a < x < b$ Si: $f_{(x)}$ posee un Extremo Relativo en: x_o entonces se verifica que: $f_{(x)}' = 0$



Ej 6-31 La gráfica de la Función: $f_{(x)} = x^3 - 3x$ muestra que existen Extremos Relativos en: $x = 1$; $x = -1$



La Derivada de la Función en esos Puntos es:

$$f_{(x)}' = 3x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f_{(1)} = 3(1)^2 - 3 = 0 \\ f_{(-1)} = 3(-1)^2 - 3 = 0 \end{array}$$

Se observa que en cada Máximo o Mínimo Relativo, la pendiente o Derivada es cero.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

La Función: $f_{(x)}$ tiene un Máximo Absoluto en un Intervalo, si existe algún x_o tal que: $f_{(x_o)} \geq f_{(x)}$ para todo: x en el Intervalo. El Máximo Absoluto de la Función es el valor de: $f_{(x_o)}$

La Función: $f_{(x)}$ tiene un Mínimo Absoluto en un Intervalo, si existe algún x_o tal que: $f_{(x_o)} \leq f_{(x)}$ para todo: x en el Intervalo. El Mínimo Absoluto de la Función es el valor de: $f_{(x_o)}$

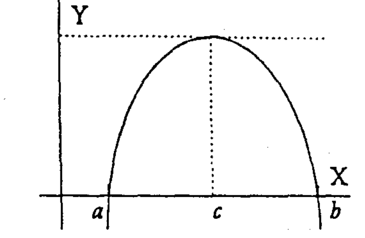
Se llaman Extremos Absolutos de una Función a los Máximos o Mínimos Absolutos.

VI-10 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

A) TEOREMA DE ROLLE

Si la Función $f_{(x)}$ es Continua en el Intervalo Cerrado $a \leq x \leq b$; Si: $f_{(x)}$ es Derivable en el Intervalo Abierto $a < x < b$. Si: $f_{(a)} = f_{(b)} = 0$, entonces existe c tal que: $a < c < b$; $f'_{(c)} = 0$

Demostración:



i) Si: $f_{(x)} = 0$ es un caso trivial, donde c puede tomar cualquier valor entre: $a < x < b$

ii) Si: $f_{(x)} > 0$ entonces: c es el Máximo, ya que en: $a < x < b$; $f_{(x)} > 0$

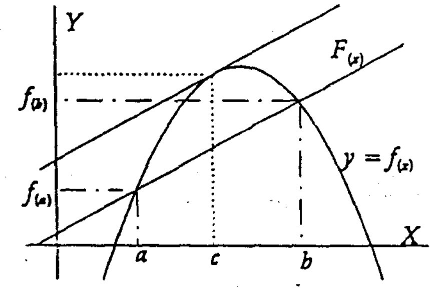
iii) Si: $f_{(x)} < 0$ entonces: c es el Mínimo, ya que en: $a < x < b$; $f_{(x)} < 0$

B) TEOREMA DE LAGRANGE (TEOREMA DEL VALOR MEDIO)

Si la Función $f_{(x)}$ es Continua en el Intervalo Cerrado $a \leq x \leq b$. Si: $f_{(x)}$ es Derivable en el Intervalo Abierto $a < x < b$. Entonces existe c tal que:

$$f_{(c)}' = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}$$

Demostración:



Por la Ecuación de Recta que pasa por los puntos: $(a, f_{(a)})$; $(b, f_{(b)})$

$$\frac{y - f_{(a)}}{x - a} = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}$$

Si: $y = f_{(x)}$ se conforma una nueva Función:

$$F_{(x)} = f_{(x)} - f_{(a)} - \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}(x - a)$$

$F_{(x)}$ cumple con las condiciones del Teorema de Rolle, ya que

Si: $x = a \Rightarrow F_{(a)} = f_{(a)} - f_{(a)} - \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}(a - a) = 0$; Si: $x = b \Rightarrow F_{(b)} = f_{(b)} - f_{(a)} - \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}(b - a) = 0$

Por tanto existirá un valor de c tal que: $a < c < b$: $f_{(c)}' = 0$

$$F'_{(x)} = f'_{(x)} - \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a} \quad \text{Haciendo cumplir: } F'_{(c)} = 0$$

$$F'_{(c)} = f'_{(c)} - \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a} = 0 \Rightarrow f'_{(c)} = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}$$

Geométricamente este Teorema sostiene que ante una Recta Secante, entre dos puntos de una curva, siempre existirá una Recta Tangente paralela.

C) TEOREMA DE CAUCHY

Si $f_{(x)}$, $g_{(x)}$ son Funciones Continuas en el Intervalo Cerrado $a \leq x \leq b$; Derivables en el Intervalo Abierto $a < x < b$; siendo $g_{(x)} \neq 0$; Existe: c tal que $a < c < b$, donde se cumple que:

$$\frac{f'_{(c)}}{g'_{(c)}} = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{g_{(b)} - g_{(a)}}$$

Demostración:

Construyendo: $F_{(x)} = f_{(x)} - f_{(b)} - K(g_{(x)} - g_{(b)})$; Donde: $K = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{g_{(b)} - g_{(a)}}$

Esta Función cumple con las condiciones del Teorema de Rolle, por tanto existe c donde: $F'_{(c)} = 0$

$$\begin{aligned} F'_{(x)} &= f'_{(x)} - Kg'_{(x)} \\ F'_{(c)} &= f'_{(c)} - Kg'_{(c)} = 0 \end{aligned} \Rightarrow K = \frac{f'_{(c)}}{g'_{(c)}} = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{g_{(b)} - g_{(a)}}$$

Ej 6-32 Verificar el cumplimiento del Teorema de Rolle si: $f_{(x)} = -x^2 + 6x - 5 \; ; \; 1 \le x \le 5$

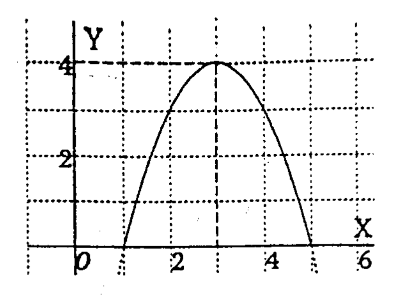
La Función: $f_{(x)} = -x^2 + 6x - 5$; es evidentemente Continua y Derivable en el Intervalo de: $1 \le x \le 5$; además:

Si: $x = 1 \; ; \; f_{(1)} = -1^2 + 6 \cdot 1 - 5 = 0$

$x = 5 \; ; \; f_{(5)} = -5^2 + 6 \cdot 5 - 5 = 0$

Por tanto existirá c tal que $f'_{(c)} = 0$

Si: $f'_{(x)} = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 = c$



6-65 Verificar el Teorema de Lagrange, comúnmente conocido como el Teorema del Valor Medio; Cuando: $f_{(x)} = 6x - x^2$ en el Intervalo: $1 \le x \le 4$

La Función $f_{(x)} = 6x - x^2$; es evidentemente Continua y Derivable en el Intervalo: $1 \le x \le 4$

$$\text{Si: } x = 1 \; ; \; f_{(1)} = 6 \cdot 1 - 1^2 = 5 \qquad \Rightarrow \qquad P1(1,5)$$

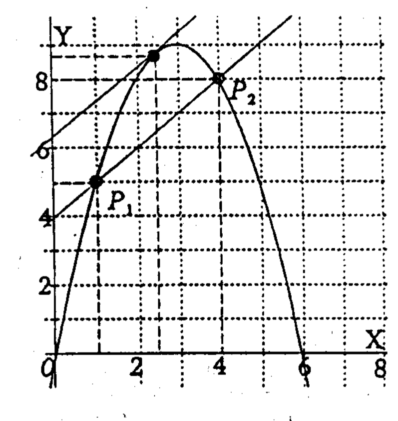
$$x = 4 \; ; \; f_{(4)} = 6 \cdot 4 - 4^2 = 8 \qquad\qquad P2(4,8)$$

Por el Teorema debe cumplirse:

$$f_{(c)} = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}$$

$$6 - 2x = \frac{8 - 5}{4 - 1} \Rightarrow x = \frac{5}{2} = c$$

En la gráfica se aprecia que ante la Recta Secante por dos puntos, se obtiene una Recta Tangente paralela.

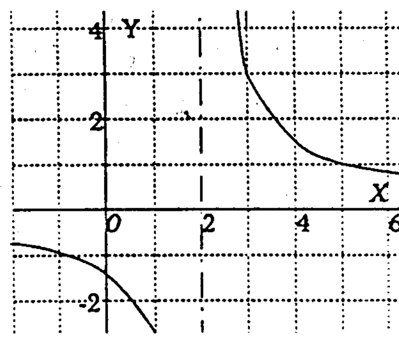


6-66 Verificar el Teorema del Valor Medio Si: $f_{(x)} = \dfrac{3}{x - 2}$; en el Intervalo: $0 \le x \le 5$

La Función: $f_{(x)} = \dfrac{3}{x - 2}$ no está definida en $x = 2$; por tanto no es Continua en: $x = 2$; consecuentemente tampoco es Derivable en ese valor.

Al no cumplirse todas las condiciones del Teorema del Valor Medio, en el Intervalo indicado, no es posible aplicar este Teorema.

Note que si el Intervalo fuese otro, donde no se incluye $x = 2$, si seria aplicable este Teorema.



6-67 Verificar el Teorema de Cauchy: $f_{(x)} = x^2 - 1 \; , \; g_{(x)} = 3x + 1 \; ; \; 2 \le x \le 5$

Las Funciones $f_{(x)} = x^2 - 1 \; , \; g_{(x)} = 3x + 1$; son Continuas y Derivables.

$$\frac{f_{(c)}}{g_{(c)}} = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{g_{(b)} - g_{(a)}}$$

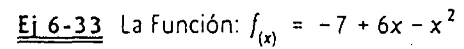
Por tanto deberá cumplirse, que existe: c tal que se verifique la igualdad que indica este Teorema

$$\frac{2x}{3} = \frac{24 - 3}{16 - 7} \Rightarrow x = \frac{7}{2} = c$$

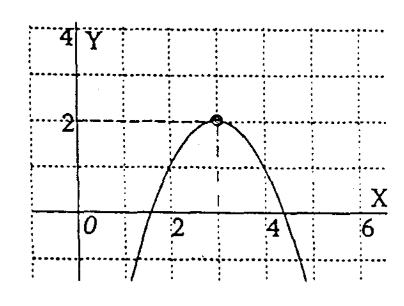
La mayor aplicación de este Teorema se verificará, cuando se estudien las Aplicaciones de la Derivada, particularmente para demostrar la Regla de L'Hopital.

VI-11 PUNTOS CRÍTICOS

Si: x_0 está en el Dominio de $f_{(x)}$; Si se cumple $f'_{(x_0)} = 0$; o si $f'_{(x_0)}$ no existe. Entonces en x_0 se tiene un Punto Crítico.



Ej 6-33 La Función: $f_{(x)} = -7 + 6x - x^2$



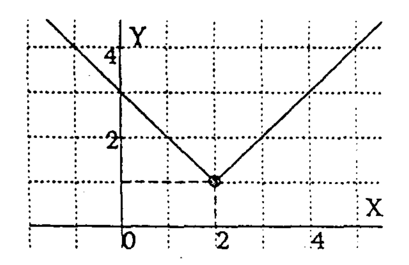
Es Función que posee un Punto Crítico en: $x_o = 3$; ya que:

$$f'_{(x)} = 6 - 2x$$
$$f'_{(3)} = 6 - 2\cdot 3 = 0$$

En $x_o = 3$; se tiene un Extremo Relativo (Un Máximo) cuyo valor es: $f_{(3)} = -7 + 6\cdot 3 - 3^2 = 2$

Por tanto el Punto Crítico es: $P(3,2)$

Ej 6-34 En la Función: $f_{(x)} = |x - 2| + 1$



Es una Función que posee un Punto Crítico en $x_o = 2$; en ese punto no existe Derivada de la Función, por tratarse de un Punto Anguloso.

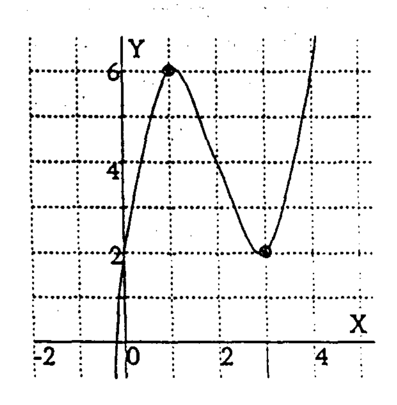
El valor de la Función en este Punto Crítico es:

$f_{(2)} = |2 - 2| + 1 = 1$

En la práctica, para hallar Puntos Críticos de una Función, se deriva ésta e iguala a cero. (O en su caso se busca aquel punto, donde no exista Derivada)

Un Punto Crítico puede determinar Extremos de Función que pueden ser: Máximos o Mínimos Relativos.

6-68 Hallar los Puntos Críticos de: $f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$



Derivando la Función e igualando a cero:

$$f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$
$$f'_{(x)} = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$= 3(x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1 \ ; \ x = 3$$

Si: $x = 1 \Rightarrow f_{(1)} = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 + 2 = 6$

$x = 3 \Rightarrow f_{(3)} = 3^2 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3 + 2 = 2$

Los Puntos Críticos son (1,6); (3,2)

6-69 Hallar los Puntos Críticos de la Función: $f_{(x)} = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

Derivando la Función e igualando a cero:

$$f_{(x)} = (x - 1)^{2/3}$$
$$f'_{(x)} = \frac{2}{3}(x - 1)^{-1/3} = 0$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x - 1}} = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

La Ecuación no tiene Solución.

Sin embargo un Punto Crítico es aquel donde la Derivada es cero o no existe.

La 1^{era} situación no es posible, analizando la 2da.

$$f'_{(x)} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x - 1}}$$

Es una Expresión que no existe para: $x = 1$, luego el Punto Crítico está en el valor: $x = 1$ (El valor de la Función: $f_{(1)} = 0$) El Punto Crítico es $P(1,0)$

VI-12 CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONES

Utilizando el concepto de Derivada, se pueden estudiar diversas características de una Función, como ser su Crecimiento, su Concavidad, etc. Para ello previamente se definen los siguientes conceptos:

FUNCIONES CRECIENTES

Si: $x_1 < x_2$. $f_{(x_1)} < f_{(x_2)}$ En un Intervalo, entonces $f_{(x)}$ es Creciente en ese Intervalo

Si: $x_1 < x_2$. $f_{(x_1)} > f_{(x_2)}$ En un Intervalo, entonces $f_{(x)}$ es Decreciente en ese Intervalo.

Un Teorema al respecto dice: "Si: $f_{(x)}$ es Continua en un Intervalo y si: $f'_{(x)} > 0$ entonces la Función es Creciente en ese Intervalo, análogamente si se cumple: $f'_{(x)} < 0$ entonces la Función es Decreciente en ese Intervalo"

Ej 6-35 $f_{(x)} = x^2 - 6x + 10$ derivando, reemplazando valores

$f'_{(x)} = 2x - 6$

$f'_{(4)} = 2 \cdot 4 - 6 = 2 > 0$ Creciente

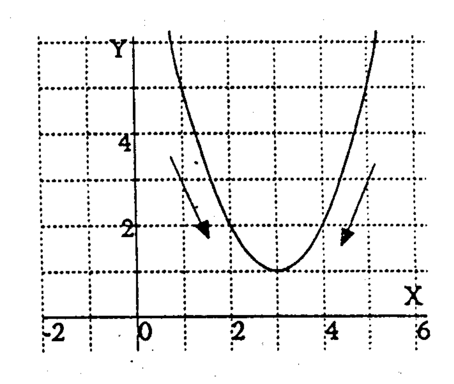
$f'_{(1)} = 2 \cdot 1 - 6 = -4 < 0$ Decreciente

Para hallar el intervalo de Crecimiento:

$f'_{(x)} > 0 \Rightarrow 2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$

La Función es Creciente en: $3 < x < \infty$

La Función es Decreciente en: $-\infty < x < 3$



CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

Si en cada punto de un Intervalo, la gráfica de una Función está por encima de su Recta Tangente, se dice que la curva es Cóncava en ese Intervalo. Si en cada punto de un Intervalo, la gráfica de una Función está por debajo de su Recta Tangente, se dice que la curva es Convexa en ese Intervalo.

A la curva Cóncava, se la llama también Cóncava para Arriba. A la Convexa se la llama Cóncava para Abajo.

Un Teorema al respecto dice: "Si: $f'' > 0$ en un Intervalo, entonces la curva es Cóncava si: $f'' < 0$ en un Intervalo, entonces la curva es Convexa"

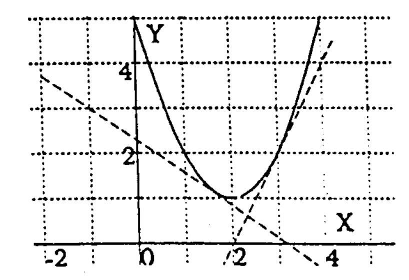
El punto en el cuál una curva pasa de Cóncava a Convexa, o de Convexa a Cóncava, se llama: PUNTO DE INFLEXIÓN . Este punto se encuentra cuando: $f'' = 0$

Ej 6-36 La Función: $f_{(x)} = x^2 - 4x + 5$; posee su curva por encima de sus Tangentes.

Si: $f = x^2 - 4x + 5$ La curva es Cóncava

$f' = 2x - 4$ La curva es Cóncava en toda la Recta Real. (No posee Punto de Inflexión)

$f'' = 2 > 0$

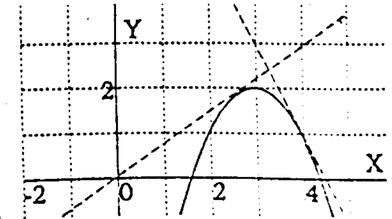


Ej 6-37 La Función: $f_{(x)} = -x^2 + 6x - 7$ posee su curva por debajo de sus Rectas Tangentes.

Si: $f = -x^2 + 6x - 7$ La curva es Convexa en toda la Recta Real. (No posee Punto de Inflexión)

$f' = -2x + 6$

$f'' = -2 < 0$



DETERMINACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Si bien ya se han definido previamente los conceptos de Máximos y Mínimos (VI-9); aún no se han establecido las formas de precisarlos con exactitud, esto requiere de los siguientes pasos:

Mediante la Primera Derivada igualada a cero ($f' = 0$); se obtienen los Puntos Críticos, los cuales pueden ser Máximos o Mínimos.

Si un Punto Crítico está en: x_o para determinar si es un Máximo o si se trata de un Mínimo, existen tres Criterios:

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Si: $f''_{(x_o)} > 0$; entonces en: x_o está un Mínimo

Si: $f''_{(x_o)} < 0$; entonces en: x_o está un Máximo

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Si: $x_1 < x_o < x_2$: $f'_{(x_1)} < 0$; $f'_{(x_2)} > 0$; entonces en: x_o está un Mínimo

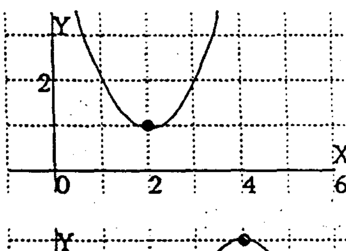
Si: $x_1 < x_o < x_2$: $f'_{(x_1)} > 0$; $f'_{(x_2)} < 0$; entonces en: x_o está un Máximo

CRITERIO DE COMPARACIÓN

Si: $x_1 < x_o < x_2$: $f'_{(x_o)} < f_{(x_1)}$; $f_{(x_o)} < f_{(x_2)}$; entonces en: x_o está un Mínimo

Si: $x_1 < x_o < x_2$: $f'_{(x_o)} > f_{(x_1)}$; $f_{(x_o)} > f_{(x_2)}$; entonces en: x_o está un Máximo

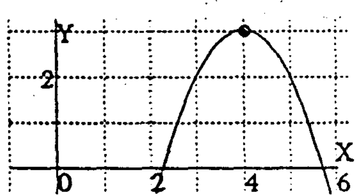
En la práctica se usa mayormente el Criterio de la Segunda Derivada.



Ej 6-38 En la Función: $f_{(x)} = x^2 - 4x + 5$

Punto Crítico: $f'_{(x)} = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f_{(2)} = 1$

$f''_{(x)} = 2 > 0$ Es un Mínimo

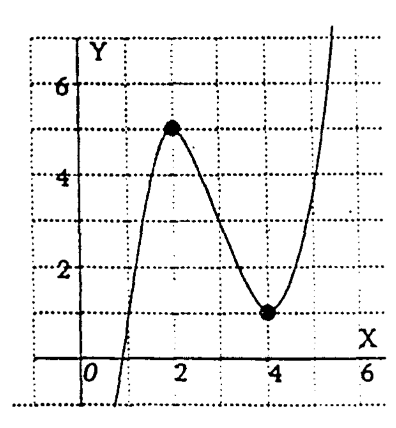


En la Función: $f_{(x)} = -x^2 + 8x - 13$

Punto Crítico: $f'_{(x)} = -2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f_{(4)} = 3$

$f''_{(x)} = -2 > 0$ Es un Máximo

6-70 Determinar los Máximos y Mínimos de la Función: $f_{(x)} = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$



Analizando: $f_{(x)} = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$

$f'_{(x)} = 3x^2 - 18x + 24 = 0$

$= 3(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 2$; $x = 4$

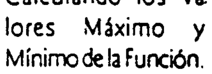
$f''_{(x)} = 6x - 18$

Si: $x = 2$: $f''_{(2)} = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0$ Máximo

Si: $x = 4$: $f''_{(4)} = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$ Mínimo

$f_{(2)} = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 15 = 5$

$f_{(4)} = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 15 = 1$


Calculando los valores Máximo y Mínimo de la Función.

En este problema, a diferencia de las anteriores, la Segunda Derivada no es una constante, es una Función que al depender de x permite reemplazar en x a los puntos Críticos, para así determinar si se trata de un Máximo o de un Mínimo.

6-71 Analizar las características de la Función: $f_{(x)} = x^2 - 10x + 28$

Analizar las características de una Función supone determinar sus Puntos Críticos, Máximos, Mínimos, Intervalos de Crecimiento, de Concavidad, etc.

PUNTOS CRÍTICOS: ($f' = 0$)

Si: $f_{(x)} = x^2 - 10x + 28$

$f'_{(x)} = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$

CONCAVIDAD: ($f'' > 0$)

$f''_{(x)} = 2 > 0 \Rightarrow$ La curva es Cóncava

PUNTO DE INFLEXIÓN: ($f'' = 0$)

$f''_{(x)} = 2 = 0$ No tiene solución

Por tanto, no existe Punto de Inflexión

INTERVALO DE CRECIMIENTO: ($f' > 0$)

$f'_{(x)} > 0 \Rightarrow 2x - 10 > 0 \Rightarrow x > 5$

La Función es Creciente en: $5 < x < \infty$

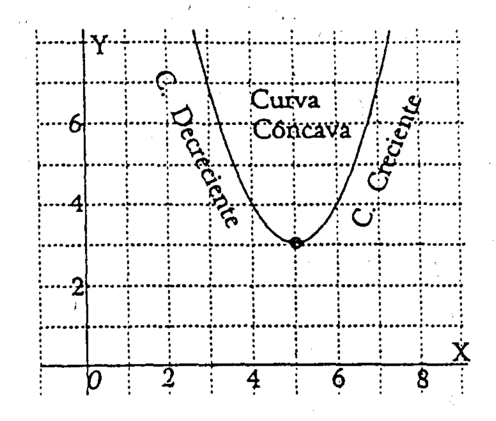
La Función es Decreciente en: $-\infty < x < 5$

DETERMINACIÓN DE MÁX Y MÍN: (f'')

$f''_{(x)} = 2 > 0 \Rightarrow$ Mínimo

Valor Mínimo:

$f_{(5)} = 5^2 - 10 \cdot 5 + 28 = 3$



6-72 Analizar las características de la Función: $f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

Determinando todas las características de la Función.

PUNTOS CRÍTICOS: ($f' = 0$)

Si: $f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

$f'_{(x)} = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$3(x - 1)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 1 ; x = 3$

CONCAVIDAD: ($f'' > 0$)

$f''_{(x)} > 0 \Rightarrow 6x - 12 > 0 \Rightarrow x > 2$

La curva es Cóncava en: $2 < x < \infty$

La curva es Convexa en: $-\infty < x < 2$

INTERVALO DE CRECIMIENTO: ($f' > 0$)

$f'_{(x)} > 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 > 0$

Cs: $-\infty < x < 1 ; 3 < x < \infty$

Función Creciente: $-\infty < x < 1; 3 < x < \infty$

Función Decreciente en: $1 < x < 3$

Muchas de las características pueden obtenerse a partir de otras antes determinadas.

Por Ejemplo hasta llegar a un Máximo, la Función es Creciente, a partir de ese Máximo, la Función será luego Decreciente.

DETERMINACIÓN DE MÁX Y MÍN: (f'')

$f''_{(x)} = 6x - 12$ Si: $x = 1$, $x = 3$

$f''_{(1)} = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow$ Máx

$f''_{(3)} = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow$ Mín

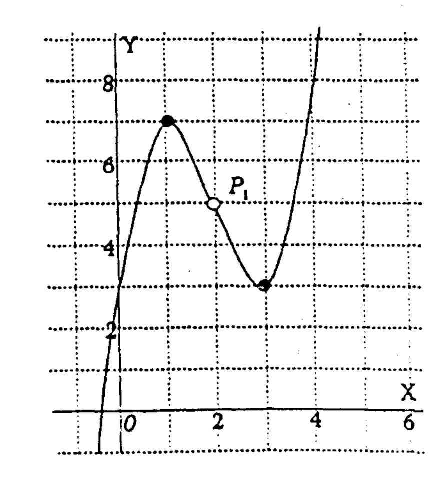
Valor Máximo: $f_{(1)} = 7$

Valor Mínimo: $f_{(3)} = 3$

PUNTO DE INFLEXIÓN: ($f'' = 0$)

$f''_{(x)} = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow f_{(2)} = 5 \Rightarrow P_i(2,5)$



6-73 Analizar las características de la Función: $f_{(x)} = x e^{x}$

PUNTOS CRÍTICOS: ($f' = 0$)

$f_{(x)} = x e^{x}$

$f'_{(x)} = 1 e^{x} + x e^{x} = 0$

$= e^{x}(1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1$

CONCAVIDAD ($f'' > 0$)

$f''_{(x)} = e^{x}(2 + x) > 0 \Rightarrow x > -2$

La curva es Cóncava en: $-2 < x < \infty$
La curva es Convexa en: $-\infty < x < -2$

PUNTO DE INFLEXIÓN: ($f'' = 0$)

$f''_{(x)} = e^{x}(2 + x) = 0 \Rightarrow x = -2$

INTERVALO DE CRECIMIENTO ($f' > 0$)

$f'_{(x)} = e^{x}(1 + x) > 0 \Rightarrow x > -1$

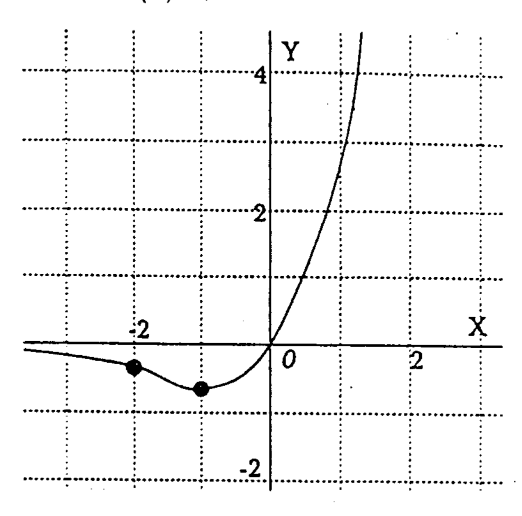
La Función es Creciente en: $-1 < x < \infty$
La Función es Decreciente en: $-\infty < x < -1$

DETERMINACIÓN DE MÁX Y MÍN,

$f''_{(x)} = e^{x} + 1 e^{x} + x e^{x} = e^{x}(2 + x)$

$f''_{(-1)} = e^{-1}(2 - 1) = e^{-1} > 0$ Mín

Valor Mín: $f_{(-1)} = -1 e^{-1} = -0.37$



6-74 Analizar las características de la Función: $f_{(x)} = e^{-x^2/2}$

PUNTOS CRÍTICOS: ($f' = 0$)

$f_{(x)} = e^{-x^2/2}$

$f'_{(x)} = e^{-x^2/2}(-x) = 0 \Rightarrow x = 0$

CONCAVIDAD ($f'' > 0$)

$f''_{(x)} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2} > 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \begin{matrix} -\infty < x < -1 \\ 1 < x < \infty \end{matrix}$

Cóncava: $-\infty < x < -1$; $1 < x < \infty$
Convexa: $-1 < x < 1$

PUNTO DE INFLEXIÓN: ($f'' = 0$)

$f''_{(x)} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ x = 1 \end{matrix}$

INTERVALO DE CRECIMIENTO ($f'' > 0$)

$f'_{(x)} = -x e^{-x^2/2} > 0 \Rightarrow x < 0$

La Función es Creciente en: $-\infty < x < 0$
La Función es Decreciente en: $0 < x < \infty$

DETERMINACIÓN DE MÁX Y MÍN.

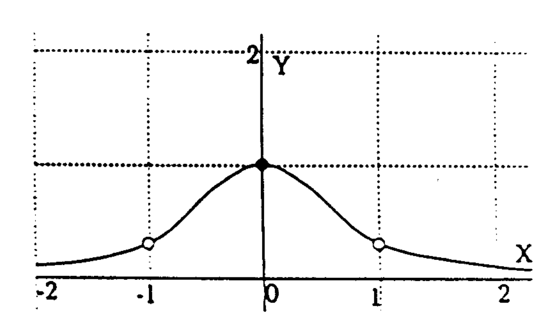
$f''_{(x)} = e^{-x^2/2}(-x)^2 - e^{-x^2/2}$

$f''_{(x)} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$

$f''_{(0)} = (0^2 - 1)e^{-0^2/2} = -1 < 0$

Es un Máximo cuyo valor es:

$f_{(0)} = e^{-0^2/2} = 1$



En este y en el anterior Problema, las expresiones e^{x} ; $e^{-x^2/2}$ no afectan a los resultados de las Ecuaciones o Inecuaciones, porque para ningún Número Real, son cero o negativas.

Un detalle que se obtiene es de que No es necesaria la presencia de un Máximo o Mínimo, para que exista o no un Punto de Inflexión

6-75 Analizar las características de la Función: $f_{(x)} = (x - 1)^{2/5} + 2$

PUNTOS CRÍTICOS: $(f' = 0)$

$$f_{(x)} = (x - 1)^{2/5} + 2$$

$$f'_{(x)} = \frac{2}{5}(x - 1)^{-3/5} = \frac{2}{5(x - 1)^{3/5}}$$

La 1^{era} Derivada igualada a cero, no posee solución. Sin embargo los Puntos Críticos, también se hallan en los Puntos donde no existe Derivada.

Por tanto existe Punto Crítico en: $x = 1$

CONCAVIDAD: $(f'' > 0)$

$$f''_{(x)} = \frac{-6}{25(x - 1)^{8/5}} \Rightarrow \begin{matrix} f''_{(1^-)} < 0 \\ f''_{(1^+)} > 0 \end{matrix}$$

La curva es Convexa antes y después del Punto Crítico: $-\infty < x < \infty;\ x \neq 1$

INTERVALO DE CRECIMIENTO: $(f' > 0)$

$$f'_{(x)} = \frac{2}{5(x - 1)^{3/5}} > 0 \Rightarrow x > 1$$

Función Creciente: $1 < x < \infty$
Función Decreciente: $-\infty < x < 1$

Note que el Mínimo es un Punto Anguloso.

DETERMINACIÓN DE MÁX, MÍN: (f'')

$$f''_{(x)} = \frac{2}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)(x - 1)^{-8/5}$$

La 2da Derivada tampoco existe en el Punto Crítico de: $x = 1$

Por Criterio de 1^{era} Derivada (VI-12)

$$f'_{(1^-)} < 0 \ ; \ f'_{(1^+)} > 0$$

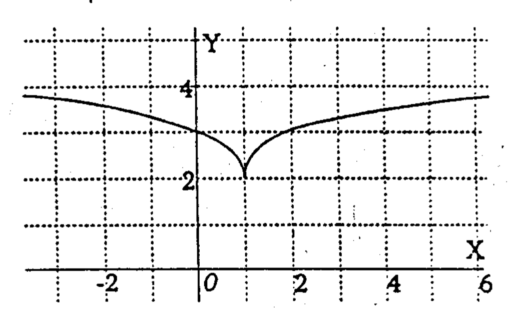
Analizando antes de 1 y luego de 1 $(1^-; 1^+)$, se concluye que se trata de un Mínimo de valor:

$$f_{(1)} = (1 - 1)^{2/5} + 2 = 2$$

PUNTO DE INFLEXIÓN $(f'' = 0)$

$$f''_{(x)} = \frac{-6}{25(x - 1)^{8/5}} = 0$$

La Ecuación no tiene solución, por tanto no existe punto de Inflexión.



6-76 Analizar las características de la Función: $f_{(x)} = |x^2 - 1|$

PUNTOS CRÍTICOS: $(f' = 0)$

$f'_{(x)} = 0 \Rightarrow x = 0$ (Ver P-6-30)

Buscando los Puntos donde no existe Derivada (Puntos Angulosos) $x = 1\ ;\ x = -1$

CONCAVIDAD: $(f' > 0)$

$f''_{(-1^-)} > 0$	Cóncava
$f''_{(-1^+)} < 0 \ ; \ f''_{(1^-)} < 0$	Convexa
$f''_{(1^+)} > 0$	Cóncava

Cóncava: $-\infty < x < -1;\ 1 < x < \infty$
Convexa: $-1 < x < 1$

INTERVALO DE CRECIMIENTO: $(f' > 0)$

Por características antes obtenidas:

F Creciente: $-1 < x < 0;\ 1 < x < \infty$
F Decreciente: $-\infty < x < -1;\ 0 < x < 1$

Para el cálculo de Derivadas, se emplean los conceptos de derivabilidad (P-6-30)

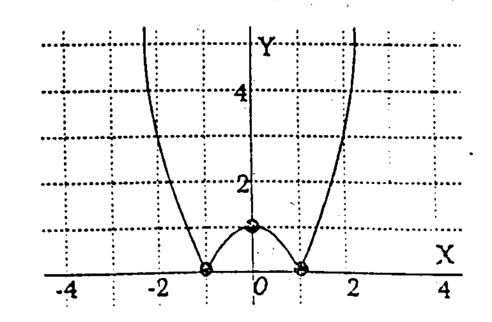
DETERMINACIÓN DE MÁX Y MÍN:

Por el Criterio de la 1^{era} Derivada

En 0	$f'_{(0^-)} > 0 \ : \ f'_{(0^+)} < 0$	Máx
En 1	$f'_{(1^-)} < 0 \ : \ f'_{(1^+)} > 0$	Mín
En -1	$f'_{(-1^-)} < 0 \ : \ f'_{(-1^+)} > 0$	Mín

PUNTO DE INFLEXIÓN $(f'' = 0)$

No existe un punto, donde la 2da Derivada sea cero, No existe un Punto de Inflexión.



VI - PROBLEMAS PROPUESTOS

6-1 Por definición, hallar las Derivadas de las siguientes Funciones:

$f = x^2 - 7x + 4$ $\quad f = 2x^3 + 1$ $\quad f = 9$

$f = \dfrac{1}{x+2}$ $\quad f = \sqrt{x+7}$ $\quad f = \sqrt[3]{x}$

$2x - 7\ ;\ 6x^2\ ;\ 0$

$\dfrac{-1}{(x+2)^2}\ ;\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+7}}\ ;\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

6-2 Por definición, hallar las Derivadas de las siguientes Funciones:

$f = 3^x$ $\quad f = Log\, x$ $\quad f = Tan\, x$

$f = Sec\, x$ $\quad f = Cosh\, x$ $\quad f = |x|$

$3^x Ln\, 3\ ;\ \dfrac{1}{x\, Ln\, a}\ ;\ Sec^2 x$

$Sec\, x\, Tan\, x\ ;\ Senh\, x\ ;\ SGN(x)$

6-3 Derivar las siguientes Funciones:

$f = 3^x + x^3 + 3x + 3$ $\quad f = \sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$

$f = 2\, Ln\, x + x\, Ln\, 2$ $\quad f = 5\, Cos\, x + x\, Cos\, 5$

$3^x Ln\, 3 + 3x^2 + 3\ ;\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

$\dfrac{2}{x} + Ln\, 2\ ;\ -5\, Sen\, x + Cos\, 5$

6-4 Derivar (Por la Regla del Producto)

$f = x^3 Sen\, x$ $\quad f = x^6 Ln\, x$ $\quad f = x^2\, 7^x$

$f = e^x Cos\, x$ $\quad f = x^8 Sen\, x\, Ln\, x$

$3x^2 Sen\, x + x^3 Cos\, x\ ;\ 6x^5 Ln\, x + x^5\ ;\ 2x7^x + x^2 7^x Ln\, 7$

$e^x(Cos\, x - Sen\, x)\ ;\ 8x^7 Sen\, x\, Ln\, x + x^8 Cos\, x\, Ln\, x + x^7 Sen\, x$

6-5 Derivar (Por la Regla del Cociente)

$f = \dfrac{Sen\, x}{x^9}$ $\quad f = \dfrac{x^5 + 1}{x^3 - 1}$

$f = \dfrac{x^2}{Ln\, x}$ $\quad f = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$

$\dfrac{x\, Cos\, x - 9\, Sen\, x}{x^{10}}\ ;\ \dfrac{2x^7 - 5x^4 - 3x^2}{(x^3 - 1)^2}$

$\dfrac{x(2\, Ln\, x - 1)}{Ln^2 x}\ ;\ \dfrac{2^{x+1} Ln\, 2}{(2^x + 1)^2}$

6-6 Derivar (Por la Regla de la Cadena)

$f = Sen(x^4 + 1)$ $\quad f = (x^3 + 1)^7$

$f = Sen(1 + x^2 e^x)$ $\quad f = \sqrt[3]{1 + x^5}$

$f = Ln(1 + x^4)$ $\quad f = e^{Tan\, x}$

$4x^3 Cos(x^4 + 1)\ ;\ 21x^2(x^3 + 1)^6$

$Cos(1 + x^2 e^x)(2xe^x + x^2 e^x)\ ;\ 5x^4/3(1 + x^5)^{2/3}$

$4x^3/(1 + x^4)\ ;\ Sec^2 x\, e^{Tan\, x}$

6-7 Derivar y simplificar:

$f = Ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ $\quad f = \dfrac{1}{3} Tan^3 x - Tan\, x + x$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\ ;\ Tan^4 x$

$f = Sen\, x - \dfrac{1}{3} Sen^3 x$ $\quad f = \sqrt{a^2 - x^2} + a\, Arcsen\, \dfrac{x}{a}$ $\quad Cos^3 x\ ;\ \sqrt{a^2 - x^2}$

$f = Arcsen\, \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ $\quad f = Arcsen\, \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\quad \dfrac{2}{x\sqrt{2x^2 - 1}}\ ;\ \dfrac{1}{1 + x^2}$

$f = \dfrac{1}{3}\, Ln\, \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$ $\quad f = \dfrac{1}{2}\, Ln\, \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}$ $\quad \dfrac{x + 1}{x^3 - 1}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

$f = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} Arcsen\, \dfrac{x}{a}$ $\quad f = Ln(\sqrt{1 + e^x} - 1) - Ln(\sqrt{1 + e^x} + 1)$ $\quad \sqrt{a^2 - x^2}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$

$f = \dfrac{1}{2} Ln(Tan\, \dfrac{x}{2}) - \dfrac{1}{2}\, \dfrac{Cos\, x}{Sen^2 x}$ $\quad f = \dfrac{m}{2} Ln(x^2 - a^2) + \dfrac{n}{2a} Ln(\dfrac{x - a}{x + a})$ $\quad Csc^3 x\ ;\ \dfrac{mx + n}{x^2 - a^2}$

6-8 Hallar el valor de la Derivada de las Funciones, en los puntos indicados:

$f = x^2 - 6x + 3 \;;\; x = 5$ $\qquad f = \dfrac{x-1}{x+1} \;;\; x = 0$ $\qquad 4 \;;\; 2$

$f = e^x Sen\, x \;;\; x = 0$ $\qquad f = x^3 Cos\, x \;;\; x = 0$ $\qquad 1 \;;\; 0$

$f = e^{Sen\, x} \;;\; x = 0$ $\qquad f = x^5 Ln\, x \;;\; x = 1$ $\qquad 1 \;;\; 1$

$f = x^3 Ln\, x - \dfrac{x^3}{3} \;;\; x = 1$ $\qquad f = \dfrac{x^2}{Ln\, x} \;;\; x = e$ $\qquad 0 \;;\; e$

$f = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \;;\; x = 0$ $\qquad f = Tan\, x - x \;;\; x = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad 1 \;;\; \infty$

6-9 Hallar la Derivada en: $x = a$

$f = \sqrt[5]{x^2} \;;\; a = 0$ $\qquad f = \dfrac{1}{x-3} \;;\; a = 3$ $\qquad f = |x-2| \;;\; a = 2$ $\qquad f = [\![x]\!] \;;\; a = 3$ $\qquad \nexists \;;\; \nexists \;;\; \nexists \;;\; \nexists$

6-10 a) Indicar una Función No Derivable en: $x = 2$
b) Indicar una Función definida para todo x; No Derivable en: x Impar
c) Indicar una Función Continua para todo x; No Derivable en: x Entero

6-11 Hallar la Segunda Derivada en las Funciones indicadas:

$f = x^3 - 7x$ $\qquad f = x^5 Ln\, 5$ $\qquad 6x \;;\; 20x^3 Ln\, x + 9x^3$

$f = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\qquad f = e^{x^4 - x^2 + 1}$ $\qquad \dfrac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} \;;\; e^{x^4-x^2+1}[(4x^3-2x)^2 + 12x^2 - 2]$

$f = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2} Ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ $\qquad \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

6-12 Hallar la Derivada Enésima de:

$f = e^{3x} \;;\; f = Sen\, 2x \;;\; f = \dfrac{1+x}{1-x}$ $\qquad 3^n e^{3x} \;;\; 2^n Sen(2x + \dfrac{n\pi}{2}) \;;\; 2n!(1-x)^{-(n+1)}$

$f = Log\, x \;;\; f = \dfrac{5x-23}{x^2-9x+20}$ $\qquad \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}}{Ln\, 10} \;;\; (-1)^n n![2(x-5)^{-(n+1)} + 3(x-4)^{-(n+1)}]$

6-13 Demostrar la Fórmula de Leibnitz:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

6-14 Derivar (Implícitamente) las siguientes Funciones Implícitas:

$y^4 + x^3 + y^2 + x = 1$ $\qquad 3x^5 - y^3 = x^2 - 2y^4$ $\qquad \dfrac{-3x^2-1}{4y^3+2y} \;;\; \dfrac{2x-15x^4}{8y^3-3y^2}$

$x^3y^5 + y^2 - x^4 = 0$ $\qquad 2x^2y^4 + 3x^6y^2 = 1$ $\qquad \dfrac{4x^3-3x^2y^5}{5x^3y^4+2y} \;;\; -\dfrac{2y^3+9x^4y}{4xy^2+3x^5}$

$\dfrac{x^2+y^4}{x^3+y^6} = 1$ $\qquad \dfrac{x^2+1}{y^2+1} = 1$ $\qquad \dfrac{3x^2-2x}{4y^3-6y^5} \;;\; \dfrac{x}{y}$

$e^{xy} + 1 = x^2$ $\qquad Sen(x^2y^3+1) = x$ $\qquad \dfrac{2x - ye^{xy}}{xe^{xy}} \;;\; \dfrac{1-2xy^3Cos(x^2y^3+1)}{3x^2y^2Cos(x^2y^3+1)}$

6-15 Hallar la Derivada Implícita indicada:

$x^4 + y^2 = 1 \;,\; y'' \;;\; e^x + e^y = 1 \;,\; y''$ $\qquad -(6x^2y^2 + 4x^6)/y^3 \;;\; -e^{x-y}(1+e^{x-y})$

$x^5 + y^5 + x^4 + y^4 = 1 \;,\; \begin{matrix} y'(0,1) \\ y''(1,1) \end{matrix} \;;\; x^y - 1 = 0 \;,\; y'$ $\qquad 0 \;,\; -42/5 \;;\; -y/x\, Ln\, x$

6-16 Utilizando la Derivada Implícita, derivar:

$y = Arcsec\, x$ $\qquad$ $y = Arcsenh\, x$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$y = Arctanh\, x$ $\qquad$ $y = Ln\, x$ $\qquad$ $\dfrac{1}{1-x^2}$; $\dfrac{1}{x}$

6-17 Hallar las Ecuaciones de Recta Tangente a las curvas, por punto dados:

$y = x^2 - 4x + 5$; $Po(3,2)$ $\qquad$ $y = 4x - x^2$; $Po(1,3)$ $\qquad$ $2x - y = 4$; $2x - y = -1$

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$; $Po(4,6)$ $\qquad$ $y = \dfrac{Ln\, x}{x}$; $Po(1,0)$ $\qquad$ $9x - y = 30$; $x - y = 1$

6-18 Hallar las Ecuaciones de Recta Tangente a las curvas, por los puntos dados:

$y = x^2 - 6x + 11$; $P(2,-1)$ $\qquad$ $6x + y - 11 = 0$; $2x - y - 5 = 0$

$y = 2\sqrt{x-4} + 3$; $P(2,2)$ $\qquad$ $x - y = 0$; $x + 2y - 6 = 0$

$y = -x^2 + 6x - 5$; $P(5,9)$ $\qquad$ $2x - y - 1 = 0$; $10x + y - 59 = 0$

6-19 Determinar las Rectas Tangentes y Rectas Normales a las curvas de las Funciones, en los puntos indicados.

$y = -x^2 + 6x - 5$; $P(4,3)$ $\qquad$ $y - 3 = -2(x-4)$; $y - 3 = 0.5(x-4)$

$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$; $P(2,3)$ $\qquad$ $y - 3 = 0$; $x - 2 = 0$

$y = e^{x-2}$; $P(2,1)$ $\qquad$ $x - y - 1 = 0$; $x + y - 3 = 0$

$y = Sen\, 2x$; $P(\pi/4,1)$ $\qquad$ $y - 1 = 0$; $4x - \pi = 0$

6-20 Hallar los ángulos de inclinación de las curvas dadas en los puntos indicados:

$y = x^2 - 4x + 6$; $Po(3,3)$ $\qquad$ $y = 2^x + 1$; $Po(2,5)$ $\qquad$ $63.43°$; $70.15°$

$y = \dfrac{2}{x^2+1}$; $Po(1,1)$ $\qquad$ $y = \dfrac{Ln\, x}{x}$; $Po(1,0)$ $\qquad$ $-45°$; $45°$

$y = x^2 - 6x + 11$; $Po(3,2)$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{x-2}$; $x = 2$ $\qquad$ $0°$; $90°$

6-21 Hallar los ángulos de Intersección entre las curvas de las Funciones:

$y = 3 - x^2$; $y = x^3 + 1$ $\qquad$ $45°$

$y = x^2 - 4$; $y = x - 2$ $\qquad$ $18.43°$; $71.56°$

$y = 2^x$; $y = (1/2)^x$ $\qquad$ $69.47°$

$y = Sen\, x$; $y = Sen\, 2x$ $\qquad$ $71.56°$

$y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $36.87°$; $90°$

6-22 Hallar el valor de c ; que verifica el Teorema del Valor Medio (Teorema de Lagrange); en las Funciones indicadas y sus respectivos Intervalos:

$y = 1 + 4x - x^2$, $0 \le x \le 3$ $\qquad$ $y = x^2 - 6x + 11$, $2 \le x \le 5$ $\qquad$ $c = 1.5$; 3.5

$y = Sen\, x$, $0 \le x \le \dfrac{3\pi}{4}$ $\qquad$ $y = \dfrac{x}{x^2-4}$, $1 \le x \le 5$ $\qquad$ 1.27 ; $\nexists$

$y = x^2 - 2x - 3$, $-1 \le x \le 3$ $\qquad$ $c = 1$

6-23 a) ¿Toda Función Continua cumple con el Teorema del Valor Medio? No

b) ¿Toda Función Continua es Derivable? No

c) ¿Son iguales las Expresiones? $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ No

d) ¿Las Rectas Tangentes, siempre se intersectan con las Normales? Si

6-24 Hallar los Puntos Críticos de las siguientes Funciones:

$f = x^2 - 6x + 10$	$f = x^2 - 4$	$(3,1)$; $(0,-4)$
$f = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$	$f = 1 - x^2$	$(1,6),(3,2)$; $(0,1)$
$f = x^4 - 8x^2 + 18$	$f = x^3 + 3x$	$(0,18),(-2,2),(2,2)$; $\nexists$
$f = x^2 e^{-x}$	$f = e^{x^2-4}$	$(0,0),(2,4e^{-2})$; $(0,e^{-4})$
$f = Ln(1 + 6x - x^2)$	$f = Ln(e^{x-1} - x + 1)$	$(3,Ln\ 10)$; $(1,0)$
$f = \|x - 5\|$	$f = \sqrt[5]{(x-1)^2} + 2$	$(5,0)$; $(1,2)$
$f = \dfrac{1}{x-4}$	$f = \dfrac{\|x\|}{x}$	$x = 4$; $x = 0$

6-25 Hallar los Máximos (M) y Mínimos (m) en las siguientes Funciones:

$f = x^2 - 8x + 19$	$f = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$	m:(4,3) ; M:(2,5), m:(4,1)
$f = x^4 - 2x^2 + 4$	$f = Ln(9 - x^2)$	M:(0,4), m:(−1,3), m:(1,3) ; M:(0,Ln 9)
$f = x^3 e^{-x}$	$f = \|x - 2\| + 3$	P.I.(0,0), M:(3,27e^{-3}) ; m:(2,3)
$f = \sqrt[3]{(x-4)^2} + 1$		m:(4,1)

6-26 Hallar los Intervalos de Crecimiento, Intervalos de Concavidad, respectivamente de las Funciones:

$f = x^2 - 8x + 18$	$4 < x < \infty$; $-\infty < x < \infty$
$f = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$	$-\infty < x < 1$, $3 < x\ \infty$; $2 < x < \infty$
$f = x^4 - 2x^2 + 4$	$-1 < x < 0$, $1 < x < \infty$ $-\infty < x < -\sqrt{1/3}$, $\sqrt{1/3} < x < \infty$
$f = Ln(x^2 + 6x - 9)$	$2 < x < 3$; $\varnothing$

6-27 Graficar, analizando características, las siguientes Funciones:

$f = x^2 - 10x + 28$	$f = -9 + 8x - x^2$	$f = x^3 - 12x$
$f = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$	$f = x^4 - 8x^2 + 15$	$f = 3x^5 - 25x^3 + 60x$
$f = Ln(1 + 6x - x^2)$	$f = 6xe^{-x/3}$	$f = e^{2-x^2}$
$f = \dfrac{Ln\,x}{x^2}$	$f = \|x - 1\| + \|x - 3\|$	$f = \|x^2 - 6x + 8\|$

6-28 a) Si: $y = 3x^2 - 5x + 1$; Demostrar que se cumple: $y'' + xy' - 2y - 5x = 4$

b) Si: $y = e^{2x} - 1$; " $y'' + y' - 6y - 6 = 0$

c) Si: $y = e^{Sen\,x}$; " $y'' - y'\,Cos\,x + y\,Sen\,x = 0$

6-29 Hallar las Derivadas indicadas:

$f_{(x-2)} = x^3 + 7x$; $f'_{(x)}$	$3x^2 + 12x + 19$
$f_{(\frac{x+1}{3})} = 4x^2 - 2x + 1$; $f'_{(x)}$	$72x - 30$
$f_{(2x+1)} = e^{4x+1}$; $f'_{(x)}$	$2\,e^{2x-1}$
$f_{(4x-1)} = 8x^2 - 6x + 1$; $f'_{(3x+1)}$	$3x + \dfrac{1}{2}$
$f_{(5x+2)} = 2^{3x-1}$; $f'_{(10x+2)}$	$\dfrac{3}{5}2^{6x-1}Ln\,2$
$f_{(x)} = x^2 - 6x + 6$; $f'_{(x)} = f_{(x)}$	$x = 2$; $x = 6$
$f_{(x)} = Sen\,x$; $f'_{(x)} = f_{(x)}$	$x = \pi/4$



VII-1 APLICACIONES DE MÁXIMOS MÍNIMOS

Usando los conceptos de Máximos, Mínimos y Puntos Críticos (Ver VI-9, VI-10, VI-11) es posible plantear problemas de Aplicación Práctica de las Derivadas.

Para resolver problemas de Aplicación de Máximos y Mínimos, es aconsejable seguir los siguientes pasos:

I) Identificar claramente al concepto que se busca maximizar o minimizar.
II) Bosquejar una gráfica del problema (Si corresponde)
III) Formar la Función del concepto a maximizar o minimizar, usando variables auxiliares que se requieran
IV) Usando condiciones o datos del problema, eliminar las variables auxiliares, de manera tal que quede una sola variable.
V) Derivar, igualar a cero, etc (Calculando los Máximos y Mínimos requeridos)

Ej 7-1 Se trata de hallar dos Números, cuyo Producto sea Máximo, si su Suma es: 8

Algunos pares de de Suma 8, determinan los Productos:

Se procura hallar aquellos dos números que determinan el mayor Producto posible con la condición de Suma 8.

Resolviendo el Problema, siguiendo las Reglas aconsejadas

0 ; 8	$0 + 8 = 8$	$0 \cdot 8 = 0$
1 ; 7	$1 + 7 = 8$	$1 \cdot 7 = 7$
2 ; 6	$2 + 6 = 8$	$2 \cdot 6 = 12$
3 ; 5	$3 + 5 = 8$	$3 \cdot 5 = 15$
4 ; 4	$4 + 4 = 8$	$4 \cdot 4 = 16$

$P :\ P = xu$ — Se busca maximizar el Producto: P. Si el Par de Números es x . u (u es la variable auxiliar)

$x + u = 8 \Rightarrow u = 8 - x$ — La Suma del Par de Números es 8 (Despejando u) y reemplazando u en la Función Producto

$P_{(x)} = x(8 - x) = 8x - x^2$

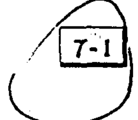
$P'_{(x)} = 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4$ — Derivando e igualando a cero, se tiene $x = 4$ (Punto Crítico)

$u = 8 - x = 8 - 4 = 4$ — Calculando luego el valor de $u = 4$

$P_{Máx} = 4 \cdot 4 = 16$ — Calculando el Producto Máximo.

Sin embargo faltaría comprobar que el Punto Crítico hallado es efectivamente un Máximo (Verificación usualmente innecesaria): Para ello se usa el Criterio de la Segunda Derivada:

$P'' = -2 < 0 \Rightarrow$ Máximo — Efectivamente es un Máximo.


7-1 Hallar dos Números positivos de Producto igual a 36; de manera que su Suma sea Mínima.

$S = x + u$ — Se busca minimizar la Suma (S)

$x \cdot u = 36 \Rightarrow u = \dfrac{36}{x}$ — Si los Números son: x, u

Eliminando la variable: u; con el dato de Producto igual a 36

$\Rightarrow S_{(x)} = x + \dfrac{36}{x}$ — Reemplazando: u en la expresión de Suma, la única variable que queda es: x

$S'_{(x)} = 1 - \dfrac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 6$ — Derivando e igualando a cero, se obtiene el valor de: x

$\Rightarrow u = \dfrac{36}{x} = \dfrac{36}{6} = 6$ — Se calcula el valor del otro Número: u

$S_{Min} = x + u = 6 + 6 = 12$ — Calculando la Suma Mínima

7-2 Una barra de acero tiene una longitud de 20 m ; determinar las dimensiones en que debe doblarse de manera que forme un Rectángulo de Área Máxima.

Este es un típico problema de Geometría, fácilmente resoluble por los anteriores conceptos, se bosqueja una gráfica para ilustrar el Problema:

A — Se maximizará el Área A, las dimensiones del Rectángulo son: x, u

$A = xu$

$L = 2x + 2u = 20$ — La longitud de la barra se constituye en el Perímetro del Rectángulo. Reemplazando: u

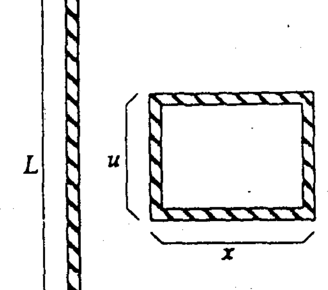
$u = 10 - x$

$A = x(10 - x) = 10x - x^2$

$A' = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$ — Derivando e igualando a cero.

$u = 10 - x = 10 - 5 = 5$ — El Área Máxima tendrá lados de 5 y 5m

$A = xu = 5 \cdot 5 = 25\ m^2$



Entonces el Rectángulo de Área Máxima, será en realidad un Cuadrado.

7-3 Hallar el Área Máxima del Rectángulo inscrito en un Triángulo rectángulo de dimensiones: 6, 8, 10 cm (Dos lados del Rectángulo coinciden con los lados del Triángulo)

A — Se maximiza el Área rectangular de dimensiones: x, u

$A = xu$

$\frac{b}{a} = \frac{u}{a - x}$ — Los lados del Triángulo son: a, b, c (Planteando por Triángulos Semejantes)

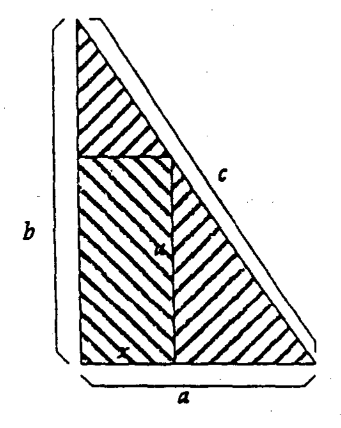
$u = b - \frac{b}{a} x$ — Despejando: u

$A = x(b - \frac{b}{a} x) = bx - \frac{b}{a} x^2$ — Reemplazando en la Ecuación de: A, simplificando

$A' = b - \frac{b}{a} 2x = 0$ — Derivando e igualando a cero, se obtiene: $x = a/2$

$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}$ — Calculando el valor de u por la Ecuación anterior.

$u = b - \frac{b}{a} x = \frac{b}{2}$



Entonces el Área Máxima del Rectángulo, usando los valores dados de: $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm es:

$$A_{Máx} = xu = \frac{a}{2}\frac{b}{2} = \frac{6}{2}\frac{8}{2} = 12\ cm^2$$

7-4 Un agricultor desea cercar un Terreno rectangular de 5000 m², sabiendo que uno de los lados ya está cubierto por una cadena de cerros, hallar las dimensiones de manera que el costo del cercado del Terreno sea Mínimo.

El Problema busca el Perímetro Mínimo de un Rectángulo, sin uno de sus lados.

P — Se minimiza el Perímetro

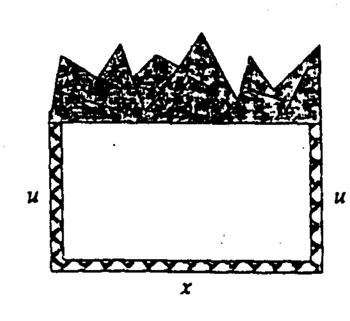
$P = x + 2u$ — Perímetro del Rectángulo con 3 lados.

$A = 5000 = xu \Rightarrow u = \frac{A}{x}$ — El Área es conocida, despejando: u, reemplazando u

$P = x + 2\frac{A}{x}$

$P' = 1 - \frac{2A}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2A}$ — Derivando, igualando a cero, se obtiene x luego se calcula: u.

$u = \frac{A}{x} = \sqrt{\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{2A}}{2}$



Si $A = 5000\ m^2 \Rightarrow x = 100$ m $u = 50$ m $\Rightarrow P_{min} = x + 2u = 200$ m

7-5 En un Triángulo Isósceles de dimensiones: 4 ; 3 ; 3 cm. Hallar el Rectángulo de Máxima Área, que se inscribe con base en el lado distinto.

$A = 2xu$ — Se maximiza el Área del Rectángulo cuyas dimensiones son: $2x$, u

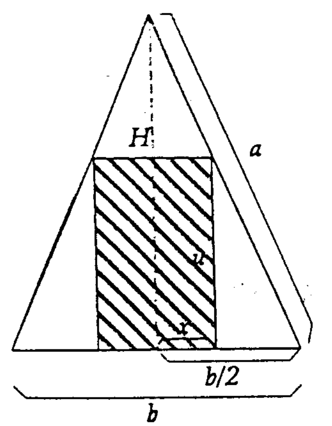
$\frac{H}{b/2} = \frac{u}{b/2 - x}$ — Los lados del Triángulo son: a, a, b ; Su altura: H; Por Triángulos Semejantes.

$H^2 = a^2 - (\frac{b}{2})^2$ — La Altura: H se calcula por el Teorema de Pitágoras. Despejando y reemplazando: u en la Ecuación del Área del Rectángulo.

$u = H(1 - \frac{2x}{b})$

$A_{(x)} = 2xH(1 - \frac{2x}{b}) = 2Hx - \frac{4H}{b}x^2$ — Simplificando. Derivando e igualando a cero. Despejando el valor de: x luego se calculará: u

$A_{(x)}' = 2H - \frac{4H}{b}2x = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{4}$



$u = H(1 - \frac{2x}{b}) = \frac{H}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (\frac{b}{2})^2}$; Usando los valores de: $a = 4$; $b = 3$

$A_{Máx} = 2xu = 2\,\frac{b}{4}\,\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (\frac{b}{2})^2}$ — Si: $x = 3/4$, $u = \sqrt{55}/4$ $\Rightarrow A = \frac{3\sqrt{55}}{8}$ cm^2

7-6 Hallar el Rectángulo de Máxima Área, que puede inscribirse en una Semicircunferencia de Radio: $R = 10$ cm, las bases deben coincidir.

$A = 2xu$ — Maximizando el Área Rectangular, con dimensiones: $2x$, u. Por Pitágoras, reemplazando

$R^2 = x^2 + u^2$

$u = \sqrt{R^2 - x^2}$ — Reemplazando u en la Ecuación de Área, derivando e igualando a cero.

$A = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

$A' = 2(R^2 - x^2)^{1/2} + 2x\frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-1/2}(-2x)$

$A' = 2(R^2 - x^2) - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}R \Rightarrow u = \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}R$ — Calculando u, tomando $R = 10$ cm

Área Máxima $A_{Máx} = 2xu = 2(\frac{R}{\sqrt{2}})(\frac{R}{\sqrt{2}}) = R^2$ — $x = R/\sqrt{2} = 7.07$, $u = R/\sqrt{2} = 7.07$ $\Rightarrow A_{Máx} = 100$ cm^2

7-7 De una lámina cuadrada de 12 cm de lado, recortando ángulos, se debe formar un recipiente de base cuadrada, hallar las dimensiones para Volumen Máximo

$V = x^2u$

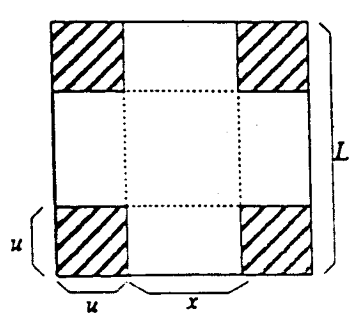
$L = x + 2u \Rightarrow u = \frac{L - x}{2}$ — Se maximiza el Volumen de un Paralelepípedo de base cuadrada, sin tapa superior.

$V = x^2(\frac{L - x}{2}) = \frac{1}{2}Lx^2 - \frac{1}{2}x^3$ — Reemplazando

$V' = Lx - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2L}{3}$ — Derivando.

$\Rightarrow u = \frac{L}{6}$; $V_{Máx} = (\frac{2L}{3})^2\frac{L}{6} = \frac{2L^3}{27}$

$L = 12 \Rightarrow u = 2$ cm . $V_{Max} = 128$ cm^3



7-8 Un herrero precisa fabricar marcos metálicos para retratos, uno debe ser cuadrado y el otro circular, pero solo dispone de una barra de longitud $L = 8$ m ; De que manera debería cortar la barra, para que el Área del Cuadrado y del Círculo sea Mínima.

$A = A_1 + A_2$ — Suma de Áreas a minimizar

$A_1 = s^2 \; ; \; A_2 = \pi r^2$ — Área del Cuadrado de lado: s y del Círculo de Radio: r

$L = x + u$ — Si la barra se corta, formará las longitudes: x, u

$x = 4s \Rightarrow s = \frac{x}{4} \; ; \; u = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{u}{2\pi}$ — u formará los lados del Cuadrado, x formará la longitud de Circunferencia.

$$A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{L-x}{2\pi}\right)^2$$

En la Suma de Áreas, se reemplaza: $u = L \cdot x$

$$A_{(x)} = \frac{x^2}{16} + \frac{L^2 - 2xL + x^2}{4\pi}$$

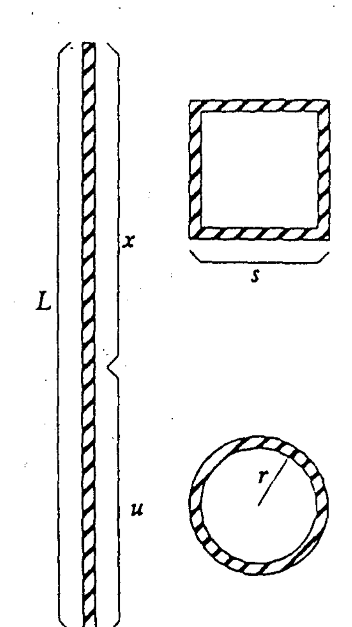
$$A'_{(x)} = \frac{x}{8} + \frac{-2L + 2x}{4\pi} = 0$$

Desarrollando. Derivando, igualando a 0

$$\Rightarrow \; x = \frac{4L}{\pi + 4}$$

$$\Rightarrow \; u = L - x = \frac{\pi L}{\pi + 4}$$

Despejando: x, despejando luego: u



Dado el valor de: $L = 8$ m, las dimensiones en que se corta la barra son:

$$x = \frac{4L}{\pi + 4} = \frac{4 \cdot 8}{\pi + 4} = 4.48 \text{ m} \quad ; \quad u = \frac{\pi L}{\pi + 4} = \frac{\pi \cdot 8}{\pi + 4} = 3.52 \text{ m}$$

$$A_{Mín} = A_1 + A_2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 = 2.24 \text{ m}^2$$

7-9 Hallar dimensiones del Cilindro de Máximo Volumen, que se inscribe en una Esfera de Radio: $R = 4$ cm

V — Se maximiza el Volumen del Cilindro.

$V = \pi r^2 h$ — El Radio y la Altura del Cilindro son r, h

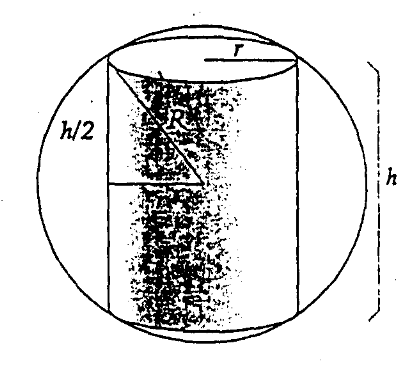
$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$ — Por Pitágoras, relacionando con el Radio de Esfera: R.

$\Rightarrow \; r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$ — Despejando: r^2

$V = \pi\left[R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]h$ — Reemplazando: r^2 en la Ecuación de Volumen.

$V = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4} h^3$ — Simplificando

$V' = \pi R^2 - \frac{\pi}{4} 3h^2 = 0$ — Derivando respecto de: h



$$\Rightarrow \; h = \sqrt{\frac{4}{3}}\, R \quad ; \quad r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$$

Despejando: h, luego de conocerse su valor, se determina el de: r, de acuerdo a Ecuación anterior

$$V_{Máx} = \pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, R\right)^2\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\, R\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$$

Volumen Máximo del Cilindro:

Si: $R = 4$ cm $\Rightarrow r = 3.27$ cm ; $h = 4.62$ cm ; $V_{Máx} = 154.77$ cm³

7-10 Hallar las dimensiones del Cono de Volumen Máximo, que se inscribe en una Esfera de Radio: $R = 4$ cm

V — Se maximiza el Volumen: V del Cono

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ — El Radio y Altura del Cono son: r, h

$h = u + R$

$R^2 = r^2 + u^2$ — De acuerdo a la gráfica. Por Pitágoras, relacionando el Radio de Esfera: R

$r^2 = R^2 - (h-R)^2 = 2hR - h^2$ — Despejando: r^2

$V = \frac{\pi}{3}(2hR - h^2)h$ — Reemplazando en la expresión del Volumen

$= \frac{\pi}{3}2Rh^2 - \frac{\pi}{3}h^3$ — Simplificando V

$V' = \frac{\pi}{3}4Rh - \frac{\pi}{3}3h^2 = 0$ — Derivando e igualando a cero (La variable es: h)

$h = \frac{4}{3}R \; ; \; h = 0$ — Despejando, de los resultados se toma solo: $h = \frac{4}{3}R$

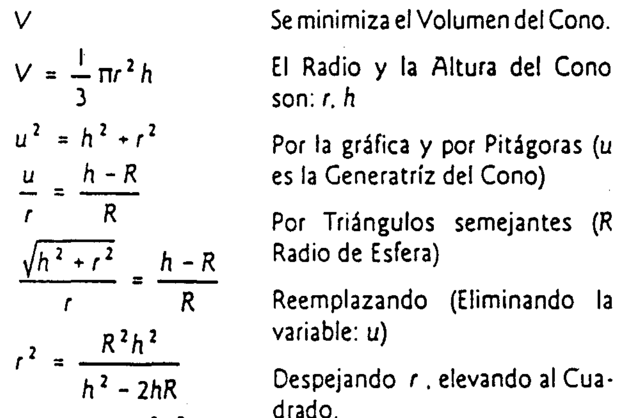
$r = \sqrt{2hR - h^2} = \sqrt{8/9}\,R$

Conocidas las dimensiones de: r, h el Volumen Máximo será:

$$V_{Máx} = \frac{\pi}{3}r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{8}{9}}R\right)^2\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32\pi}{81}R^3 \qquad \text{Si: } R = 4 \text{ cm} \Rightarrow \begin{aligned} V_{Máx} &= 79.43 \text{ cm}^3 \\ r &= 3.77 \text{ cm} \\ h &= 5.33 \text{ cm} \end{aligned}$$

El otro valor de: h ($h = 0$); significará un Volumen Mínimo, $V = 0$; que no tiene aplicación práctica alguna.

7-11 Hallar el Cono de Volumen Mínimo, circunscrito a una Esfera de Radio $R = 5$ cm



V — Se minimiza el Volumen del Cono.

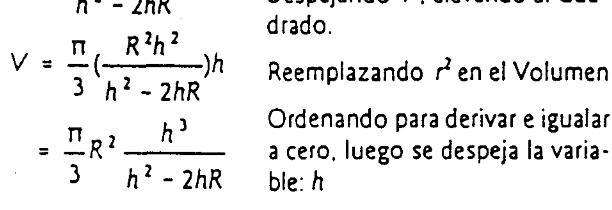
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ — El Radio y la Altura del Cono son: r, h

$u^2 = h^2 + r^2$ — Por la gráfica y por Pitágoras (u es la Generatríz del Cono)

$\frac{u}{r} = \frac{h-R}{R}$ — Por Triángulos semejantes (R Radio de Esfera)

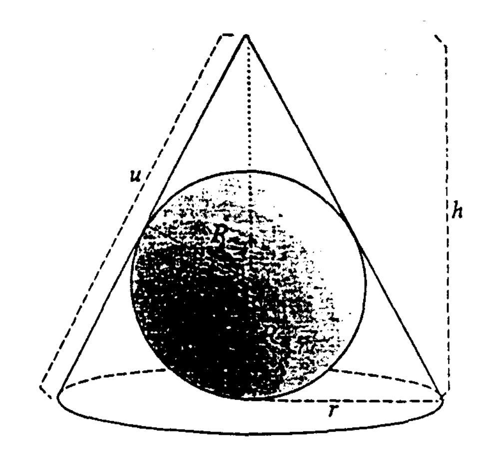
$\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r} = \frac{h-R}{R}$ — Reemplazando (Eliminando la variable: u)

$r^2 = \frac{R^2h^2}{h^2 - 2hR}$ — Despejando r, elevando al Cuadrado.



$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^2h^2}{h^2-2hR}\right)h$ — Reemplazando r^2 en el Volumen

$= \frac{\pi}{3}R^2\frac{h^3}{h^2-2hR}$ — Ordenando para derivar e igualar a cero, luego se despeja la variable: h



$$V' = \frac{\pi}{3}R^2\frac{3h^2(h^2-2Rh) - h^3(2h-2R)}{(h^2-2Rh)^2} = 0 \Rightarrow h = 0 \; ; \; h = 4R \; ; \text{ Tomando: } h = 4R$$

$$r^2 = \frac{R^2h^2}{h^2-2hR} \Rightarrow r = \sqrt{2}\,R \quad ; \quad \text{Por tanto: } V_{Máx} = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2}\,R)^2(4R) = \frac{8\pi}{3}R^3$$

Si: $R = 5$ cm $\Rightarrow V_{Max} = 1047.20$ cm^3 ; $r = 7.07$ cm ; $h = 20$ cm

7-12 Determinar el Ángulo de corte de un Círculo de acero, de manera tal que el Volumen Cónico que se forme sea Máximo, el Radio del Círculo es: R = 10 cm

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

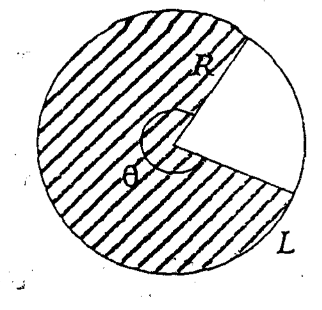
Volumen del Cono

Radio y la Altura del Cono son: r, h. Por Pitágoras.

$$R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

El Radio del Círculo R se convierte en Generatriz del Cono, despejando: h, reemplazando.

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$



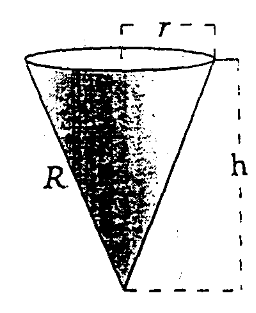
La longitud del Arco es: L su Fórmula se expresa con θ en Radianes. L se constituye en el Perímetro de la base del Cono.

$$L = \theta R \;,\; L = 2\pi r \;,\; r = \frac{\theta R}{2\pi}$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\theta R}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{\theta R}{2\pi}\right)^2}$$

Despejando r y reemplazando en V. Simplificando y derivando respecto de θ

$$V = \frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$



$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2}[2\theta(4\pi^2 - \theta^2)^{1/2} + \theta^2 \frac{1}{2}(4\pi^2 - \theta^2)^{-1/2}(-2\theta)]' = 0$$

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(\frac{8\theta\pi^2 - 3\theta^3}{4\pi^2 - \theta^2}\right) = 0 \Rightarrow \theta = 0 \;:\; \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,2\pi \quad \text{Tomando: } \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,2\pi$$

$$V_{Máx} = \frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}2\pi\right)^2\sqrt{4\pi^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}2\pi\right)^2} = \frac{2r^3\pi}{9\sqrt{3}}$$

Si: $R = 10$ cm ; $V_{Máx} = 403.07\text{cm}^3$; $\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,2\pi\ Rad = 293.94°$ $\Rightarrow$ $r = 8.16$ cm, $h = 5.77$ cm



7-13 Hallar las dimensiones de un recipiente abierto, formado por un Cilindro terminado en su parte inferior por una Semiesfera, de manera que para un Volumen V, la cantidad de material usada en su construcción sea mínima.

$$A = 2\pi r h + \frac{1}{2}4\pi r^2$$

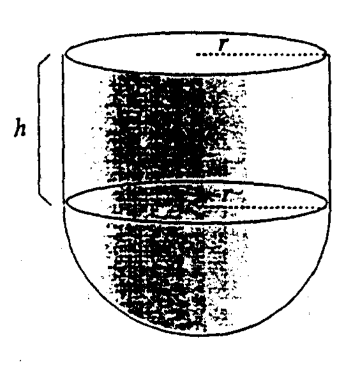
Se minimiza el Área del Cilindro y Semiesfera, sus radios coinciden.

$$A = 2\pi(h + r)r$$

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

El Volumen V se asume conocido, es la suma del Cilindro y Semiesfera.

$$\Rightarrow h = \frac{3V - 2\pi r^3}{3\pi r^2}$$



Despejando h y reemplazando en la Ecuación de Área a minimizar.

$$A = 2\pi\left(\frac{3V - 2\pi r^3}{3\pi r^2} + r\right)r$$

$$A = \frac{6V + 2\pi r^3}{3r}$$

Luego derivando, e igualando a cero.

$$A' = \frac{6\pi r^2(3r) - (6V + 2\pi r^3)3}{(3r)^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$$

$$h = \frac{3V - 2\pi r^3}{3\pi r^2} = 0 \Rightarrow A_{Mín} = 2\pi(h + r)r = 2\pi\left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{2/3}$$

Al reemplazar la expresión de r, se obtiene que la altura h es cero, por tanto el recipiente se reduce a la forma de Semiesfera abierta

7-14 Hallar las dimensiones del Rectángulo de Área Máxima que se puede inscribir entre el Eje de abscisas y la Parábola de Ecuación: $y = 9 - x^2$

$A = 2xy$ — Se maximiza el Área del Rectángulo de base $2x$; altura y

$y = 9 - x^2$

$A = 2x(9 - x^2)$ — Por la Ecuación de la Parábola se obtiene: y Reemplazando en la Ecuación de Área.

$A = 18x - 2x^3$

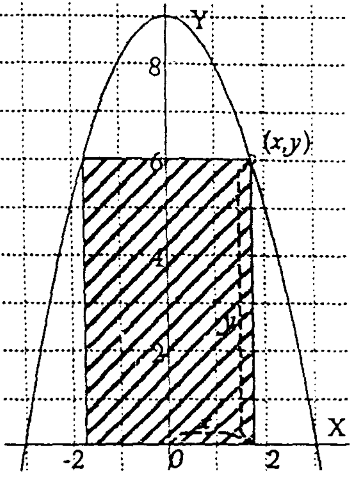
$A' = 18 - 6x^2 = 0$ — Un Vértice del Rectángulo coincide con el punto (x,y) de la curva de la Función.

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{3}$

$y = 9 - (\sqrt{3})^2 = 6$ — Derivando, igualando a cero se obtiene x; luego y

$A_{Máx} = 2xy$ — Área Máxima.

$\quad = 2\sqrt{3}\,6 = 20.78$



7-15 En la curva de Gauss: $y = e^{-x^2/2}$; Hallar las dimensiones del Rectángulo de Máxima Área que pueda inscribirse entre el Eje de abscisas y la curva.

$A = 2xy$

$y = e^{-x^2/2}$

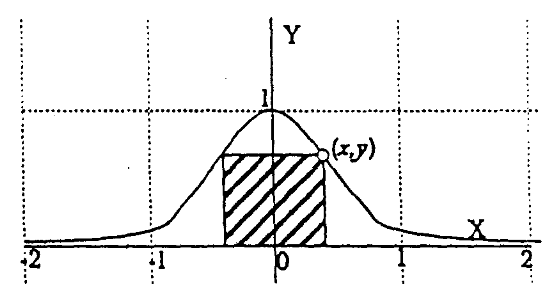
$A = 2xe^{-x^2/2}$

$A' = 2e^{-x^2/2} + 2xe^{-x^2/2}(-x) = 0$

$A' = 2e^{-x^2/2}(1 - x^2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1 \quad ; \quad y = e^{-x^2/2} = e^{-1/2}$

$A_{Máx} = 2xy = 2xe^{-x^2/2} = 2e^{-1/2} = 1.21$



Se maximiza el Área del Rectángulo de Base $2x$: Altura y. De la Ecuación de curva se obtiene: y

El punto (x,y) de la curva de la Función (Curva de Gauss), es también un vértice del Rectángulo.

7-16 Hallar las dimensiones del Rectángulo de Máxima Área que puede inscribirse en una Elipse de Semiejes: $a = 4 : b = 3$ (Centro en el Origen)

A — Se maximiza el Área del Rectángulo de base $2x$, altura $2y$

$A = 4xy$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — Se obtiene: y por la Ecuación de Elipse con centro en el Origen. El Vértice del Rectángulo coincide con el punto de la Elipse (x,y)

$y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$A = 4x\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

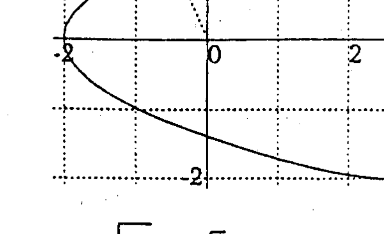
$A' = 4\dfrac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2} + 4x\dfrac{b}{a}\dfrac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$

Por tanto $\quad A_{Max} = 4xy = 4\dfrac{a}{\sqrt{2}}\dfrac{b}{\sqrt{2}} = 2ab = 24$ — La base $2x = 5.66$; Altura: $2y = 4.24$

7-17 Hallar la Mínima Distancia entre la curva de: $y^2 = x + 2$ con respecto al Origen

Esta vez se trata de hallar una Distancia Mínima (d), es más conveniente minimizar el cuadrado de la Distancia (D) y luego calcular d ($D = d^2$)



D

$D = x^2 + y^2$ — Se minimiza el cuadrado de la Distancia al Origen del punto (x,y) que pertenece a la curva.

$y^2 = x + 2$ — Por la Ecuación de la curva. Reemplazando en D

$D = x^2 + (x + 2)$

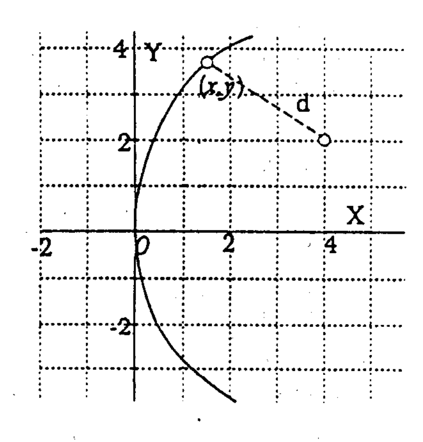
$D' = 2x + 1 = 0$ — Derivando, igualando a cero.

$\Rightarrow \quad x = -1/2$ — Despejando x, con este valor se determina luego el valor de y

$y = \sqrt{x + 2} = \sqrt{3/2}$

$$D_{Mín} = x^2 + y^2 = (-\frac{1}{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow d_{Mín} = \sqrt{D_{Mín}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

7-18 Hallar la Mínima Distancia entre la Parábola: $y^2 = 8x$ con el punto $P(4,2)$



D

$D = (x - 4)^2 + (y - 2)^2$ — Minimizando el Cuadrado de la Distancia entre el punto: (x,y) al (4,2)

$y^2 = 8x$

$D = (x - 4)^2 + (\sqrt{8x} - 2)^2$ — Por la Ecuación de la curva. Reemplazando en: D

$\quad = x^2 - 4\sqrt{8x} + 4$

$D' = 2x - 4\dfrac{8}{2\sqrt{8x}} = 0$ — Simplificando, derivando e igualando a 0

$x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{8x} = 4$ — Despejando x, calculando y

$D_{Mín} = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (2 - 4)^2 + (4 - 2)^2 = 8$ — Luego de conocer $D_{Mín}$, se calcula $d_{Mín}$

$d_{Mín} = \sqrt{D_{Mín}} = \sqrt{8}$

7-19 La Suma de tres Números positivos es 30 ; El Primero mas el doble del Segundo, mas el triple del Tercero suman 60 ; Determinar estos Números de manera tal que su Producto sea Máximo.

$P = xyz$ — Maximizando el Producto de tres números positivos

$x + y + z = 30$
$x + 2y + 3z = 60$ — Suponiendo que los números son $x ; y ; z$

De los datos del Problema, se tienen las dos sumas, entre éstas dos ecuaciones, se eliminan variables, expresándolas en términos de x

$y = 30 - 2x$
$z = x$ — Reemplazando en la Ecuación del Producto a Maximizar

$P = x(30 - 2x)(x)$ — Simplificando

$P = 30x^2 - 2x^3$ — Derivando e igualando a cero

$P' = 60x - 6x^2 = 0$ — Despejando x (Solo se toma el valor de $x = 10$), para en base a este valor calcular: y, z

$x = 10 \; ; \; x = 0$
$y = 30 - 2x = 10$
$z = x = 10$

$P_{Máx} = xyz = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

7-20 Hallar la Mínima Área Triangular comprendida entre los Ejes Coordenados del Primer Cuadrante y la Recta que pasa por el punto: (2,3)

A — Minimizando el Área de Triángulo, de base x; altura y

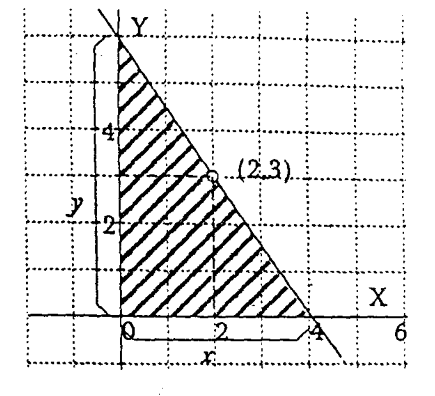
$A = \frac{xy}{2}$ — x, y son las Intersecciones de la Recta con los Ejes.

$\frac{y}{x} = \frac{3}{x-2}$ — Por Triángulos Semejantes.

$y = \frac{3x}{x-2}$ — Despejando: y

$A = \frac{x}{2}\frac{3x}{x-2}$ — Reemplazando y en la Ecuación de Área

$A = \frac{3x^2}{2x-4}$ — Simplificando, para luego derivar.



$$A' = \frac{6x(2x-4) - 3x^2(2)}{(2x-4)^2} = 0$$

$$= \frac{6x(x-4)}{(2x-4)^2} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ x = 0 \end{matrix}$$

Tomando solo: $x = 4$; se obtiene el Área Mínima, ya que con $x = 0$, el problema carece de sentido.

Calculando el valor de y, reemplazando se logra la Mínima Área.

$$y = \frac{3x}{x-2} = 6 \quad ; \quad \text{Por tanto:} \quad A_{Min} = \frac{xy}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$$

7-21 Hallar la Mínima longitud del segmento de Recta, que pasa por el punto: (1,8); apoyándose en los Ejes Coordenados del Primer Cuadrante.

Se calculará previamente el cuadrado de la longitud requerida (D), para luego calcular tal longitud ($d = \sqrt{D}$) De esa manera se simplifican los cálculos.

D — Minimizando la Distancia entre los puntos (0,y); (x,0); Que son los puntos de Intersección de la Recta con los Ejes.

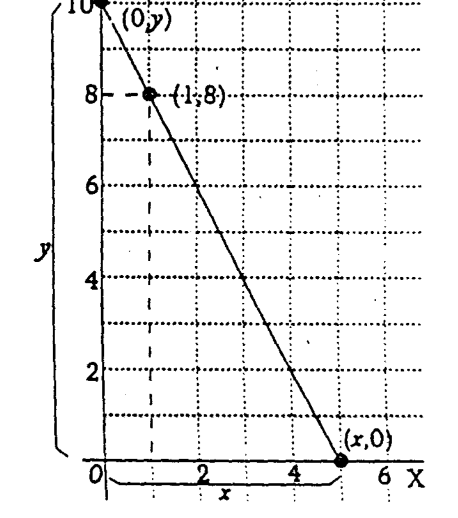
$D = (0-x)^2 + (y-0)^2$

$D = x^2 + y^2$

$\frac{y}{x} = \frac{8}{x-1}$ — Por Triángulos Semejantes, la Recta pasa por el punto: (1,8)

$y = \frac{8x}{x-1}$ — Despejando y

$D = x^2 + (\frac{8x}{x-1})^2 = x^2 + \frac{64x^2}{(x-1)^2}$ — Reemplazando y en la Ecuación de Distancia: D.



$$D' = 2x + \frac{128x(x-1)^2 - 64x^2 2(x-1)}{((x-1)^2)^2} = 0$$

$$= 2x - \frac{128x}{(x-1)^3} = \frac{2x[(x-1)^3 - 64]}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 5 \end{matrix}$$

Tomando a $x = 5$; que determina la Distancia Mínima, luego se halla el valor de y

$$y = \frac{8x}{x-1} = 10 \quad \text{Por tanto:} \quad D_{Min} = x^2 + y^2 = 5^2 + 10^2 = 125$$

$$d_{Min} = \sqrt{D_{Min}} = \sqrt{125} = 11.18$$

En todo Problema de Aplicación, si se presentaren dos Soluciones o Puntos Críticos, usualmente solo uno de ellos determina lo requerido.

7-22 Hallar la Mínima Área encerrada por los Ejes Coordenados del primer cuadrante y una Tangente a la curva de Ecuación: $y = 4 - x^2$

$A = \frac{1}{2}uv$

Es el Área Triangular lo que se minimiza.

$y = 4 - x^2$

$y' = -2x$

u, v son las Intersecciones de la Tangente a la curva con los Ejes Coordenados, se constituyen en los lados del Triángulo.

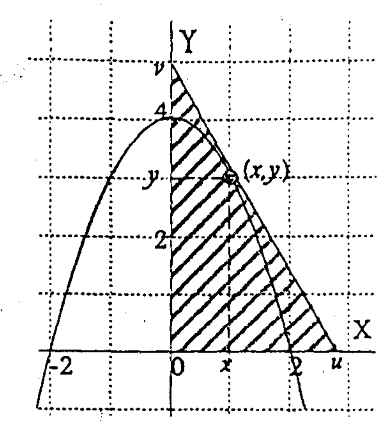
$-\frac{v}{u} = -\frac{y}{u - x} = -2x$

Se determina la pendiente de la Recta Tangente para igualar con la pendiente obtenida geométricamente. Expresando: u, v en términos de la variable x

$u = \frac{4 + x^2}{2x}$; $v = 4 + x^2$

$A = \frac{1}{2}(\frac{4 + x^2}{2x})(4 + x^2)$

Reemplazando y derivando.



$$A = \frac{1}{4}\frac{(4 + x^2)^2}{x} \Rightarrow A' = \frac{1}{4}\frac{2(4 + x^2)2x\cdot x - (4 + x^2)^2\cdot 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{8}{3} \; ; \; u = \sqrt{\frac{16}{3}} \; ; \; v = \frac{16}{3} \; ; \; A_{Mín} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{3}}\frac{16}{3} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$$

7-23 Una faja de hojalata de anchura: a ; debe doblarse de manera que forme un canalón abierto, hallar el ángulo θ que determina la máxima capacidad.

$A = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}R^2 Sen\ \theta$

Se maximiza el Área del Segmento Circular. (Previamente se expresa el Área del sector, restando luego el triángulo superior)

$A = \frac{1}{2}R^2(\theta - Sen\ \theta)$

$a = R\theta$

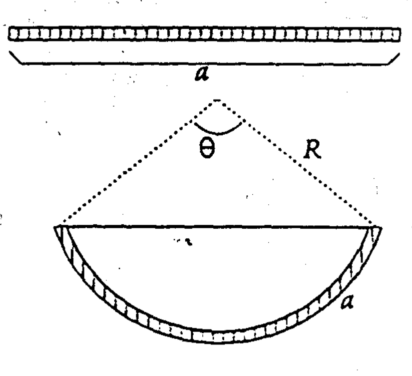
Simplificando: A

$A = \frac{1}{2}(\frac{a}{\theta})^2(\theta - Sen\ \theta)$

Longitud de Arco (θ está en Radianes)

$A = \frac{a^2}{2}\frac{\theta - Sen\,\theta}{\theta^2}$

Reemplazando y derivando.



$$A' = \frac{a^2}{2}\frac{(1 - Cos\ \theta)\theta^2 - (\theta - Sen\ \theta)2\theta}{(\theta^2)^2} = 0 \Rightarrow \theta = \pi \; ; \; R = \frac{a}{\pi} \; ; \; A_{Máx} = \frac{a^2}{2\pi}$$

7-24 Hallar las dimensiones del Círculo de Máxima Área, que puede inscribirse en un Cuadrado de lado: $L = 5$ cm

$A = \pi r^2$

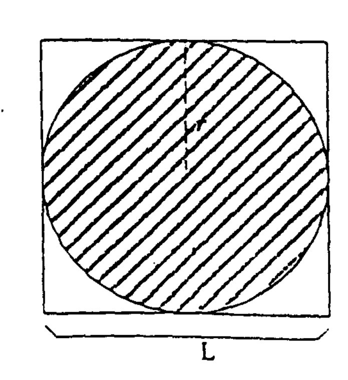
$A = \pi(\frac{L}{2})^2$ Se maximiza el Área del Circulo

Expresión de Área

$A = \frac{\pi}{4}L^2$ Reemplazando $r = L/2$

$A' = 0$ Simplificando, derivando

Por tanto existe un único Círculo que puede inscribirse en un Cuadrado, de dimensiones constantes. No existen alternativas que permitan elegir otras dimensiones.



VII-2 DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

La "Razón de Cambio Instantáneo" de $f_{(x)}$ en x_o se define como la Derivada: $f'_{(x_0)}$ si ésta Derivada existe.

Por la definición de la Derivada en: x_o de la Función: $f_{(x)}$

$$f'_{(x_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)}}{h} \qquad \text{Si: } h = \Delta x = x - x_o$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{f_{(x)} - f_{(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

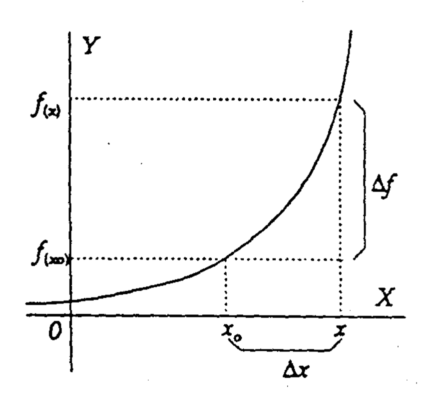
El Cociente entre el Cambio en la Función: Δf, respecto al Cambio en la variable Δx, es la Razón de Cambio: $\Delta f / \Delta x$

Cuando Δx tiende a cero (O también cuando x tiende a x_o) Se tendrá la Razón de Cambio Instantáneo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_{(x_0)}$$

En la gráfica adjunta se analiza alrededor del punto: $(x_o, f_{(x_0)})$

Muchos conceptos de Física y de otras ciencias se definen como Razones de Cambio Instantáneas.



Ej 7-2 La Velocidad media (v_m) es la Razón de cambio entre el desplazamiento Δs respecto al cambio en el tiempo Δt

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_o)}{t - t_o}$$

La Velocidad Media es en realidad un Promedio entre el Desplazamiento Total registrado entre un Total de Tiempo transcurrido.

La Velocidad Instantánea (v_i) es el Límite de la razón de Cambio del Desplazamiento respecto al Cambio de Tiempo, cuando éste tiende a cero.

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_o} \frac{s_{(t)} - s_{(t_0)}}{t - t_0} = s'_{(t)}$$

La Velocidad Instantánea es la Velocidad que posee un móvil, en exactamente el tiempo de t_o.

7-25 Un móvil se desplaza de acuerdo a la Función: $s_{(t)} = 3t^2 + 15$; Hallar las Velocidades Media (v_m) e Instantánea (v_i) en: $t = 5$, desde su inicio en: $t = 0$

$$s_{(t)} = 3t^2 + 15$$

Si: $t = 0 \quad s_{(0)} = 3 \cdot 0^2 + 15 = 15$

Si: $t = 5 \quad s_{(5)} = 3 \cdot 5^2 + 15 = 90$

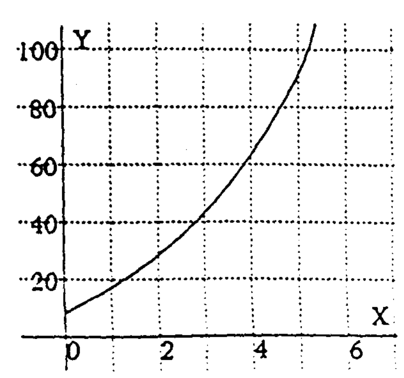
$$v_m = \frac{v_{(t)} - v_{(t_0)}}{t - t_0} = \frac{90 - 15}{5 - 0} = 15$$

$v_i = s'_{(t)} = 6t$

$v_{i(5)} = 6 \cdot 5 = 30$

Por la Función de Desplazamiento:

Tanto para la Velocidad Media como para la Instantánea, se asume que el Desplazamiento está en m y el Tiempo en seg.



VII-3 VARIACIONES CON EL TIEMPO

Si la Variable Independiente es el tiempo t, la Derivada de otra Variable Dependiente respecto al tiempo t, se llama Variación con el tiempo.

Ej 7-3 Si: $x = 5t + t^3$

$$\frac{dx}{dt} = 5 + 3t^2 = v$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6t \qquad = a$$

Si: $y = 3\, Sen(4t - 1)$

$$\frac{dy}{dt} = 3\, Cos(4t - 1) \cdot 4 \qquad = v$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -3 Sen(4t - 1) \cdot 4 \cdot 4 = a$$

Si: x, y Son Funciones de Desplazamiento, sus Primeras Derivadas son la Velocidad. Las Segundas Derivadas son la Aceleración.

Si existieran mas variables, relacionadas entre sí por una Ecuación que a su vez dependan de t. Sus Variaciones respecto de t pueden obtenerse mediante Derivación y aplicando la Regla de la Cadena.

Ej 7-4 Se calcula la Derivada cuando x; y dependen del tiempo t; y a su vez están relacionados entre sí por una Ecuación.

$$x = x_{(t)} \qquad y = y_{(t)}$$

$$x^3 + 4y^2 = 1$$

$$3x^2 \frac{dx}{dt} + 8y \frac{dy}{dt} = 0$$

La Derivada de la Ecuación respecto de t es la indicada.

Note que x; y se derivan por reglas usuales aplicando además la Regla de la Cadena, en cada caso se multiplica por la Derivada de la variable respecto de t. A este tipo de Derivadas se llaman Derivadas Paramétricas.

7-26 Derivar respecto de: t las siguientes Ecuaciones (x; y; z dependen de t)

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$

b) $x^5 + 2x^3 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^4 \frac{dx}{dt} + 6x^2 \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$

c) $Sen\ x + Ln\ y = x^2 \quad \Rightarrow \quad Cos\ x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$

d) $x^7 + x^4y^3 + y^7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7x^6 \frac{dx}{dt} + 4x^3y^3 \frac{dx}{dt} + 3x^4y^2 \frac{dy}{dt} + 7y^6 \frac{dy}{dt} = 0$

e) $x^2 + y^3 + z^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \frac{dx}{dt} + 3y^2 \frac{dy}{dt} + 4z^3 \frac{dz}{dt} = 0$

Aplicando las Reglas conocidas de derivación.

En el Inciso d) se aplica la Regla del producto.

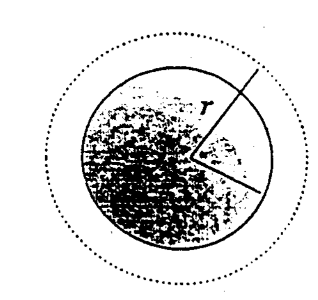
7-27 Un globo esférico es inflado con gas, que ingresa a razón de: 80 m³/min ; en el instante en que alcanza un Radio de 10 m ; Hallar la Velocidad a la cuál se está incrementando su Radio.

Si el globo recibe gas a razón de: 80 m³/min , es ésta su variación de Volumen, o Velocidad a la que está aumentando su Volumen.

El Volumen de una Esfera de Radio r es: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Derivando V, r respecto del tiempo t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi\, 3r^2 \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4 \pi r^2} = \frac{80}{4 \pi 10^2} = 0.064 \frac{m}{min}$$



Si el Radio es $r = 10$ m $\Rightarrow dr/dt = 0.064$ m/min ; que se constituye en la Velocidad a la que se incrementa el Radio de la Esfera.

7-28 Un embudo en forma de Cono invertido tiene 5 cm de Radio R, 8 cm de Altura H, un líquido fluye dentro del embudo a razón de 12 cm^3/seg. y fuera a 4 cm^3/seg. Con que rapidez sube el líquido cuando se encuentra a 5 cm de Altura.

$$\frac{dV_i}{dt} = 12 \ ; \ \frac{dV_o}{dt} = 4$$

Son la Velocidad del líquido que ingresa y la Velocidad del líquido que sale.

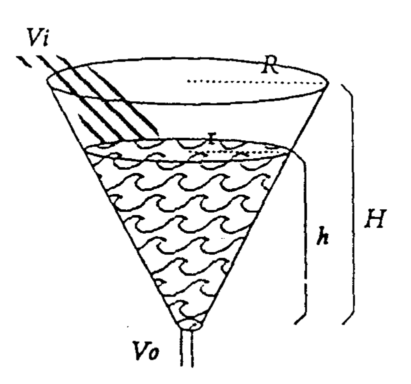
$$\frac{dV_i}{dt} - \frac{dV_o}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

La resta es la Velocidad del líquido que queda.

$$\frac{dh}{dt} \ ; \ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Velocidad de nivel de líquido y Volumen de Cono (r, h variables). Por Triángulos Semejantes

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{h}{H}R$$



$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{H^2}h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{H^2}3h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{H^2}{R^2}\frac{\frac{dV}{dt}}{\pi h^2} = \frac{H^2}{R^2}\frac{\frac{dV_i}{dt} - \frac{dV_o}{dt}}{\pi h^2} = 0.26\ \frac{cm^3}{seg}$$

Note la necesidad de eliminar una variable por Triángulos Semejantes, ya que se tenían dos variables originalmente (r, h)

7-29 Una lámpara está colgada a Altura de $H = 3$ m, un hombre de estatura $h = 1.7$ m camina alejándose de la lámpara a Velocidad de 2 m/seg. Con que rapidez se alarga su sombra; Con que rapidez avanza el extremo de su sombra.

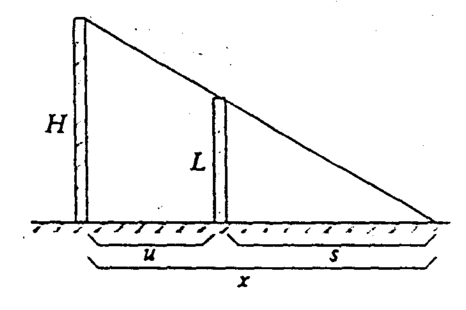
H, L Son la Altura de la lámpara y Hombre, son datos conocidos, constantes

s Es la longitud de sombra, variable

x Longitud de extremo de sombra, variable.

$$\frac{H}{L} = \frac{x}{s} \Rightarrow \frac{H}{L} = \frac{u+s}{s} \Rightarrow \frac{H}{L} = \frac{x}{x-u}$$

Por Triángulos Semejantes.



Se toma en cuenta que: u es la Distancia recorrida por el hombre, la Derivada du/dt es la velocidad dada del hombre, despejando: s, x

$$\text{Si: } s = \frac{L}{H-L}u \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{L}{H-L}\frac{du}{dt} = 2.61 \text{ m/seg}$$

$$\text{Si: } x = \frac{H}{H-L}u \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{H}{H-L}\frac{du}{dt} = 4.61 \text{ m/seg}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{ds}{dt} = 2 + 2.61 = 4.61 \text{ m/seg}$$

Son la Velocidad de crecimiento de la sombra y la Velocidad de avance del extremo de la sombra.

También puede calcularse la velocidad de avance del extremo de la sombra, como la suma de la velocidad del hombre mas la velocidad de crecimiento de la sombra.

7-30 La longitud de un alambre de cobre es: $L = 100(1 + aT + bT^2)$ donde T es la variable (Temperatura en °c) ; a, b son constantes. Encontrar la velocidad a la que crece la longitud, cuando $T = 22$°c ; $a = 0.16\cdot 10^{-4}$; $b = 0.10\cdot 10^{-7}$

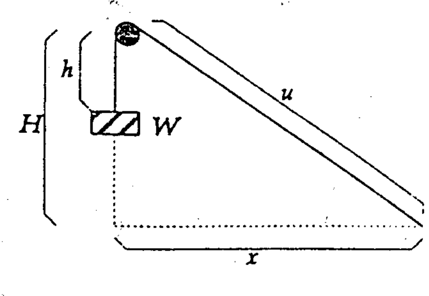
$$\text{Si: } L = 100(1 + aT + bT^2)$$

$$\frac{dL}{dT} = 100(a + 2bT) \ ; \ T = 22° \ ; \ a = 0.16\cdot 10^{-4}, \ b = 0.10\cdot 10^{-7}$$

$$= 100(0.16\cdot 10^{-4} + 2\cdot 0.10\cdot 10^{-7}\cdot 22) = 1.644\cdot 10^{-3} \text{ cm/°c}$$

La variable es la Temperatura (T). La Velocidad de crecimiento de la longitud del alambre será la Derivada de la longitud respecto de la Temperatura.

7-31 Un obrero levanta un peso: W mediante una polea, situada a altura: $H = 30$ m jalando una cuerda de longitud: $L = 60$ m ; Si el obrero se aleja a 4 m/seg ; ¿A que velocidad sube el peso en el instante en que el obrero se encuentra a: $x = 20$ m de la base de la polea?



Por el Problema y gráfica se cumple:

$$H^2 + x^2 = u^2$$

$$h + u = 60 \quad \Rightarrow \quad H^2 + x^2 = (60 - h)^2$$

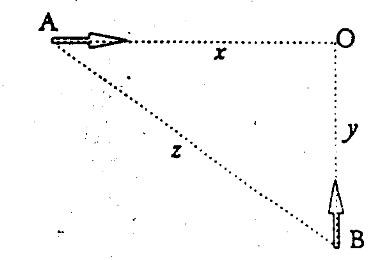
Cuando: $x = 20$
Siendo: $H = 30$ $\Rightarrow$ $h = 60 - u$, $\quad h = 60 - \sqrt{H^2 + x^2} = 23.94$

La velocidad del obrero es: $dx/dt = 4$ m/seg

La velocidad a la que sube el peso es: dh/dt ; Derivando la anterior ecuación respecto de: t

$$\text{Si: } H^2 + x^2 = (60 - h)^2 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} = 2(60 - h)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-x\dfrac{dx}{dt}}{60 - h} = -2.21\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

7-32 Un barco A se encuentra a una distancia de 15 km al Este de un punto O, moviéndose hacia el Oeste con: $V_A = 20$ Km/h ; Otro barco B se encuentra a 60 Km al sud de O, moviéndose hacia el Norte a 15 Km/h . Determinar si los barcos se acercan o alejan al cabo de una hora y a que velocidad.



Por el Problema y gráfica las trayectorias son:

$$x = 15 - v_A t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -v_A = -20 \text{ Km/h}$$

$$y = 60 - v_B t \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -v_B = -15 \text{ Km/h}$$

Si: $t = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -5 \ , \ y = 45$

La Longitud entre A, B es:

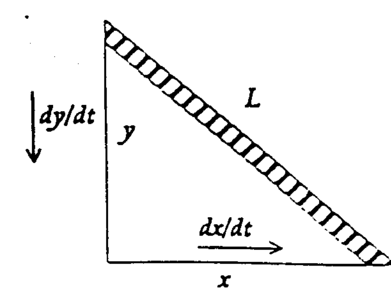
$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{(-5)^2 + 45^2} = 45.27$$

La velocidad de separación: dz/dt se obtendrá derivando la anterior ecuación, respecto de: t

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt}}{z} = -12.7\ \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

Al reemplazar datos obtenidos, se observa que la velocidad de separación es negativa, por tanto los barcos se aproximan.

7-33 Una escalera de longitud: $L = 15$ m se desliza en su extremo superior sobre una pared vertical, alejándose de la misma su extremo inferior a 2 m/seg ¿A que velocidad está bajando su extremo superior en el instante en que su extremo inferior está a 5 m de la pared?



Por la gráfica (L constante; x, y variables)

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

$$y = \sqrt{L^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}}\frac{dx}{dt}$$

$$\text{Si } \begin{matrix} L = 15 \text{ m} \\ x = 5 \text{ m} \end{matrix} \quad \frac{dx}{dt} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{seg}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -0.707\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

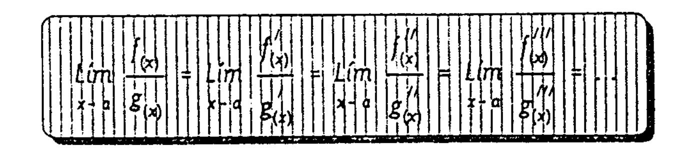
VII-4 REGLA DE L'HOPITAL

La Regla de L'Hopital, es un nuevo recurso, para calcular Límites que presenten Indeterminaciones, esta regla hace uso de las Derivadas.

La Regla de L'Hopital (Llamada también Regla de L'Hopital - Bernouilli), expresa que si se presentan Indeterminaciones de las Formas:

$$\lim_{x \to a} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \begin{cases} \dfrac{0}{0} \\ \dfrac{\infty}{\infty} \end{cases}$$

Entonces se cumple:



$$\lim_{x \to a} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{f'_{(x)}}{g'_{(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{f''_{(x)}}{g''_{(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{f'''_{(x)}}{g'''_{(x)}} = \ldots$$

Por tanto, para calcular un Límite, se usa tanto la Derivada del numerador como denominador (No se usa la Regla del Cociente); Si persiste la Indeterminación, se vuelve a derivar hasta obtener el resultado del Límite.

La demostración de esta Regla, parte del supuesto de la Derivabilidad de las Funciones f, g en un Intervalo: $0 < |x - a| < \delta$; se trabaja alrededor del valor de a ; debe cumplirse además que: $g \neq 0$

Si: $\lim_{x \to a} f_{(x)} = 0$; $\lim_{x \to a} g_{(x)} = 0$ Se verifica la Primera Indeterminación, entonces

$$\frac{f'_{(x_0)}}{g'_{(x_0)}} = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{g_{(b)} - g_{(a)}} = \frac{f_{(x)} - 0}{g_{(x)} - 0} = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'_{(x)}}{g'_{(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$$

Por el Tercer Teorema del Valor Medio (Teorema de Cauchy VI-10) se tiene la igualdad de cocientes:

Tomando: $b = x$, $f_{(a)} = 0$, $g_{(a)} = 0$

Si: $a < x_0 < x$, x_0 está comprendido en el Intervalo indicado.

Al aplicar el Límite cuando: x tiende hacia: a entonces: x_0 también tiende hacia: a

Ej 7-5 Se resuelve un Límite por la Regla de L'Hopital

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} = \frac{3^2 - 7 \cdot 3 + 12}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

La Indeterminación que se presenta, permite el uso de la Regla de L'Hopital.

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2x - 7}{2x}$$

Derivando tanto el numerador como denominador.

$$= \frac{2 \cdot 3 - 7}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{6}$$

Reemplazando en esta expresión se logra el resultado del Límite.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x - 4)}{(x + 3)(x - 3)}$$

El mismo Límite se puede resolver por reglas antes indicadas (Ver P-5-21-b)

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 4)}{(x + 3)} = \frac{(3 - 4)}{(3 + 3)} = -\frac{1}{6}$$

Factorizando y simplificando se obtiene el mismo resultado.

7-34 Usando la Regla de L'Hopital, calcular el Límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{2 \cdot \infty + 3}{\infty - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

La Indeterminación que se presenta, permite el uso de la Regla de L'Hopital.

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1} = \lim_{x \to \infty} 2 = 2$$

Derivando numerador y denominador. Simplificando, queda el Límite de una constante, que será igual a la misma constante.

7-35 Aplicando la Regla de L'Hopital, resolver los siguientes Límites:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+6}{x^2-3x+2} = \frac{2^2+2+6}{2^2-3\cdot 2+2}$

La Indeterminación: 0/0, que se presenta, permite el uso de la Regla de L'Hopital

$= \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{2x-3}$

Derivando tanto el numerador como denominador (No usando la Regla del Cociente)

$= \frac{2\cdot 2+1}{2\cdot 2-3} = 5$

Reemplazando (Ver P-5-19-a)

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^2-2x+1} = \frac{1^3-5\cdot 1^2+7\cdot 1-3}{1^2-2\cdot 1+1} = \frac{0}{0}$

Por la Regla de L'Hopital

$= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-10x+7}{2x-2} = \frac{3\cdot 1^2-10\cdot 1+7}{2\cdot 1-2} = \frac{0}{0}$

Derivando tanto el numerador como denominador. Al reemplazar prosigue la Indeterminación.

$= \lim_{x\to 1} \frac{6x-10}{2} = \frac{6\cdot 1-10}{2} = -2$

Vuelve a aplicarse L'Hopital, derivando al numerador y denominador. Reemplazando.

c) $\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a} = \frac{a^a-a^a}{a-a} = \frac{0}{0}$

Aplicando L'Hopital

$= \lim_{x\to a} \frac{a^x Ln\,a - ax^{a-1}}{1}$

$= a^a Ln\,a - a\cdot a^{a-1} = a^a(Ln\,a - 1)$

Se deriva por Reglas conocidas tanto el numerador como denominador.

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$

La Indeterminación permite el uso de la Regla de L'Hopital

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to\infty} e^x = e^\infty = \infty$

Derivando y reemplazando

e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^{2x}-1} = \frac{e^0-1}{e^{2\cdot 0}-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

La Indeterminación permite L'Hopital

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2}$

Derivando por Reglas conocidas tanto el numerador como denominador

Simplificando el Cociente y reemplazando.

f) $\lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x}{x} = \frac{Sen\,0}{0} = \frac{0}{0}$

La Indeterminación permite el uso de la Regla de L'Hopital

$= \lim_{x\to 0} \frac{Cos\,x}{1} = Cos\,0 = 1$

Derivando el numerador y denominador. Reemplazando (Ver Teorema T5-10, Cap V)

g) $\lim_{x\to 0} \frac{x\,Cos\,x - Sen\,x}{x^3} = \frac{0\cdot Cos\,0 - Sen\,0}{0^3} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{Cos\,x - x\,Sen\,x - Cos\,x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\,Sen\,x}{3x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-Sen\,x}{3x} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-Cos\,x}{3} = \frac{-Cos\,0}{3} = -\frac{1}{3}$

Por la Regla de L'Hopital se derivan tanto numerador como denominador. Simplificando términos del numerador.

Al reemplazar sigue la Indeterminación, por tanto se debe aplicar nuevamente la Regla.

7-36 Aplicando la Regla de L'Hopital, resolver los siguientes Límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+1}{2x^3-1} = \frac{6\infty^3+1}{2\infty^3-1} = \frac{\infty}{\infty}$

Indeterminación de la forma: ∞/∞, donde es aplicable en forma directa la Regla de L'Hopital.

$= \lim_{x\to\infty} \frac{18x^2}{6x^2}$

Derivando tanto el numerador como denominador (Separadamente, no como cociente)

$= \lim_{x\to\infty} 3 = 3$

Simplificando y reemplazando (El Límite de una conste es la misma constante)

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x+1}{7x^3+1} = \frac{4\infty^2+5\cdot\infty+1}{7\infty^3+1} = \frac{\infty}{\infty}$

Indeterminación de la forma: ∞/∞

Derivando el numerador y denominador

$= \lim_{x\to\infty} \frac{8x+5}{21x^2} = \frac{8\cdot\infty+5}{21\cdot\infty^2} = \frac{\infty}{\infty}$

Al reemplazar se observa que persiste la Indeterminación de la forma: ∞/∞

$= \lim_{x\to\infty} \frac{8}{42x} = \frac{8}{42\cdot\infty} = \frac{8}{\infty} = 0$

Entonces volviendo a aplicar la Regla, derivando y reemplazando.

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+x^2+1}{x^3+7x} = \frac{2\infty^4+\infty^2+1}{\infty^3+7\infty} = \frac{\infty}{\infty}$

Indeterminación de la forma: ∞/∞

$= \lim_{x\to\infty} \frac{8x^3+2x}{3x^2+7} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la Regla de L'Hopital, persiste la Indeterminación, reemplazando persiste aún la Indeterminación.

$= \lim_{x\to\infty} \frac{24x^2+2}{6x} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicando otra vez la Regla, aún persiste la Indeterminación, usando otra vez la Regla.

$= \lim_{x\to\infty} \frac{48x}{6} = \frac{48\cdot\infty}{6} = \frac{\infty}{6} = \infty$

Simplificando y reemplazando.

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$

Indeterminación de la forma: ∞/∞

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

Aplicando la Regla de L'Hopital (Derivando tanto el numerador como denominador)

$= \frac{1}{\infty} = 0$

Simplificando y reemplazando.

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = \frac{e^\infty}{\infty^{100}} = \frac{\infty}{\infty}$

Indeterminación de la forma: ∞/∞

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{100x^{99}} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la Regla de L'Hopital (Derivando tanto el numerador como denominador)

Sin embargo persiste la Indeterminación.

$= \ldots\ldots$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{c}$

Es indudable que persistirá la Indeterminación luego de muchísimas aplicaciones de la Regla de L'Hopital. Pero es claro que la expresión del denominador por ser potencial, disminuirá de grado hasta convertirse en una constante c.

$= \frac{e^\infty}{c} = \frac{\infty}{c} = \infty$

Reemplazando se obtiene el resultado.

La Regla de L'Hopital se aplica en forma directa a las Indeterminaciones de la Forma: 0/0, ∞/∞ ; Sin embargo

puede ampliarse su uso a otras Indeterminaciones, si éstas se llevan a las Formas de 0/0 o ∞/∞

Las Reglas de Transformación de Indeterminación en cada caso, son las siguientes:

INDETERMINACIONES DE LA FORMA: 0·∞

Para convertir la Indeterminación de la Forma 0·∞, a las Formas 0/0 ∞/∞, se procede del siguiente modo:

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} \cdot g_{(x)} = 0 \cdot \infty \Rightarrow \lim_{x \to a} f_{(x)} \cdot g_{(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_{(x)}}{\frac{1}{g_{(x)}}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \quad ; \quad \lim_{x \to a} f_{(x)} \cdot g_{(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g_{(x)}}{\frac{1}{f_{(x)}}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Ej 7-6 $\lim_{x \to 0} (x \ Ln \ x) = 0 \cdot Ln \ 0 = 0(-\infty) = -0 \cdot \infty$

Indeterminación de la forma 0·∞, para aplicar L'Hopital se transforma a otra Indeterminación.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{Ln \ x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Reordenando el Límite dado, de acuerdo a la Regla anterior, al reemplazar la Indeterminación que ahora se presenta es de: ∞/∞

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

Aplicando L'Hopital, derivando tanto el numerador como denominador.

7-37 Resolver por L'Hopital el siguiente Límite:

$$\lim_{x \to 0} x e^{1/x} = 0 e^{1/0} = 0 e^{\infty} = 0 \cdot \infty$$

Indeterminación, transformándola (Llevando un factor a dividir al denominador)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Reordenando, se obtiene la Indeterminación de ∞/∞

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{1/x} = e^{1/0} = e^{\infty} = \infty$$

Aplicando L'Hopital, simplificando y reemplazando.

INDETERMINACIONES DE LA FORMA ∞ - ∞

Para convertir la Indeterminación ∞ - ∞ a la Forma 0/0 se procede como:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f_{(x)}} - \frac{1}{g_{(x)}} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f_{(x)}} - \frac{1}{g_{(x)}} \right) = \lim_{x \to a} \frac{g_{(x)} - f_{(x)}}{f_{(x)} \cdot g_{(x)}} = \frac{0 - 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Ej 7-7 Aplicando L'Hopital, se resuelve el Límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{Sen \ x} = \frac{1}{0} - \frac{1}{Sen \ 0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

Indeterminación, transformándola

$$= \lim_{x \to 0} \frac{Sen \ x - x}{x \ Sen \ x} = \frac{0}{0}$$

Sumando las Fracciones, la Indeterminación que ahora se presenta es 0/0

$$= \lim_{x \to 0} \frac{Cos \ x - 1}{Sen \ x + x \ Cos \ x} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-Sen \ x}{Cos \ x + Cos \ x - x \ Sen \ x} = \frac{-0}{2} = 0$$

Como persiste la misma Indeterminación se vuelve a aplicar la Regla.

INDETERMINACIONES DE LA FORMA: 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0

Para las Indeterminaciones de las Formas: 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0 es conveniente aplicar la Identidad:

$$e^{\ln f_{(x)}} = f_{(x)}$$

Luego mediante manipulaciones algebraicas y usando las Propiedades de los Logaritmos, es posible transformar Indeterminaciones, llevándolas a la Forma: 0/0 ; ∞/∞ ; donde si es posible aplicar la Regla de L'Hopital.

7-38 Aplicando la Identidad indicada y L'Hopital, resolver los Límites:

a) $\lim_{x\to 0} (1 - x^2)^{1/x} = (1 - 0^2)^{1/0} = 1^\infty$ — Indeterminación

$= \lim_{x\to 0} e^{\ln(1-x^2)^{1/x}}$ — Recurriendo a la Identidad, recomendada para este tipo de Indeterminaciones.

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-x^2)}{x}} = e^{\frac{0}{0}}$ — Por Propiedad de Logaritmos se ordena el Exponente. Reemplazando, la Indeterminación que se presenta en el Exponente es de la Forma: 0/0

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{1}{1-x^2}(-2x)}{1}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-2x}{1-x^2}}$ — Aplicando la Regla de L'Hopital (Solo en el Exponente) se deriva su numerador como denominador.

$= e^{\frac{-2\cdot 0}{1-0^2}} = e^0 = 1$ — Reordenando el Exponente. Simplificando y reemplazando.

b) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = (\cos 0)^{1/0} = 1^\infty$ — Indeterminación

$= \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{1/x}}$ — Aplicando la Identidad y Propiedades de Logaritmos.

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}} = e^{\frac{0}{0}}$ — En el Exponente queda la Indeterminación: 0/0, se puede ya usar L'Hopital.

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{Sen} x)}{1}} = \lim_{x\to 0} e^{-\operatorname{Tan} x}$ — Derivando y simplificando

$= e^{-\operatorname{Tan} 0} = e^0 = 1$

c) $\lim_{x\to 0} x^x = 0^0$ — Indeterminación de la Forma: 0^0

$= \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} = e^{0(-\infty)}$ — Usando la Identidad, y empleando una Propiedad de Logaritmos al reemplazar queda una Indeterminación de la Forma: $0\cdot\infty$, que no permite el uso de L'Hopital.

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{-\infty}{\infty}}$ — Reordenando nuevamente el exponente y reemplazando, se obtiene la Indeterminación de la Forma: ∞/∞

Aplicando la Regla de L'Hopital en el exponente (Donde se encuentra la Indeterminación)

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{-x}$ — Simplificando el exponente.

$= e^{-0} = 1$ — Reemplazando, se obtiene el resultado final del Límite.

Note que las Indeterminaciones pueden cambiar de forma de acuerdo a modificaciones algebraicas. De esa manera se puede llevar a otras Indeterminaciones que si permiten el uso de la Regla de L'Hopital.

7-39 Aplicando la Regla de L'Hopital, resolver los siguientes Límites:

a)

$$\lim_{x\to 0}(e^x-1)^x = (e^0-1)^0 = 0^0$$

Indeterminación que no permite el uso directo de la Regla de L'Hopital

$$= \lim_{x\to 0} e^{\ln (e^x-1)^x}$$

Aplicando la Identidad

$$= \lim_{x\to 0} e^{x\ln(e^x-1)} = e^{0\cdot(-\infty)}$$

Por una Propiedad de Logaritmos, tras reemplazar se obtiene otra Indeterminación, que todavía no permite el uso de L'Hopital.

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(e^x-1)}{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Reordenando el exponente, se obtiene una forma de Indeterminación que si permite el uso de la Regla de L'Hopital.

Aplicando L'Hopital en el exponente

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{1}{e^x-1}e^x}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-x^2e^x}{e^x-1}} = e^{\frac{0}{0}}$$

Al reemplazar persiste la Indeterminación, ahora en la forma 0/0, una forma que también permite el uso de la Regla de L'Hopital.

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-2xe^x-x^2e^x}{e^x}}$$

Aplicando nuevamente la Regla.

$$= e^{\frac{-0-0}{e^0}} = e^{\frac{0}{1}} = 1$$

Reemplazando se obtiene el resultado del Límite

b)

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0$$

Indeterminación de la forma: ∞^0, forma que no permite el uso directo de la Regla de L'Hopital.

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{1/x}}$$

Aplicando la Identidad

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Por Propiedad de Logaritmos en el Exponente

Se obtiene una Forma de indeterminación que si permite el uso de L'Hopital

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

Derivando tanto el numerador como el denominador

Simplificando el exponente.

$$= e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

Reemplazando y reemplazando se obtiene el resultado del Límite.

c)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\text{Sen } x} = \left(\frac{1}{0}\right)^{\text{Sen } 0} = \infty^0$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\text{Sen } x}} = \lim_{x\to 0} e^{\text{Sen } x \ln\frac{1}{x}} = e^{0\cdot\infty}$$

Aplicando la Identidad y propiedades de los Logaritmos.

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\text{Sen } x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln 1-\ln x}{\text{Csc } x}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Luego de reordenar, se aplica varias veces la Regla de L'Hopital

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{x}}{-\text{Csc } x\,\text{Cot } x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\text{Sen}^2 x}{x\,\text{Cos } x}} = e^{\frac{0}{0}}$$

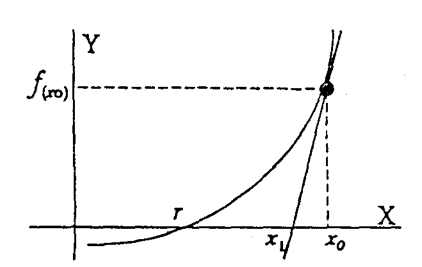
Esta Regla puede reiterarse tantas veces como sea necesario, hasta levantar la Indeterminación, siempre y cuando las Indeterminaciones sean de las formas: 0/0, ∞/∞

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2\,\text{Sen } x\,\text{Cos } x}{\text{Cos } x - x\,\text{Sen } x}} = e^{\frac{0}{1-0}} = e^0 = 1$$

VII-5 ECUACIONES POR NEWTON RAPHSON

La resolución de Ecuaciones por el Método de Newton-Raphson, consiste en la ubicación de las raíces de la Ecuación en forma aproximada, usando para ello los conceptos de Derivada.

El Teorema del Valor Intermedio dice: Si $f_{(x)}$ es Continua en $a < x < b$ donde $f_{(a)} \cdot f_{(b)}$ poseen signos diferentes, entonces existe al menos un valor r tal que: $f_{(r)} = 0$

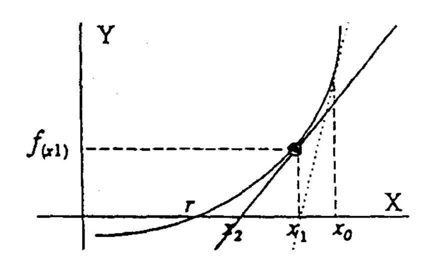


Suponiendo que se busca la raíz (O solución) de: $f_{(x)} = 0$; donde $f_{(x)}$ es derivable con: $f' \neq 0$

Una raíz de: $f_{(x)} = 0$; es una Intersección de $f_{(x)}$ con el Eje de abscisas.

Entonces por la gráfica adjunta y por la Interpretación Geométrica de la Derivada:

$$f'_{(x_0)} = \frac{f_{(x_0)} - f_{(x_1)}}{x_0 - x_1} = \frac{f_{(x_0)} - 0}{x_0 - x_1} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f_{(x_0)}}{f'_{(x_0)}}$$



Luego de trazar la Recta Tangente a la curva de: $f_{(x)}$ por el punto $(x_0, f_{(x_0)})$: se observa que esta Recta intersecta al Eje de abscisas en x_1

Trazando luego otra Recta Tangente a la curva esta vez en el punto: $(x_1, f_{(x_1)})$: se obtendrá la Ecuación (1) y luego se generaliza en la Ecuación (2)

$$x_2 = x_1 - \frac{f_{(x_1)}}{f'_{(x_1)}} \quad (1) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}} \quad (2)$$

Por tanto, una vez elegido: x_0 se obtendrá: x_1 mediante la relación anterior. Luego a partir de x_1 se calculará: x_2 y así sucesivamente, hasta llegar a la raíz (r) (Se sabe que se llegó a r cuando el valor a reemplazar determina el mismo resultado)

Ej 7-8 Resolver: $x^3 + 3x - 5 = 0$

Si: $f_{(x)} = x^3 + 3x - 5 = 0$; Graficando $f_{(x)}$

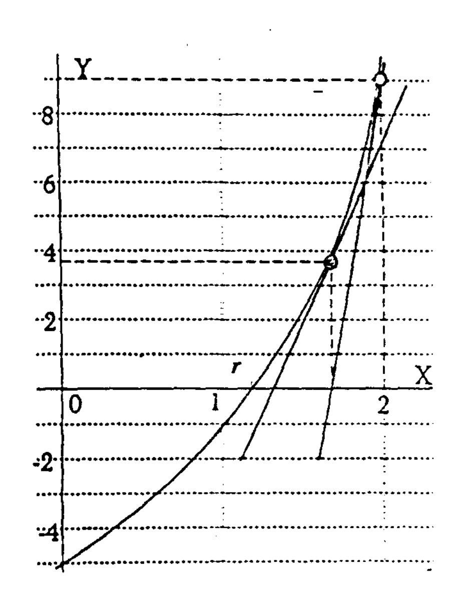
Reemplazando en la Ecuación de Newton - Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n - 5}{3x_n^2 + 3}$$

Eligiendo como primer valor: $x_0 = 2$

x_n	x_{n+1}
2	1.4
1.4	1.181081081
1.181081081	1.154525889
1.154525889	1.154171557
1.154171557	1.154171495
1.154171495	1.154171495

A partir de: $x = 2$ usando la relación se halla 1.4; con este valor se calcula el siguiente y así sucesivamente.



Al reemplazar: 1.154171495 se obtiene el mismo valor: 1.154171495 ; por tanto esta es la solución de la Ecuación. Si bien se eligió: $x = 2$ para iniciar el cálculo, se podía tomar cualquier otro número, llegandose al mismo resultado.

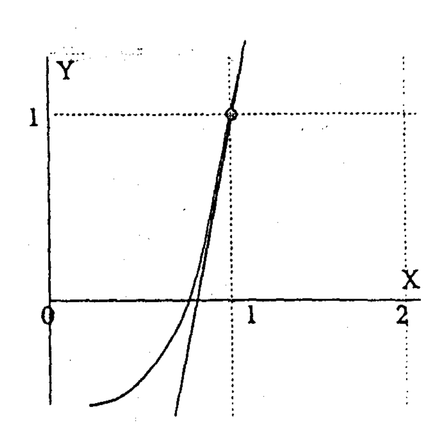
Un Teorema que asegura la determinación de una raíz, por el método de Newton-Raphson dice:

Si $f_{(x)}$ posee Segunda Derivada Continua en el Intervalo: $a \le x \le b$, tal que: $f_{(a)}$. $f_{(b)}$ poseen signos diferentes, donde: $f'_{(x)} \neq 0$, se cumple en todo el Intervalo, entonces:

i) Si el signo de $f''_{(x)}$ es el mismo del de $f_{(a)}$; $x_1 = a - \dfrac{f_{(a)}}{f'_{(a)}}$ entonces se cumple: $a < x_1 < r$

ii) Si el signo de $f''_{(x)}$ es opuesto al de $f_{(a)}$; $x_1 = b - \dfrac{f_{(b)}}{f'_{(b)}}$ entonces se cumple: $r < x_1 < b$

Ej 7-9 Resolviendo: $x^5 + 2x^3 - 2 = 0$



Si: $f_{(x)} = x^5 + 2x^3 - 2 = 0$; $a = 0$; $b = 1$

En: $0 \le x \le 1$; $f_{(a)} = -2$; $f_{(b)} = 1$

Los signos de: $f_{(a)}$; $f_{(b)}$ son diferentes

Derivando: $f'_{(x)} = 5x^4 + 6x^2$

$f''_{(x)} = 20x^3 + 12x > 0$ — Desigualdad que se cumple en el Intervalo.

En el Intervalo $f_{(a)}$. $f''_{(x)}$ poseen diferentes signos, por tanto:

$$x_1 = b - \frac{f_{(b)}}{f'_{(b)}} = 1 - \frac{f_{(1)}}{f'_{(1)}} = 1 - \frac{1}{11} = 0.909090$$

Por tanto: $r < x_1 < b$; $r < 0.909090 < 1$

Esto significa que la raíz (r) es menor, que el primer valor calculado (0.909090) lo que se verifica en la Tabla adjunta, al resolver por Newton-Raphson.

x_n	x_{n+1}
1	0.909090909
0.909090909	0.894336348
0.894336348	0.893987465
0.893987465	0.893987274
0.893987274	0.893987274

7-40 Resolver por Newton-Raphson: $x^2 - e^x = 0$; iniciar cálculos con: 3 ; 0 ; 2

Para verificar la fácil convergencia o acercamiento al resultado, se inician los cálculos con 3 valores diferentes

Si: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}}$ usando 7 decimales

x_n	x_{n+1}
-3	-1.5205739
-1.5205739	-0.8783256
-0.8783256	-0.7144413
-0.7144413	-0.7035148
-0.7035148	-0.7034674
-0.7034674	-0.7034674

x_n	x_{n+1}
0	-1
-1	-0.7330436
-0.7330436	-0.7038078
-0.7038.78	-0.7034675
-0.7034675	-0.7034674
-0.7034674	-0.7034674

x_n	x_{n+1}
2	1
1	-1.3922112
-1.3922112	-0.8350875
-0.8350875	-0.7098341
-0.7098341	-0.7034674
-0.7034674	-0.7034674

7-41 Resolver por Newton-Raphson: $x - Cos\, x = 0$

Por: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - Cos\, x_n}{1 + Sen\, x_n}$$

Iniciando con $x_0 = 0$; 9 decimales.

Se emplean Radianes en los cálculos.

x_n	x_{n+1}
0	1
1	0.750363867
0.750363867	0.73911289
0.73911289	0.739085133
0.739085133	0.739085133

VII-6 APLICACIONES EN ECONOMÍA

Las Derivadas en sus diversas presentaciones (Interpretación Geométrica, Razón de Cambio, Variación Instantánea, etc.) son un excelente instrumento en ECONOMÍA, para la optimización de resultados, para la toma de decisiones, etc.

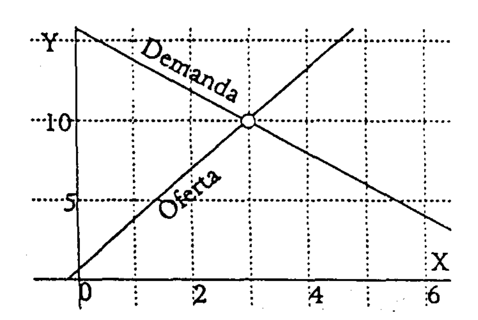
FUNCIONES DE OFERTA Y DEMANDA

Si: x es el Número de unidades de un bien, siendo: y el Precio de cada unidad, entonces las Funciones de Oferta y Demanda pueden representarse por: $y = f_{(x)}$

Donde en la práctica: x se toma siempre como Positivo.

Si: $f' > 0$ La Función es de Oferta Si: $f' < 0$ La Función es de Demanda

El Punto de Intersección de las Funciones de Oferta y Demanda se llama Punto de Equilibrio.



Ej 7-10 Si: $y = 16 - 2x$

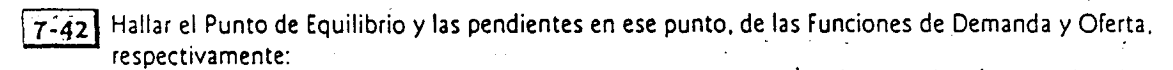
$\Rightarrow y' = -2 < 0 \Rightarrow$ La Función es de Demanda

Si: $y = 3x + 1$

$\Rightarrow y' = 3 > 0 \Rightarrow$ La Función es de Oferta

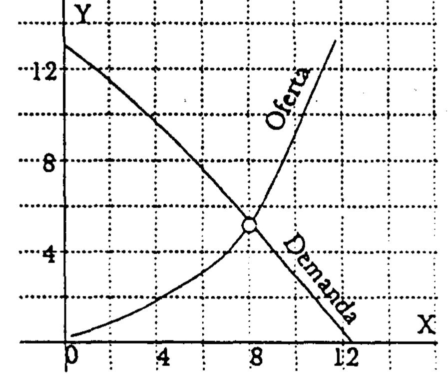
El Punto de Equilibrio (Resolviendo el Sistema) es:

$$\begin{aligned} y &= 16 - 2x \\ y &= 3x + 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 10 \end{aligned}$$



7-42 Hallar el Punto de Equilibrio y las pendientes en ese punto, de las Funciones de Demanda y Oferta, respectivamente:

$$y = \frac{208 - 8x - x^2}{16} \ ; \ y = \frac{1 + x^2}{13}$$



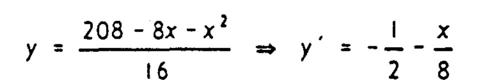
El Punto de Equilibrio (Resolviendo el Sistema de Ecuaciones)

$$\begin{aligned} y &= \frac{208 - 8x - x^2}{16} \\ y &= \frac{1 + x^2}{13} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x = 8 \ ; \ y = 5 \\ &x = -11.5 \ ; \ y = 10.4 \end{aligned}$$

Se toma la 1^{era} Solución como Punto de Equilibrio, ya que se debe operar solo con números positivos.



La pendiente de la Demanda en: $P(8,5)$ es:



$$y = \frac{208 - 8x - x^2}{16} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} - \frac{x}{8}$$

Reemplazando: $x = 8 \Rightarrow y'_{(8)} = -\frac{3}{2} < 0$

La pendiente de la Oferta en: $P(8,5)$

$$y = \frac{1 + x^2}{13} \Rightarrow y' = \frac{2x}{13}$$

Reemplazando: $x = 8 \Rightarrow y'_{(8)} = \frac{16}{13} > 0$

Por la Interpretación Geométrica de la Derivada: Una Derivada es una pendiente, es una Razón o Relación de Cambio Instantánea.

Por tanto el anterior cálculo de las Funciones de Oferta y Demanda, representa las Variaciones Instantáneas de los Precios Unitarios (y) respecto al Número de unidades (x); exactamente cuando que x toma el valor de 3

Tomando el Valor Absoluto de las pendientes (-3/2; 16/13) se concluye que mayor es la variación de la Demanda

La Variación de una Cantidad, respecto de otra puede ser descrita mediante un Concepto Promedio o Concepto Marginal.

El Concepto Promedio, es la Variación de una Primera cantidad, respecto a un Intervalo limitado de una Segunda cantidad. El Concepto Marginal es la variación de una Primera cantidad respecto a un Intervalo tendiente a cero, de una Segunda cantidad, es decir se trata de una Variación Instantánea.

Comúnmente la Primera cantidad es de un concepto de Economía (Costo, Ingreso, etc.) La Segunda cantidad es el Número de unidades.

COSTOS

Si el Número de Unidades de un bien es x ; Entonces el Costo Total, puede expresarse como: $y = C_{(x)}$

A partir de este Costo Total, pueden definirse los siguientes conceptos:

COSTO PROMEDIO $$C_p = \frac{C_{(x)}}{x} = \bar{y}$$

COSTO MARGINAL $$C_m = C'_{(x)} = \frac{dy}{dx}$$

COSTO PROMEDIO MARGINAL $$C_{pm} = \frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{x\,C'_{(x)} - C_{(x)}}{x^2} = \frac{d}{dx}C_p$$

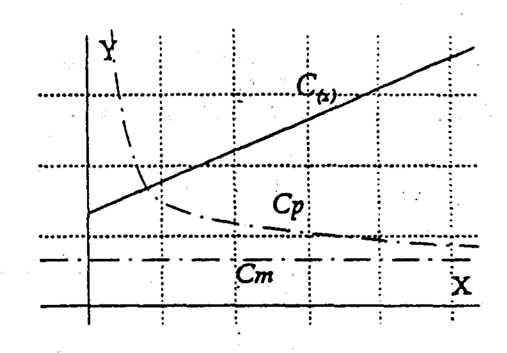
Ej 7-11 La Función de Costo es Lineal: $C_{(x)} = ax + b$ donde a, b son constantes:

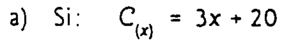
Costo Promedio: $C_p = \frac{C_{(x)}}{x} = \frac{ax+b}{x} = a + \frac{b}{x}$

Costo Marginal: $C_m = C'_{(x)} = a$

Costo Prom. Marginal: $C_{pm} = \frac{d}{dx}C_p = -\frac{b}{x^2}$

En la gráfica se muestran a $C_{(x)}$, C_p ; C_m



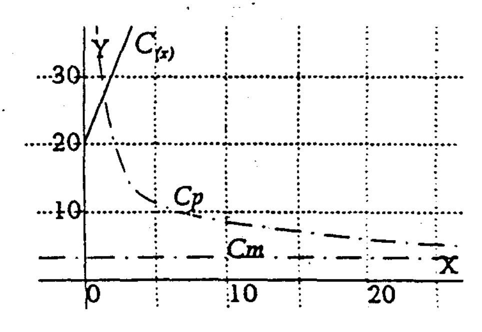

7-43 Analizar las Funciones de Costo Total a) $C_{(x)} = 3x + 20$; b) $C_{(x)} = x^2 + 2x + 5$

a) Si: $C_{(x)} = 3x + 20$

C. Promedio $C_p = \frac{C_{(x)}}{x} = \frac{3x+20}{x} = 3 + \frac{20}{x}$

C. Marginal $C_m = C'_{(x)} = 3$

C. Prom. Marginal $C_{pm} = \frac{d}{dx}C_p = -\frac{20}{x^2}$

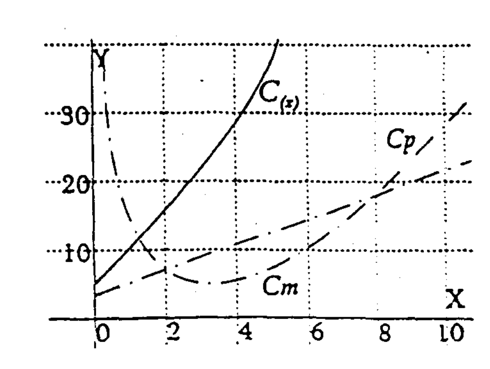


b) Si: $C_{(x)} = x^2 + 2x + 5$

C. Promedio $C_p = \frac{C_{(x)}}{x} = \frac{x^2+2x+5}{x} = x + 2 + \frac{5}{x}$

C. Marginal $C_m = C'_{(x)} = 2x + 2$

C. Prom. Marginal $C_{pm} = \frac{d}{dx}C_p = 1 - \frac{5}{x^2}$



INGRESOS

Si el Número de unidades de un bien es x ; siendo la Función de Demanda: $y = f_{(x)}$ donde y es Precio de la unidad demandada, entonces el Ingreso es:

$$R_{(x)} = xy = x f_{(x)}$$

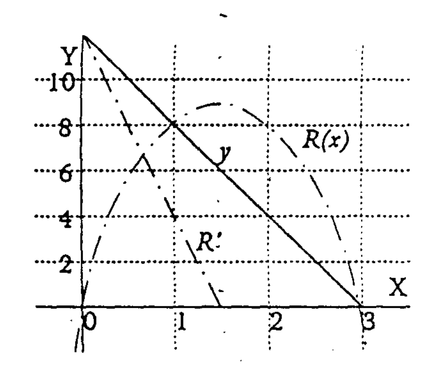
A partir de esta Expresión de Ingreso Total, se definen los siguientes conceptos:

INGRESO PROMEDIO $\qquad R_p = \dfrac{R_{(x)}}{x}$

INGRESO MARGINAL $\qquad R_m = R'_{(x)}$

Note que la expresión de Ingreso Promedio, carece de importancia, ya que es equivalente a la Demanda del bien.


Ej 7-12 Una Función de Demanda es: $y = 12 - 4x$

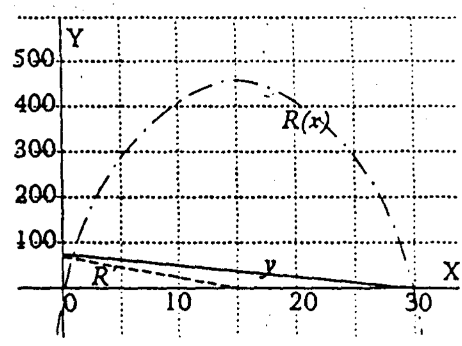


El Ingreso: $R_{(x)} = xy = x(12 - 4x) = 12x - 4x^2$

El Ingreso Marginal: $R'_{(x)} = 12 - 8x$

Comúnmente se procura maximizar el Ingreso Total, para ello es suficiente con recurrir a las técnicas de Máximos y Mínimos conocidos (Derivar e igualar a cero)

7-44 Hallar el Ingreso Marginal y el Máximo del Ingreso que se obtiene de un bien, cuya Función de Demanda es: $y = 60 - 2x$



La Demanda: $\quad y = 60 - 2x$

El Ingreso Total: $\quad R_{(x)} = xy = x(60 - 2x)$

El Ingreso Marginal: $\quad R'_{(x)} = 60 - 4x$

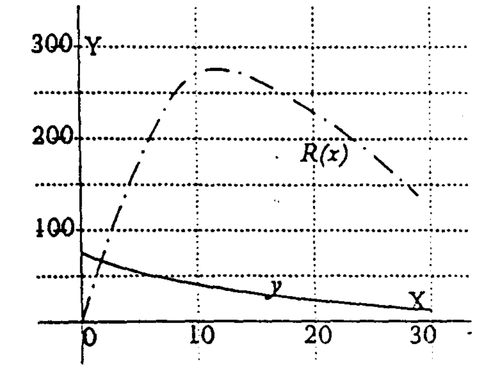
Maximizando la Ecuación de Ingreso Total

Si: $R_{(x)} = 60x - 2x^2$

$R'_{(x)} = 60 - 4x = 0 \Rightarrow x = 15$

$R_{Máx} = 60 \cdot 15 - 2 \cdot 15^2 = 450$

7-45 Si la Demanda de un bien es: $y = 60\, e^{-x/12}$ Hallar el Ingreso Marginal y el Ingreso Máximo.



La Demanda $\quad y = 60\, e^{-x/12}$

El Ingreso $\quad R_{(x)} = xy = x\, 60\, e^{-x/12}$

El Ingreso Marginal $\quad R'_{(x)} = 60\, e^{-x/12} - 5x e^{-x/12}$

Maximizando la Ecuación de Ingreso Total

Si $R_{(x)} = 60\, x\, e^{-x/12}$

$R'_{(x)} = 60\, e^{-x/12} - 5x e^{-x/12} = 0 \Rightarrow x = 12$

$R_{Máx} = 264.87$

En este y en el anterior Problema, se asume que el Punto Crítico (Hallado por la Derivada igualada a cero) determina efectivamente un Máximo. (La verificación puede hacerse usando la Segunda Derivada)

GANANCIAS

Si: x es el Número de unidades, siendo $R_{(x)}$ el Ingreso Total, $C_{(x)}$ el Costo Total, la Ganancia entonces es:

$$G_{(x)} = R_{(x)} - C_{(x)}$$

Para maximizar la Ganancia de acuerdo a técnicas conocidas, se debe derivar e igualar a cero, esto significa:

Entonces para obtener el Máximo de la Ganancia, el Ingreso Marginal, debe ser igual al Costo Marginal.

$$G'_{(x)} = R'_{(x)} - C'_{(x)} = 0$$
$$\Rightarrow \quad R'_{(x)} = C'_{(x)}$$

Ej 7-13 Un bien posee el Costo Total $C_{(x)} = 20 + 14x$, Demanda de: $y = 90 - 2x$ su Ganancia Máxima se obtendrá con las siguientes consideraciones:

$C_{(x)} = 20 + 14x$ — El Costo Total

$y = 90 - 2x$ — La Demanda

$R_{(x)} = xy = x(90 - 2x)$ — El Ingreso Total

$G_{(x)} = R_{(x)} - C_{(x)}$ — La Ganancia

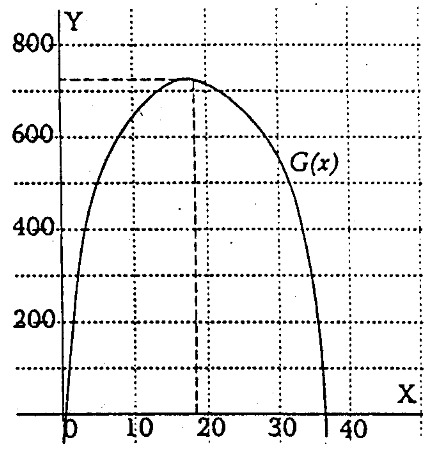
$= x(90 - 2x) - (20 + 14x)$

$= -2x^2 + 76x - 20$ — Maximizando.

$G'_{(x)} = -4x + 76 = 0 \Rightarrow x = 19$

$G_{Máx} = -2\cdot 19^2 + 76\cdot 19 - 20 = 702$

Se asume que las Unidades de Ingreso, Costo, Ganancia son Unidades monetarias iguales.



7-46 Un bien posee un Costo Total constante $C = 26$; Demanda $y = 42e^{-x/6}$ Hallar su Ganancia Máxima.

$C_{(x)} = 26$ — El Costo Total

$y = 42\,e^{-x/6}$ — La Demanda

$R_{(x)} = xy = x(42\,e^{-x/6})$ — El Ingreso Total

$G_{(x)} = R_{(x)} - C_{(x)}$

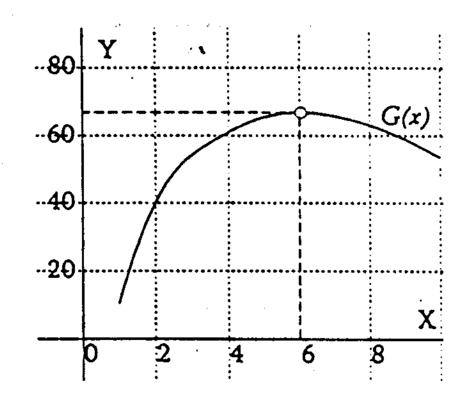
$= 42xe^{-x/6} - 26$ — La Ganancia, reemplazando y simplificando. Maximizando.

$G'_{(x)} = 42\,e^{-x/6} - 7xe^{-x/6} = 0$

$\Rightarrow \quad x = 6$

$G_{Máx} = 42\cdot 6\cdot e^{-6/6} - 26 = 66.7$

Se toman unidades monetarias iguales para cada concepto.



Hasta el momento se ha operado con Funciones ya conocidas de Demanda, Costo, etc. Sin embargo en la práctica, es preciso obtener tales Funciones a partir de las situaciones reales que se presentan, y de acuerdo a las definiciones pertinentes.

Para la obtención de algunas Funciones, se ordenan datos, se usan variables auxiliares, que luego seran eliminadas, siguiendo modos parecidos a la determinación de Funciones y sus Máximos y Mínimos, visto anteriormente. (Ver Cap. VII-2)

Ej 7-14 Un vendedor de autos, recibe mensualmente 18 movilidades para venderlas a 2400 $ c/u. Sin embargo observando la Demanda, el vendedor nota que por cada auto que no pone en venta, sus clientes están dispuestos a pagarle 200 $ más. ¿Cuantos autos deberán venderse para un Máximo Ingreso?

Reordenando datos, para mejor interpretación:

Nº Total de autos: 18		Precio original de un auto:	2400 $
Nº autos en venta: x		Incremento por un auto no en venta:	200 $
Nº autos no en venta: u		Incremento por u autos no en venta:	200 u $
$\Rightarrow x + u = 18$		Ingreso por venta de 1 auto:	$(2400 + 200u)$ $
		Ingreso por venta de x autos:	$R = x(2400 + 200u)$ $

Reemplazando: $u = 18 - x$ en la Ecuación de Ingreso

$R = x[2400 + 200(18 - x)]$

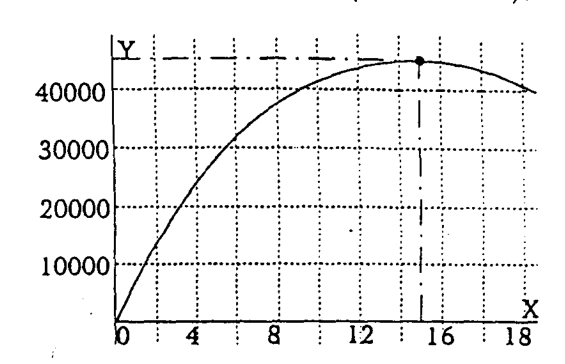
$= -200x^2 + 6000x$

$R' = -400x + 6000 = 0 \Rightarrow x = 15$

Para Máximo Ingreso deben venderse 15 autos

$R_{Máx} = -200 \cdot 15^2 + 6000 \cdot 15 = 45000$ $

La gráfica adjunta muestra la variación de: R



7-47 Un Propietario de 40 Departamentos (Dep.) puede alquilarlos a 100 $ c/u; sin embargo observa que puede incrementar en 5 $ el alquiler, por cada vez que alquila un Dep. menos. ¿Cuantos Dep. debe alquilar para un Ingreso Máximo?

Reordenando los datos:

Nº Total Dep: 40	Alquiler original de 1 Dep	100 $
Nº Dep alquilados: x	Incremento por 1 Dep no alquilado:	5 $
Nº Dep no alquilados: u	Incremento por u Dep no alquilados:	$5u$ $
$\Rightarrow x + u = 40$	Ingreso por alquiler de 1 Dep:	$(100 + 5u)$ $
	Ingreso por alquiler de x Dep:	$R = x(100 + 5u)$ $

Reemplazando: $u = 40 - x$ en la Ecuación de Ingreso

$R = x[100 + 5(40 - x)]$

$= -5x^2 + 300x$

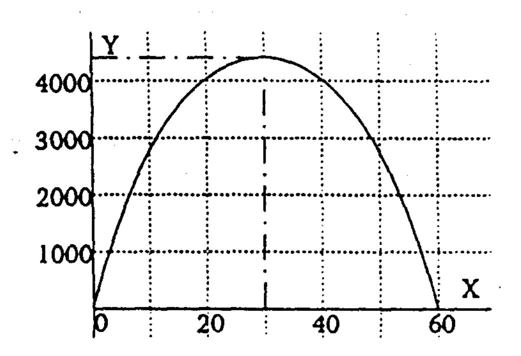
$R' = -10x + 300 = 0 \Rightarrow x = 30$

$R_{Máx} = -5 \cdot 30^2 + 300 \cdot 30 = 4500$ $

Note que no se alquilan 10 Dep (u = 10)

El alquiler de un Departamento es:

$100 + 5u = 100 + 5 \cdot 10 = 150$ $



7-48 Un Campo petrolero contiene 26 pozos, c/u de ellos produce 100 barriles diarios. La experiencia demuestra que la perforación de pozos adicionales en el mismo campo, tiene por resultado la reducción de 2 barriles (b) diarios por cada pozo adicional. ¿Hallar el Nº de pozos que maximiza la producción?

Reordenando los datos:

Nº inicial de pozos: 26	Producción original de un pozo:	100 b
Nº final de pozos: x	Descenso de Producción por un pozo:	2 b
Incremento de pozos: u	Descenso de Producción por u pozos:	$2u$ b
$\Rightarrow x = 26 + u$	Producción final de un pozo:	$100 - 2u$ b
	Producción final de x pozos:	$P = x(100 - 2u)$ b

Reemplazando: $u = x - 26$ en la Ecuación de Producción final

$P = x[100 - 2(x - 26)]$

$= -2x^2 + 152x$

$P' = -4x + 152 = 0 \Rightarrow x = 38$

$P_{Max} = -2 \cdot 38^2 + 152 \cdot 38 = 2888$ barriles

Por tanto para maximizar la Producción, deben perforarse 12 pozos adicionales (u = 12). Cada pozo produce: $100 - 2u = 76$ barriles diarios

7-49 Un comerciante mensualmente recibe 1000 Latas de leche, las cuales debería venderlas a 4.8 \$ c/u. Sin embargo observa que por cada vez que oculta 100 Latas, sus clientes están dispuestos a pagarle 1 \$ mas por c/Lata, en la creencia de que hay escasez. Hallar el Máximo Ingreso del comerciante

Reordenando los datos:

N° total de Latas: 1000
N° Latas en venta: x
N° Latas ocultadas: u
$\Rightarrow x + u = 1000$

Precio original de 1 Lata de leche:	4.8 \$
Incremento por c/100 Latas ocultadas	1 \$
Incremento por c/Lata ocultada	0.01 \$
Incremento por u/Latas ocultadas	0.01u \$
Ingreso por 1 Lata	$4.8 + 0.01u$
Ingreso por x Latas	$x(4.8 + 0.01u)$

Reemplazando (u) y ordenando, la Ecuación de Ingreso es:

$$R = x[4.8 + 0.01(1000-x)] = -0.01x^2 + 14.8x \Rightarrow R' = -0.02x + 14.8 = 0 \Rightarrow x = 740; \quad R_{Máx} = -0.01 \cdot 740^2 + 14.8 \cdot 740 = 5476 \ \$$$

Se ocultan: $u = 260$ Latas. El precio de c/Lata es: $4.8 + 0.01u = 7.4$ \$

7-50 Una mueblería vende mesas a 1200 \$ c/u, ofreciendo una rebaja de 10 \$ por cada mesa por encima de 80 que pueda vender, la rebaja afecta a todas las mesas vendidas. Hallar el Máximo Ingreso bajo este plan de Ventas.

Reordenando los datos:

N° de mesas a vender: x
N° mesas encima de 80: u
$\Rightarrow x = 80 + u$

Precio original de 1 mesa:	1200 \$
Rebaja por 1 mesa encima de 80:	10 \$
Rebaja por u mesas encima de 80:	10u \$
Precio final de 1 mesa	$1200 - 10u$
Precio final de x mesas:	$P = x(1200 - 10u)$

Reemplazando (u) y ordenando, la Ecuación de Precio final es:

$$P = x[1200 - 10(x-80)] = -10x^2 + 2000x \Rightarrow P' = -20x + 2000 = 0 \Rightarrow x = 100; \quad P_{Máx} = -10 \cdot 100^2 + 2000 \cdot 100 = 100000 \$$$

Se venden 100 mesas, 20 por encima de 80, el precio de c/mesa es 1000 \$

7-51 Una entidad bancaria, cobra una Tarifa de 20 \$, por cada 1000 \$ de transacción comercial que efectúa, ofreciendo una rebaja de 0.1 \$ por cada 1000 \$ por encima del monto de 100000 \$. Hallar su Máximo Ingreso si:

a) La rebaja afecta al monto total de la transacción
b) La rebaja afecta únicamente al monto por encima de 100000 \$

Reordenando los datos:

N° miles \$ de transac. total: x
N° miles \$ encima de 100 mil: u
$\Rightarrow x = u + 100$

Tarifa original por mil \$:	20 \$
Rebaja por mil \$ encima de 100 mil:	0.1 \$
Rebaja por u miles encima de 100 mil:	0.1u \$
Tarifa con rebaja:	$T = 20 - 0.1u$

a) Si la rebaja afecta al total de la transacción (x en miles de \$), reemplazando u en la expresión de Tarifa (T)

$$T = x(20 - 0.1u) = x[20 - 0.1(x-100)] = -0.1x^2 + 30x \Rightarrow T' = -0.2x + 30 = 0 \Rightarrow x = 150; \quad T_{Máx} = -0.1 \cdot 150^2 + 30 \cdot 150 = 2250 \text{ miles} = 2\,250\,000 \ \$$$

b) Si la rebaja afecta únicamente al monto encima de 100 miles de \$ (u en miles) El Ingreso provendrá del monto con Tarifa Fija, mas el monto con rebaja

$$T = 100 \cdot 20 + u(20 - 0.1u) = 2000 + (x-100)[20 - 0.1(x-100)] = -0.1x^2 + 40x - 1000 \Rightarrow T' = -0.2x + 40 = 0 \Rightarrow x = 200; \quad T_{Máx} = -0.1 \cdot 200^2 + 40 \cdot 200 - 1000 = 3000 \text{ miles} = 3\,000\,000 \ \$$$



Si: $y = f_{(x)}$: entonces se definen: $dx = \Delta x$ Diferencial de x

$dy = f'_{(x)}\,dx$ Diferencial de y

El Diferencial de la Variable Independiente x es su mismo Incremento Δx ; El Diferencial de la Variable Dependiente y no es su Incremento, depende de: Δx. El Diferencial: dy se llama también Parte Principal del Incremento: Δy

Ej 7-15 Para apreciar la diferencia entre Diferencial, Incremento en y se calculan ambos conceptos:

$$f_{(x)} = x^2 + 3x$$
$$y = x^2 + 3x$$
$$dy = f'_{(x)}\,dx$$
$$dy = (2x + 3)dx \quad \text{(Diferencial)}$$

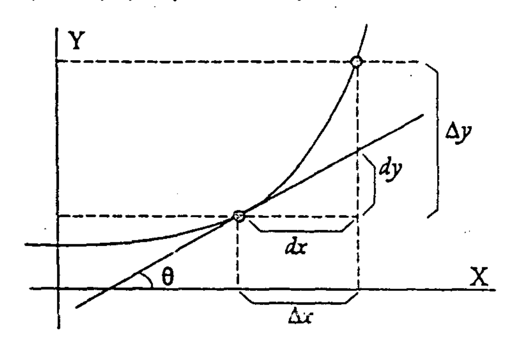
$$y = x^2 + 3x$$
$$\Delta y = f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}$$
$$\Delta y = [(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)] - [x^2 + 3x]$$
$$\Delta y = (2x + 3)\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$\Delta y = (2x + 3)dx + (dx)^2 \quad \text{(Incremento)}$$

Geométricamente los Diferenciales pueden representarse como catetos de un Triángulo rectángulo.

Geométricamente el Incremento: Δy contiene al Diferencial: dy (Parte principal), más otra longitud.

Se observa también que:

$$m = Tan\,\theta = \frac{dy}{dx} = f'_{(x)}$$



PROPIEDADES DE LOS DIFERENCIALES

Los Diferenciales de la Funciones, de acuerdo a las definiciones previas (En términos de Derivadas), presentan las siguientes propiedades:

T6-1) $d(u \pm v) = du \pm dv$

T6-2) $d(c) = 0$

T6-3) $d(cu) = c\,du$

T6-4) $d(uv) = v\,du + u\,dv$

T6-5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

Si u, v son Funciones; c es una constante.

Las propiedades de los Diferenciales, son extensiones de las propiedades de las Derivadas.

Las demostraciones de estas propiedades, se las efectúa de acuerdo a la definición de Diferencial y propiedades de las Derivadas.

En la práctica, para calcular un Diferencial, se aplica directamente: $dy = f'_{(x)}\,dx$

Ej 7-16 $y = 3x^2 + 7x - 4$

$dy = f'_{(x)}\,dx = (6x + 7)\,dx$

Para calcular un Diferencial (dy) se deriva la Función, para luego multiplicarla por el Diferencial dx

7-52 Hallar los Diferenciales de las siguientes Funciones:

$y = 4x^3 + 7x + 12 \Rightarrow dy = (12x^2 + 7)dx$ — Derivando por Reglas conocidas

$y = x^2 Sen\,x \Rightarrow dy = (2x\,Sen\,x + x^2 Cos\,x)dx$ — Por la Regla del Producto

$y = \dfrac{x^2 + 1}{x^4 + 1} \Rightarrow dy = \dfrac{2x(x^4 + 1) - (x^2 + 1)4x^3}{(x^4 + 1)^2}\,dx$ — Por la Regla del Cociente

$y = Ln(x^2 - 6x + 5) \Rightarrow dy = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}(2x - 6)\,dx$ — Por la Regla de la Cadena.

APROXIMACIONES POR DIFERENCIALES

Para obtener cálculos aproximados, mediante Diferenciales, se usa la relación:


$$f_{(x+\Delta x)} \approx f_{(x)} + f'_{(x)} \Delta x$$

La relación puede demostrarse a partir de la definición de Incrementos y Diferenciales:

$\Delta y = f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}$	Definición de Incremento
$dy = f'_{(x)}\, dx = f'_{(x)}\, \Delta x$	Definición de Diferenciales, nótese que: $dx = \Delta x$
$dy \approx \Delta y$	Tomando la aproximación
$dy \approx f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}$	Reemplazando: $\Delta y \approx dy$
$f'_{(x)}\, dx \approx f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}$	Reemplazando: $dy = f'_{(x)}\, dx$
$f_{(x+\Delta x)} \approx f_{(x)} + f'_{(x)}\, \Delta x$	Despejando: $f_{(x+\Delta x)}$

La aproximación será mayor, mientras mas pequeña sea Δx en relación a: x

Ej 7-17 Se calcula aproximadamente por Diferenciales: $\sqrt{67}$

$\sqrt{67}$	Cálculo aproximado a efectuar
$\sqrt{67} = \sqrt{64+3} = \sqrt{8^2+3}$ $x = 64 \quad : \quad \Delta x = 3$	Descomponiendo 67; entre una potencia al cuadrado, mas un incremento (Buscando un incremento pequeño)
$f_{(x)} = \sqrt{x} \Rightarrow f'_{(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	La Función con su Derivada.
$f_{(x+\Delta x)} \approx f_{(x)} + f'_{(x)}\, \Delta x$	Fórmula de aproximación mediante Diferenciales
$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x$	Reemplazando (Fórmula para aproximar Raíces cuadradas)
$\sqrt{64+3} \approx \sqrt{64} + \dfrac{1}{2\sqrt{64}} 3$	Reemplazando: $x = 64$; $\Delta x = 3$ Efectuando las operaciones indicadas
$\sqrt{67} \approx 8 + 0.1875 = 8.1875$	Queda así realizada la aproximación.

7-53 Calcular aproximadamente por Diferenciales: $\sqrt[5]{241}$

$\sqrt[5]{241}$	Cálculo a efectuar por Diferenciales
$\sqrt[5]{241} = \sqrt[5]{243-2} = \sqrt[5]{3^5-2}$ $x = 243 \quad : \quad \Delta x = -2$	Eligiendo una potencia de 5 mas un Incremento (Se elige aquella de menor Incremento)
$f_{(x)} = \sqrt[5]{x} \quad : \quad f'_{(x)} = \dfrac{1}{5(\sqrt[5]{x})^4}$	Función a partir de la cual se calcula su Derivada.
$f_{(x+\Delta x)} \approx f_{(x)} + f'_{(x)}\, \Delta x$	Fórmula de aproximación
$\sqrt[5]{x+\Delta x} \approx \sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{5(\sqrt[5]{x})^4} \Delta x$	Reemplazando la Función (Fórmula General, para el cálculo aproximado de raíces quintas)
$\sqrt[5]{243-2} \approx \sqrt[5]{243} + \dfrac{1}{5(\sqrt[5]{243})^4}(-2)$	Reemplazando
$\sqrt[5]{241} \approx 3 - 0.0049 = 2.9951$	El resultado exacto, por calculadora es de 2.9950, por tanto lo obtenido es una buena aproximación

7-54 Efectuar los cálculos aproximados indicados, mediante Diferenciales:

a) $Sen\ 61°$

$Sen(61°) = Sen(60+1)° = Sen(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180})$ — Calculo a efectuar por Diferenciales aproximadamente. Necesariamente se deben expresar los Ángulos en Radianes

$x = \frac{\pi}{3}$; $\Delta x = \frac{\pi}{180}$

$f_{(x)} = Sen\ x \Rightarrow f'_{(x)} = Cos\ x$ — Función y su Derivada

$f_{(x+\Delta x)} \approx f_{(x)} + f'_{(x)} \Delta x$ — Fórmula de aproximación, reemplazando en ésta la Función y su Derivada.

$Sen(x + \Delta x) \approx Sen\ x + Cos\ x\ \Delta x$ — Usando valores conocidos: $Sen(\pi/3) = 0.866$; $Cos(\pi/3) = 0.5$

$Sen(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}) \approx Sen\frac{\pi}{3} + Cos\frac{\pi}{3}\frac{\pi}{180}$

$\approx 0.8660 + 0.0087 = 0.8747$

El valor exacto, obtenido por otros medios es: 0.8746 como se aprecia la exactitud es significativa.

b) $e^{\cdot}$

$e^{0.1} = e^{0+0.1}$ — Calculo a efectuar (Exponencial de un número pequeño)

$x = 0$; $\Delta x = 0.1$ — Eligiendo x ; Δx

$f_{(x)} = e^x \Rightarrow f'_{(x)} = e^x$ — Función a emplear y su correspondiente Derivada

$f_{(x+\Delta x)} \approx f_{(x)} + f'_{(x)}\Delta x$ — Fórmula de aproximación

$e^{x+\Delta x} = e^x + e^x\ \Delta x$ — Reemplazando la Función y su Derivada

$e^{0+0.1} \approx e^0 + e^0\ 0.1$ — Reemplazando los valores de x ; Δx

$\approx 1 + 0.1 = 1.1$

El resultado exacto del cálculo requerido, obtenido por otros medios es de: 1.10

7-55 Determinar aproximadamente el Volumen Total y la Variación Porcentual de una Esfera de Radio: r, si este se incrementa en un 10 %

$V_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$ — Volumen de una Esfera en términos de la variable: r (Radio)

$\Delta r = \frac{10}{100} r = 0.1\ r$ — Si la variación porcentual del Radio es de 10 %, el valor de: Δr es de $0.1r$

$f_{(x+\Delta x)} \approx f_{(x)} + f'_{(x)}\ \Delta x$ — Fórmula de aproximación, adaptando al caso de que la función sea el Volumen de una Esfera.

$V_{(r+\Delta r)} \approx V_{(r)} + V'_{(r)}\ \Delta r$ — Reemplazando la expresión de V y su Derivada respecto de la variable: r

$\approx \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 \Delta r$ — Reemplazando: $\Delta r = 0.1r$ se obtendrán aproximadamente el Volumen incrementado de la Esfera

$\approx \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2(0.1r)$

$\approx \frac{5.2}{3}\pi r^3 = 1.73\ \pi r^3$ — Volumen incrementado

$\Delta V \approx V'_{(r)}\ \Delta r = 0.4\ \pi r^3$ — Incremento aproximado del Volumen

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0.4\ \pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 0.3$ — Efectuando la división, para obtener la razón del incremento. Multiplicando por 100 se obtiene el porcentaje.

$\frac{\Delta V}{V} 100 = 30\%$

Los valores exactos, obtenidos por otros medios son de: Volumen incrementado: $1.77\pi r^3$, Incremento de Volumen: $0.44\ \pi r^3$; Variacion Porcentual: 33 %

7-56 Se desea aproximar: $\sqrt[3]{x+1}$ por $\sqrt[3]{x}$ con una precisión de: 10^{-2} ; Hallar el Intervalo de Números Reales, en que esta precisión es posible.

$\Delta y < 10^{-2}$

Si la precisión debe ser de 10^{-2}, entonces el Incremento de la Función debe ser menor.

$f_{(x)} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'_{(x)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Tomando la Función y su Derivada

$x = x \;\; ; \;\; \Delta x = dx = 1$

Operando sobre: x, con su Incremento

Expresión del Diferencial ($\Delta x = dx$)

$\Delta y = f'_{(x)}\, dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, 1 < 10^{-2}$

Reemplazando, resolviendo la Inecuación, el Intervalo requerido es: $192.45 < x < \infty$

$x > 192.45$

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Si: $y = f_{(x)}$; posee Segunda Derivada en x, entonces: $d(dy) = d^2y = f''_{(x)}\, dx$

Generalizando para un enésimo orden de Diferencial: $d(d^{n-1}y) = d^ny = f^n_{(x)}\, dx^n$

Ej 7-18

$y = x^3 - 5x^2 + 1$

$dy = (3x^2 - 10x)dx$

$d^2y = (6x - 10)dx^2$

$d^3y = (6)dx^3$

$d^4y = 0$

$y = e^x + Sen\ x$

$dy = (e^x + Cos\ x)dx$

$d^2y = (e^x - Sen\ x)dx^2$

$d^3y = (e^x - Cos\ x)dx^3$

$d^4y = (e^x + Sen\ x)dx^4$

Las Funciones poseen Segunda Derivada, por tanto existe su Diferencial de Segundo Orden y así generalizando.

Derivando sucesivamente, se obtienen los Diferenciales de Orden *n*

7-57 Hallar el Diferencial $d^{35}y$; en la Función: $y = e^{2x-1}$

$y = e^{2x-1}$

Función dada

$dy = e^{2x-1}\, 2\, dx \qquad = e^{2x-1}\, 2^1\, dx$

$d^2y = e^{2x-1}\, 2\cdot 2\, dx^2 \qquad = e^{2x-1}\, 2^2\, dx^2$

$d^3y = e^{2x-1}\, 2\cdot 2\cdot 2\, dx^3 \qquad = e^{2x-1}\, 2^3\, dx^3$

Para el Orden del Diferencial a calcular, es conveniente deducir una Fórmula para el Diferencial Enésimo (Tal como en las Derivadas)

Deduciendo y luego reemplazando: $n = 35$

....

$d^ny = e^{2x-1}\, 2\cdot 2\cdot \ldots dx^n = e^{2x-1}\, 2^n\, dx^n$

$d^{35}y = e^{2x-1}\, 2^{35}\, dx^{35}$

7-58 Hallar directamente el Diferencial de las Funciones Implícitas siguientes:

$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x\, dx + 2y\, dy = 0$

$y^3 + x^2 + y = 1 \quad \Rightarrow \quad 3y^2\, dy + 2x\, dx + dy = 0$

$e^x + e^y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x\, dx + e^y\, dy = 0$

$Sen\ x + Cos\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad Cos\ x\, dx - Sen\ y\, dy = 0$

$2^{x^2 + y^2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2^{x^2+y^2}\, Ln\ 2\ (2x\, dx + 2y\, dy) = 0$

Los Diferenciales de Funciones Implícitas, se obtienen derivando implí-citamente.

Luego de derivar respecto de cierta variable, se multiplica por su Diferencial correspondiente.

VII.- PROBLEMAS PROPUESTOS

7-1 Hallar dos Números (x,u) de Producto (P) Máximo, sabiendo que la Suma del primero mas el doble del segundo es de: 12 — $(6,3)$; $P = 18$

7-2 Hallar dos Números (x,u) de Producto 54, de manera tal que la Suma (S) sea Mínima. — $(8,8)$; $S = 16$

7-3 Hallar dos Números (x,u) de Suma 20; de manera que la Suma de sus Cuadrados (S) sea Mínima. — $(10,10)$; $S = 200$

7-4 Hallar el Área (A) Máxima del Rectángulo inscrito en un Triángulo equilátero de lado: 4 — $A = 2\sqrt{3}$

7-5 Hallar las dimensiones (Radio r, Altura h) del Cilindro de Volumen Máximo, que posee una Superficie S (Constante) — $r = \sqrt{S/6\pi}$; $h = 2\sqrt{S/6\pi}$; $V = \sqrt{S^3/54\pi}$

7-6 Hallar las dimensiones (Radio: r, Altura: h) del Cilindro de Volumen Máximo, a inscribirse en un Cono de Radio basal $R = 9$; Altura $H = 12$ — $r = 6$; $h = 4$

7-7 Hallar las dimensiones (Radio r, Altura h) del Cilindro de Área Lateral Máxima, que se puede inscribir en una esfera de Radio $R = 8$ — $h = 8\sqrt{2}$; $r = 4\sqrt{2}$; $A = 128\pi$

7-8 El material de tapas y fondos de envases cilíndricos, cuesta el doble que el de los lados. Hallar la razón de Altura a Radio (h, r); para un costo de producción Mínimo, si su Volumen es fijo. — $h/r = 4$

7-9 Un granjero debe cercar un terreno rectangular, uno de sus lados ya está cubierto por unos cerros, dispone para ello de 500 m de Malla olímpica, Hallar el Área (A) Máxima que se puede cercar. — $A = 31250\text{m}^2$

7-10 Hallar el Área (A) Máxima del Rectángulo que puede inscribirse entre: $y = 4 - x^2$ con el Eje de abscisas. — $A = 32\sqrt{3}/9$

7-11 Hallar el Área (A) Máxima del Rectángulo a inscribirse entre: $y = e^{-x^2}$ con el Eje de abscisas. — $A = \sqrt{2/e}$

7-12 Hallar la Mínima Distancia (d) del Origen a la Parábola: $y = \sqrt{x+1}$ — $d = \sqrt{3}/2$

7-13 Hallar la Mínima Distancia (d) entre $P(1,2)$ a la Recta: $3x + 4y = 5$ — $d = 6/5$

7-14 Hallar el punto (x,y) de la Parábola $y = 2x^2$; más cercano al punto $P(9,0)$ — $(1,2)$; $d = \sqrt{70}$

7-15 Hallar la Mínima Distancia (d) entre la Parábola: $y = \sqrt{6x}$ al punto: $(3,2)$ — $d = 1.76$

7-16 Hallar el punto de: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que tenga Máxima Distancia al Vértice: $(0,-b)$ — $(a^2\sqrt{a^2 - 2b^2}/(a^2 - b^2), b^3/(a^2 - b^2))$

7-17 En el Triángulo de Área Mínima entre los Ejes coordenados del 1er Cuadrante y una Tangente a la Elipse anterior. Hallar el punto (x,y) de tangencia — $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$; $A = ab$

7-18 Hallar las dimensiones (a,a,b) del Triángulo Isósceles de Área Máxima, que puede inscribirse en una Semicircunferencia de Radio R; si el Vértice opuesto al lado: b debe estar en el centro de la base. — $a = R$; $b = \sqrt{2}R$; $A = R^2/2$

7-19 Inscribir en una Semiesfera de radio R un Paralelepípedo de base cuadrada, de manera que su Volumen (V) sea Máximo. — $4\sqrt{3}R^3/9$

7-20 En un rio de ancho A se construye en ángulo recto un canal ancho B; cual es la longitud Máxima de barcos, para que puedan doblar. — $(A^{2/3} + B^{2/3})^{3/2}$

7-21 Un móvil se desplaza horizontalmente de acuerdo a $x_{(t)} = 5t^2 + 6t - 1$; hallar su Velocidad instantánea en: $t = 3$ seg (x en m) 36 m/seg

7-22 El espacio recorrido por un automóvil, sobre trayectoria recta, se da por $x_{(t)} = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. Hallar el intervalo de tiempo en el cual la movilidad marcha en sentido contrario al original. $3 < t < 8$

7-23 El ángulo θ (Radianes) recorrido por un móvil es: $\theta_{(t)} = 128t - 12t^2$, hallar su Velocidad y Aceleración al cabo de 3 seg. 56 Rad/seg ; -24 Rad/seg²

7-24 Un cohete se desplaza verticalmente de acuerdo a $y = 24t - 2t^2$; hallar el instante (t en seg) en el cuál inicia su retorno. 6 seg

7-25 Un gas escapa de un globo esférico, a razón de 20 cm³/seg, hallar la velocidad de disminución de su radio, en el instante $r = 6$ cm 0.044 cm/seg

7-26 Un líquido penetra a un tanque cilíndrico a razón de: 80 cm³/seg, hallar la velocidad de subida del nivel, el radio del tanque es 50 cm. 0.01 cm/seg

7-27 Un globo se eleva verticalmente, desde un punto A de la tierra a velocidad de 25 cm/seg. Un observador sobre la tierra situado a distancia de 60 m, ocupa el punto B. Hallar la velocidad a la cuál se aleja el globo del punto B, cuando su altura llega a 80 m. 20 m/seg

7-28 Al inflar un balón esférico, su Volumen aumenta a razón de 2π cm³/seg A que velocidad se incrementa su Área, cuando el radio es de 2 cm. 2π cm²/seg

7-29 Un muchacho lanza un cometa a una altura de 150 m, sabiendo que el cometa se aleja del muchacho (Manteniendo su altura) a velocidad de 20 m/seg Hallar la velocidad a la que se suelta el hilo, cuando el cometa se halla a una Distancia total de 250 m del muchacho. 16 m/seg

7-30 Una escalera de longitud 20 m se apoya contra una pared, hallar la velocidad a que baja el extremo superior, cuando la escalera resbala, desplazándose el extremo inferior a 2 m/seg en el instante en que este extremo se encuentra a 12 m de la pared. 1.5 m/seg

7-31 Un hombre de 1.8 m de estatura se aleja a 3.9 m/seg de un farol de 4.5 m de alto, a que velocidad la punta de su sombra está alejándose de la base del farol. 6.5 m/seg

7-32 Si cae arena sobre superficie plana a 3 m³/min, se forma un montículo cónico cuyo Diámetro en la base es igual al triple de la altura, a que velocidad crece la altura cuando ésta es de 4 m 0.026 m/min

7-33 Un depósito en forma de cono invertido, recibe agua a 600 cm³/seg, su Altura es 80 cm, Radio 15 cm. El depósito tiene una fuga, hallar la velocidad a la que escapa el agua, cuando el nivel es de 50 cm, subiendo a 2 cm/seg. 47.77 cm³/seg

7-34 Dos barcos parten del mismo punto, el Primero sale a las 9 a.m. navegando directamente al Este, a Velocidad de 10 Km/h; El Segundo sale a las 10 a.m. navegando con un rumbo de: N 30° E : a velocidad de 15 Km/h. Hallar la velocidad a que a mediodía estarán separándose los barcos. 12.5 Km/h

7-35 Un tren sale de una estación a cierta hora, viajando directamente al N a 60 Km/h. Otro tren sale de la misma estación una hora después viajando al Este a 40 Km/h. Hallar la velocidad a la que se están separando los trenes, 3 horas después de la partida del segundo tren. 71.55 Km/h

7-36 Una piscina tiene 100 m de largo, 30 m de ancho y 12 m de profundidad en un extremo, 2 m en el otro. Si se echa agua a la piscina a razón de 500 m³/min A que velocidad sube el nivel, cuando este se encuentra a 6 m. 0 28 m/min

7-37 Cuando se infla un globo de hule de forma esférica, tanto su Volumen como su Superficie se incrementan, determinar: a) ¿Es idéntica la velocidad del crecimiento del Volumen y Superficie?
b) ¿Cual la razón de variaciones con el tiempo de Superficie al Volumen? No. 2/r

7-38 Aplicando la Regla de L'Hopital Bernoulli, resolver los Límites:

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1}$	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$	$6;\ \dfrac{5}{3};\ 2$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^4 - 1}{x}$	$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{x + 2}}{x - 2}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + 3x)^2 - (1 + 2x)^3}{x^2}$	$4;\ \dfrac{3}{4};\ 3$
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + 5x + 1}{3x^2 + 2x - 1}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^2 + 1}{x^3 - 6x}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 8x + 12}{x^2 + 4x + 4}$	$2;\ 0;\ \infty$
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5e^x - 3e^{-x} - 2}{x}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6^x - 1}{2^x - 1}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{xe^{x/2}}{x + e^x}$	$\infty;\ \infty;\ 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^x - x^a}{x - a}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/x} - e}{x}$	$\dfrac{1}{a};\ a^a Ln\, a;\ \dfrac{-e}{2}$
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1 + Ln\, x}{e^x - e}$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{Ln\, x - Ln\, a}{x - a}$	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\, Ln\, x}{x^2 - 1}$	$\dfrac{3}{e};\ \dfrac{1}{a};\ 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Sen\, 6x}{2x}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - Cos\, 4x}{1 - Cos\, 2x}$	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{Sen\, \pi x}{1 - x^2}$	$3;\ 4;\ \dfrac{\pi}{2}$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - Cos\, x^2}{x^2 Sen\, x^2}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Tan\, x - Sen\, x}{x - Sen\, x}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - Arctan\, x}{x - Sen\, x}$	$\dfrac{1}{2};\ 3;\ 2$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - Sen\, x - 1}{1 - Cos\, 2x}$	$\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{Ln(Sen\, x)}{1 - Sen\, x}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^x - x}{Sen^2 2x}$	$\dfrac{1}{4};\ -1;\ \dfrac{1}{4}$

7-39 Por L'Hopital hallar los Límites (Transformar las Indeterminaciones)

$\lim\limits_{x \to 0} x^5 (1 + \dfrac{1}{Sen\, x})^5$	$\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$	$\lim\limits_{x \to 1} Ln\, x\ Ln(1 - x)$	$1;\ 0;\ 0$
$\lim\limits_{x \to 1} (1 - x^2) Tan \dfrac{\pi x}{2}$	$\lim\limits_{x \to 0} xe^{1/x}$	$\lim\limits_{x \to 0} Sen\, x\ Ln\, x$	$4/\pi;\ \infty;\ 0$
$\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1})$	$\lim\limits_{x \to \infty} (x - Ln\, x)$	$\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - x)$	$1/2;\ \infty;\ \infty$
$\lim\limits_{x \to \pi/2} (Sen\, x)^{Tan\, x}$	$\lim\limits_{x \to 1} x^{1/(x-1)}$	$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{Ln\, x}$	$1;\ e;\ 1$
$\lim\limits_{x \to \infty} (x + 2^x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x \to \infty} (Ln\, x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x})^{Tan\, x}$	$2;\ 1;\ 1$
$\lim\limits_{x \to \pi/2} (\pi - 2x)^{Cos\, x}$	$\lim\limits_{x \to 0} (Sen\, x)^x$	$\lim\limits_{x \to 1} (Ln\, x)^{x-1}$	$1;\ 1;\ 1$
$\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{Sen\, x}{x})^{1/x^2}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$	$\lim\limits_{x \to 0} (1 - Cos\, x)^{Ln\, x}$	$e^{-1/6};\ 0;\ \infty$

7-40 Por Newton-Raphson, resolver las siguientes Ecuaciones, usar una precisión de 8 decimales.

$2x^3 + x - 4 = 0$	$x^5 + x - 1 = 0$	1.12817390 ; 0.75487767
$x^2 - 2^x = 0$	$e^x + 6x = 0$	2, 4, -0.76666469 ; -0.14427495
$x + Ln\, x - 2 = 0$	$Ln(x+1) + x^2 - 4 = 0$	1.55714560 ; 1.73073123
$e^{-x^2} - x = 0$	$e^{-x^2} - Sen\, x = 0$	0.65291864 ; 0.68059817
$x^x - 5 = 0$	$Sen\, x + x - 1 = 0$	2.12937308 ; 0.51097343

7-41 Hallar el Punto de Equilibrio entre las siguientes Ecuaciones de Demanda y Oferta respectivamente (x es el Número de unidades, y es el Precio)

$y = \dfrac{36-3x}{2}$; $y = \dfrac{16+x}{4}$ — (8,6)

$y = 18 - 2x - x^2$; $y = \dfrac{3+x}{2}$ — (3,3)

$y = 32e^{-x/2}$; $y = 3 + e^{x/2}$ — (2.94,7.35)

7-42 Hallar los Costos Promedios y Marginales, a partir de los Costos Totales:

$C = 6x^2 + 8x$ — $6x + 8$; $12x + 8$

$C = 18x^4 + 16x^2 + 32$ — $18x^3 + 16x + 32/x$; $72x^3 + 32x$

$C = 64(1 - e^{-x})$ — $64(1 - e^{-x})/x$; $64e^{-x}$

7-43 Hallar los Ingresos Marginales y los Ingresos Mínimos, si las Demandas son:

$y = 18 - 3x$ — $18 - 6x$, 27

$y = 12 - 4x - x^2$ — $12 - 8x - 3x^2$, 7.03

$y = 64e^{-x/8}$ — $8e^{-x/8}(8 - x)$, 188.35

7-44 Hallar las Máximas Ganancias, si las Demandas y Costos Totales son:

$y = 56 - 3x$; $C = 32 + 14x$ — 115

$y = 42 - 5x$; $C = 18 + 2x$ — 62

$y = 18 - 2x - x^2$; $C = 16 + x^2$ — 1.04

7-45 Una fábrica de lápices, vende 50 de ellos, a 210 \$ c/u, pero por cada lápiz adicional fabricado, puede bajar el Precio de venta en 3 \$ c/u. Cuantos lápices (x) debe fabricar, para un Ingreso (R) Máximo

$x = 60$; $R = 10800$ \$

7-46 Un carpintero ofrece 300 mesas a 90 \$ c/u, con una rebaja de 0.25 \$ por cada mesa adicional, arriba de 300. Hallar el número de mesas (x) que le producen un Ingreso (R) Máximo.

$x = 330$; $R = 27225$ \$

7-47 Se venden libros a 24 \$ c/u; ofreciendo una rebaja de 0.4 \$ por cada libro arriba de 50. Cuantos libros (x) deben venderse para un Ingreso (R) Máximo — $x = 55$; $R = 1210$ \$

7-48 A los usuarios de una Agencia de Servicios, se les cobra 50 \$/mes; este precio se reduce en 0.5 \$ por cada usuario arriba de 40. Cuantos usuarios (x) le producen un Ingreso (R) Máximo.

$x = 70$; $R = 2450$ \$

7-49 Si se plantan 25 árboles limoneros por acre, en cierta región, el Rendimiento será de 370 limones/ árbol. Por cada árbol adicional plantado por acre, el Rendimiento se reduce en 10 limones por árbol. Cuantos árboles deben plantarse para Rendimiento Máximo. — $x = 31$ $R = 9610$

7-50 Un fabricante de anillos los vende en lotes de 1000, cobrando 2 \$ por c/u, ofrece una rebaja de 0.05 \$ por cada millar de anillos que le compren. Su Costo de Producción es de 1 \$ por c/u de los anillos. Cuantos millares (x) debe vender para Ganancia (G) Máxima. — $x = 100$; $G = 50000$ \$

7-51 Hallar el Incremento y el Diferencial en:

$y = 5x^2 - 6x$; Si: $x = 2$; $\Delta x = 0.1$ — 1.45 ; 1.4

$y = e^x + 1$; Si: $x = 0$; $\Delta x = 0.3$ — 0.35 ; 0.30

7-52 Hallar los Diferenciales de:

$y = x^2(x-1)$; $y = xe^x$ — $(3x^2 - 2x)dx$; $e^x(1+x)dx$

$y = \dfrac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$; $y = Ln(e^2x^5)$ — $\dfrac{8x^3}{(x^4+1)^2}$; $\dfrac{5}{x}\,dx$

7-53 Calcular aproximadamente por Diferenciales:

$\sqrt{39}$; $\sqrt[3]{119}$; $Cos\,62°$; 2^{31} — 6.25 ; 4.92 , 0.47 ; 8.55



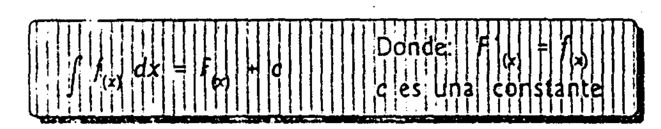
VIII-1 INTEGRALES INDEFINIDAS

Las Integrales se clasifican básicamente en: INTEGRALES INDEFINIDAS e INTEGRALES DEFINIDAS.

Analizando previamente a las INTEGRALES INDEFINIDAS

Si la Función $f_{(x)}$ es la Derivada de la Función $F_{(x)}$. Es decir: $F'_{(x)} = f_{(x)}$. Entonces $F_{(x)}$ se llama la Integral o Función Primitiva de $f_{(x)}$

Lo anterior se simboliza por las siguientes expresiones:



El símbolo de la Integral es: $\int$, entonces la Integral afecta a la Función $f_{(x)}$ que se llamará el INTEGRANDO. dx es el Diferencial de x, que indica que la variable de la integral es x. El resultado es la Función: $F_{(x)}$ o Función Primitiva, que se llamará INTEGRAL INDEFINIDA. Suele anotarse una constante: c al final en la Integral Indefinida, para indicar que todas las Funciones de la forma: $F_{(x)} + c$ satisfacen la definición.

Ej 8-1 Usando los anteriores conceptos, se calculan las siguientes Integrales Indefinidas:

$\int 2x\, dx = x^2 + c$ Porque: $(x^2 + c)' = 2x$

$\int (6x^2 + 35x^4)\, dx = 2x^3 + 7x^5 + c$ $(2x^3 + 7x^5 + c)' = 6x^2 + 35x^4$

$\int Cos\, x\ dx = Sen\, x + c$ $(Sen\, x + c)' = Cos\, x$

Según se observa, integrar la Función $f_{(x)}$ significa, buscar su Función Primitiva que es $F_{(x)}$, la cuál al derivarse, nuevamente presenta a la Función $f_{(x)}$.

Al ser cero la Derivada de una constante, ésta no afecta a la forma general del resultado.

TEOREMAS DE LAS INTEGRALES

De acuerdo a la definición de las Integrales Indefinidas, se cumplen los Teoremas:

T8-1	$[\int f_{(x)}\, dx]' = f_{(x)}$	La Derivada de la Integral de una Función, es la misma Función.
T8-2	$d\,[\int f_{(x)}\, dx] = f_{(x)}\, dx$	El Diferencial que se aplica, se anula con la Integral.
T8-3	$\int d\, F_{(x)} = F_{(x)} + c$	La Integral se anula con el Diferencial.
T8-4	$\int a\, f_{(x)}\, dx = a \int f_{(x)}\, dx$	La Integral de una constante (a) por una Función, es la constante por la Integral de la Función.
T8-5	$\int [f_{(x)} + g_{(x)}]\, dx = \int f_{(x)}\, dx + \int g_{(x)}\, dx$	La Integral de una Suma es igual a la Suma de las Integrales.

Todos los Teoremas de las Integrales Indefinidas, pueden demostrarse usando la definición de las Integrales Indefinidas. En el proceso de cálculo de la Integral Indefinida o búsqueda de la Función Primitiva, se usan todos los anteriores Teoremas. Note que al calcular la Integral Indefinida de una Función se obtiene otra Función.

VIII-2 TABLA DE INTEGRALES

Si u es la variable; a, b, c son constantes; m, n son Números Naturales.

INTEGRALES ALGEBRAICAS Y EXPONENCIALES

1) $\int u^m \, du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} \quad ; \quad m \neq -1$

2) $\int a^u \, du = \dfrac{a^u}{Ln\ a}$

3) $\int e^u \, du = e^u$

4) $\int \dfrac{1}{u} \, du = Ln\,|u|$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

5) $\int Sen\ u\ du = -\ Cos\ u$

6) $\int Cos\ u\ du = Sen\ u$

7) $\int Tan\ u\ du = -Ln|Cos\,u| = Ln|Sec\,u|$

8) $\int Cot\ u\ du = Ln|Sen\,u|$

9) $\int Sec\ u\ du = Ln|Sec\ u + Tan\ u|$

10) $\int Csc\ u\ du = Ln|Csc\,u - Cot\,u|$

11) $\int Sec^2 u\ du = Tan\ u$

12) $\int Csc^2 u\ du = -Cot\ u$

13) $\int Sec\ u\ Tan\ u\ du = Sec\,u$

14) $\int Csc\ u\ Cot\ u\ du = -Csc\,u$

15) $\int Sen^2 u\ du = \dfrac{1}{2}(u - Sen\,u\ Cos\,u)$

16) $\int Cos^2 u\ du = \dfrac{1}{2}(u + Sen\,u\ Cos\,u)$

17) $\int Sen^m u\ du = -\dfrac{Sen^{m-1}u\ Cos\,u}{m} + \dfrac{m-1}{m}\int Sen^{m-2}u\ du$

18) $\int Cos^m u\ du = \dfrac{Cos^{m-1}u\ Sen\,u}{m} + \dfrac{m-1}{m}\int Cos^{m-2}u\ du$

19) $\int Tan^m u\ du = \dfrac{Tan^{m-1}u}{m-1} - \int Tan^{m-2}u\ du \quad ; \quad m \neq 1$

INTEGRALES HIPERBÓLICAS

20) $\int Senh\ u\ du = Cosh\ u$

21) $\int Cosh\ u\ du = Senh\ u$

22) $\int Tanh\ u\ du = Ln|Cosh\,u|$

23) $\int Coth\ u\ du = Ln|Senh\ u|$

24) $\int Sech\ u\ du = Arctan(Senh\ u)$

25) $\int Csch\ u\ du = Ln\left|Tanh\ \dfrac{u}{2}\right|$

INTEGRALES DE FORMAS CUADRÁTICAS

26) $\int \dfrac{1}{a^2+u^2}\,du = \dfrac{1}{a}Arctan\,\dfrac{u}{a} = -\dfrac{1}{a}Arccot\,\dfrac{u}{a}$

27) $\int \dfrac{1}{a^2-u^2}\,du = \dfrac{1}{2a}Ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| = \dfrac{1}{a}Arctanh\dfrac{u}{a}$

28) $\int \dfrac{1}{u^2-a^2}\,du = \dfrac{1}{2a}Ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| = -\dfrac{1}{a}Arccoth\,\dfrac{u}{a}$

29) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = Ln|u + \sqrt{u^2+a^2}| = Arcsenh\,\dfrac{u}{a}$

30) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = Arcsen\,\dfrac{u}{a} = -Arccos\,\dfrac{u}{a}$

31) $\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = Ln|u + \sqrt{u^2-a^2}| = Arccosh\,\dfrac{u}{a}$

32) $\int\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2+u^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Ln}|u+\sqrt{a^2+u^2}|$

33) $\int\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Arcsen}\frac{u}{a}$

34) $\int\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Ln}|u+\sqrt{u^2-a^2}|$

35) $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{4}u\sqrt{(a^2+u^2)^3} - \frac{1}{8}a^2u\sqrt{a^2+u^2} - \frac{1}{8}a^4 \operatorname{Ln}|u+\sqrt{a^2+u^2}|$

36) $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = -\frac{1}{4}u\sqrt{(a^2-u^2)^3} + \frac{1}{8}a^2u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{8}a^4 \operatorname{Arcsen}\frac{u}{a}$

37) $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{4}u\sqrt{(a^2-u^2)^3} + \frac{1}{8}a^2u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{8}a^4 \operatorname{Ln}|u+\sqrt{u^2-a^2}|$

38) $\int\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\operatorname{Ln}|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}|$

39) $\int\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\operatorname{Ln}|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}|$

40) $\int\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - \operatorname{Arcsec}\frac{u}{a} = \sqrt{u^2-a^2} - \operatorname{Arccos}\frac{a}{u}$

41) $\int\frac{1}{u\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{Ln}|\frac{u}{a+\sqrt{a^2+u^2}}| = -\frac{1}{a}\operatorname{Ln}|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}|$

42) $\int\frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{Ln}|\frac{u}{a+\sqrt{a^2-u^2}}| = -\frac{1}{a}\operatorname{Ln}|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}|$

43) $\int\frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{Arcsec}\frac{u}{a} = \frac{1}{a}\operatorname{Arccos}\frac{a}{u}$

INTEGRALES DE RECURRENCIA

44) $\int u^m e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^m e^{au} - \frac{m}{a}\int u^{m-1}e^{au}\,du$

45) $\int u^m \operatorname{Sen} u\,du = -u^m \operatorname{Cos} u + m\int u^{m-1}\operatorname{Cos} u\,du$

46) $\int u^m \operatorname{Cos} u\,du = u^m \operatorname{Sen} u - m\int u^{m-1}\operatorname{Sen} u\,du$

47) $\int \operatorname{Ln}^m u\,du = u\operatorname{Ln}^m u - m\int \operatorname{Ln}^{m-1}u\,du$!

48) $\int u^m \operatorname{Ln}^n u\,du = \frac{u^{m-1}\operatorname{Ln}^m u}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int u^m \operatorname{Ln}^{n-1}u\,du \quad ; \quad m, n \neq -1$

49) $\int u^m \operatorname{Ln} u\,du = u^{m+1}[\frac{\operatorname{Ln} u}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}]$

NTEGRALES DE OTRAS FUNCIONES

50) $\int \operatorname{Ln} u\,du = u\operatorname{Ln}|u| - u$

51) $\int \operatorname{Arctan} u\,du = u\operatorname{Arctan} u - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|1+u^2|$

52) $\int \operatorname{Arcsen} u\,du = u\operatorname{Arcsen} u + \sqrt{1-u^2}$

53) $\int e^{ax}\operatorname{Sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{Sen} bx - b\operatorname{Cos} ax)}{a^2+b^2}$

54) $\int e^{ax}\operatorname{Cos} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{Cos} bx + b\operatorname{Sen} bx)}{a^2+b^2}$

VIII-3 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES

Para integrar una Función, pueden usarse las INTEGRALES INMEDIATAS o los MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

Se llaman INTEGRALES INMEDIATAS, a aquellas que pueden calcularse en forma directa o a partir de una TABLA DE INTEGRALES, como la vista anteriormente.

Se llaman MÉTODOS DE INTEGRACIÓN a aquellos procedimientos o artificios que permiten expresar una Integral cualquiera como una INTEGRAL INMEDIATA. (Ver Cap. VIII-4)

INTEGRACIÓN DE POTENCIAS



Tome en cuenta que la fórmula es válida para toda potencia m, excepto para $m = -1$

Ej 8-2

$$\int x^5\, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$$

Por la Fórmula, donde la potencia es: $m = 5$.(m debe ser un Número Natural, luego puede generalizarse la Fórmula para: m Número Real)

8-1 Integrar por la Regla de Integración de Potencias:

$$\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int x^{45}\, dx = \frac{x^{46}}{46} + c$$

$$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

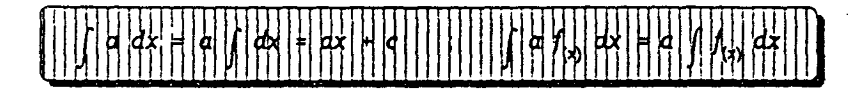
$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\int \frac{1}{x^7}\, dx = \int x^{-7}\, dx = \frac{x^{-6}}{-6} + c = -\frac{1}{6x^6} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\, dx = \int x^{-1/5}\, dx = \frac{x^{4/5}}{4/5} + c = \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} + c$$

Los radicales y potencias en el denominador se reordenan de manera que se pueda aplicar la Regla de Integración de Potencias.

INTEGRACIÓN DE CONSTANTES Y CONSTANTE POR FUNCIÓN



Ej 8-3

$$\int 5\, dx = 5 \int dx = 5x + c$$

$$\int 2x^6\, dx = 2 \int x^6\, dx = 2\,\frac{x^7}{7} + c$$

Las constantes pueden salir libremente de una Integral

Luego de sacar la constante, se integra la Función, de acuerdo a sus Reglas.

8-2 Integrar usando las Reglas de Integración de constantes:

$$\int 9\, dx = 9x + c$$

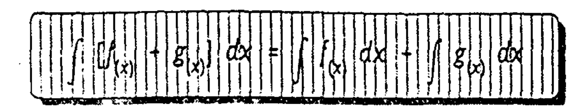
$$\int \frac{dx}{2} = \int \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int 8\sqrt[3]{x}\, dx = 8 \int x^{1/3}\, dx = 8\,\frac{x^{4/3}}{4/3} + c = 6\sqrt[3]{x^4} + c$$

$$\int \frac{5}{x^2}\, dx = 5 \int x^{-2}\, dx = 5\,\frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{5}{x} + c$$

INTEGRACIÓN DE SUMAS



Ej 8-4 $\int (x^7 + 9x^2)\, dx = \int x^7\, dx + \int 9x^2\, dx = \dfrac{x^8}{8} + 3x^3 + c$

La Integral de una Suma es igual a la Suma de las Integrales.

8-3 Integrar las siguientes Sumas de Funciones, por la Regla correspondiente:

$\int (x^6 + x^3)\, dx = \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^4}{4} + c$ $\qquad$ $\int (x^2 - x + 1)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + c$

INTEGRACIÓN DE EXPONENCIALES



Ej 8-5 $\int 3^x\, dx = \dfrac{3^x}{Ln\, 3} + c$

En lugar de la constante: a se posee el valor conocido de: 3 el cuál se reemplaza en la Fórmula.

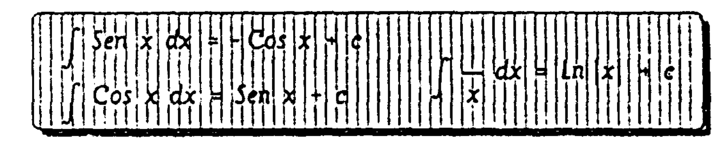
8-4 Integrar las siguientes Funciones Exponenciales:

$\int (7^x + e^x)\, dx = \dfrac{7^x}{Ln\, 7} + e^x + c$ $\qquad$ $\int 6^{2+x}\, dx = \int 6^2\, 6^x\, dx = 6^2\, \dfrac{6^x}{Ln\, 6} + c$

$\int \dfrac{1}{4^x}\, dx = \int (4^{-1})^x\, dx = \dfrac{(4^{-1})^x}{Ln(4^{-1})} + c$ $\qquad$ $\int 3^x e^x\, dx = \int (3e)^x\, dx = \dfrac{(3e)^x}{Ln(3e)} + c$

Ordenando los exponenciales, para aplicar la Regla.

INTEGRACIÓN DE OTRAS FUNCIONES



Estas son las Integrales de Funciones Trigonométricas y el caso particular de $1/x$ (Que no admitía el uso de la Fórmula (1) de la Tabla de Integrales)

Ej 8-6 Se calculan las Integrales de Funciones Trigonométricas y el caso de: $1/x$

$$\int (7\, Cos\, x + \frac{3}{x})\, dx = 7 \int Cos\, x\, dx + 3 \int \frac{1}{x}\, dx$$
$$= 7\, Sen\, x + 3\, Ln\, |x| + c$$

La Integral de una Suma es la Suma de las Integrales, se sacan antes las constantes.

8-5 Calcular las siguientes Integrales de Funciones diversas:

$\int (Cos\, x - 1)\, dx = Sen\, x - x + c$ $\qquad$ $\int (x + \dfrac{1}{x})\, dx = \dfrac{x^2}{2} + Ln\, |x| + c$

$\int (x^2 + Sen\, x)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - Cos\, x + c$ $\qquad$ $\int Sen\, 2\, dx = (Sen\, 2)x + c$

$\int (\dfrac{Cos\, x}{5} + 1)\, dx = \dfrac{1}{5} Sen\, x + x + c$ $\qquad$ $\int (\dfrac{1}{5x} + 5x)\, dx = \dfrac{1}{5} Ln\, |x| + 5\, \dfrac{x^2}{2} + c$

Para integrar en forma inmediata son convenientes las siguientes Reglas:

- Antes de integrar se debe observar cuidadosamente a la Función a integrar, procurando ordenarla o simplificarla en forma previa.
- La Función algebraica a integrar se debe simplificar a su mínima expresión, efectuando las operaciones de producto, cociente o potencia requeridos (Ver P-8-6-c o d).
- Se deben identificar plenamente a las constantes, procurando aislarlas del resto de la función a integrar (Ver P-8-6-b, o el P-8-5)
- Si una Fracción no es Propia (Es Propia cuando el grado del numerador es menor al del denominador), en forma previa se debe dividir (Ver P-8-6-d, P-8-19-b)

8-6 Usando Reglas de Integración y algunos artificios algebraicos, integrar:

a) $\int (7^x + x^7 + \frac{1}{x^7} + \sqrt[7]{x} + 7x + 7)\, dx$

Observando a la Función que se debe integrar, se aprecia que varios Términos precisan de una previa ordenación.

$= \int (7^x + x^7 + x^{-7} + x^{1/7} + 7x + 7)\, dx$

Expresando en forma potencial al 3er y 4to Términos

$= \frac{7^x}{Ln\,7} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{-6}}{-6} + \frac{x^{8/7}}{8/7} + 7\frac{x^2}{2} + 7x + c$

Integrando por reglas anteriormente indicadas

$= \frac{7^x}{Ln\,7} + \frac{x^8}{8} - \frac{1}{6x^6} + \frac{7}{8}\sqrt[7]{x^8} + 7\frac{x^2}{2} + 7x + c$

Ordenando el resultado.

b) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2})\, dx$

Los Términos algebraicas se deben expresar en forma potencial.

$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$

Luego de integrar se reordena el resultado

c) $\int (x + 3)(5x - 2)\, dx$

$= \int (5x^2 + 13x - 6)\, dx = 5\frac{x^3}{3} + 13\frac{x^2}{2} - 6x + c$

Al existir un producto indicado previamente se debe multiplicar , para luego recién integrar.

d) $\int \frac{x^9 + x^5 + 1}{x^2}\, dx$

Al observar cocientes, toda vez que sea posible, antes de integrar se debe efectuar la división.

$= \int (\frac{x^9}{x^2} + \frac{x^5}{x^2} + \frac{1}{x^2})\, dx = \int (x^7 + x^3 + x^{-2})\, dx$

Dividiendo, ordenado e integrando.

$= \frac{x^8}{8} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^8}{8} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + c$

Reordenando el resultado.

e) $\int (x + 3)^2\, dx$

Se observa una potencia indicada en la función a integrar.

$= \int (x^2 + 6x + 9)\, dx = \frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + 9x + c$

$= \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + c$

Se debe desarrollar el Binomio, para luego integrar término a término.

f) $\int \sqrt{5x}\, dx = \int \sqrt{5}\sqrt{x}\, dx = \sqrt{5}\int x^{1/2}\, dx = \sqrt{5}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + c$

$= \sqrt{5}\,\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{5x^3} + c$

Se debe procurar siempre, que las constantes se encuentren fuera de la Integral.

INTEGRACIÓN POR TABLAS DE INTEGRALES

Analizando la Función que se debe integrar, puede elegirse, una de las Fórmulas de la Tabla de Integrales, para así integrar, adaptando las constantes a su forma

Ej 8-7

$$\int \sqrt{9+x^2}\,dx = ?$$

De acuerdo a la forma de la Función, se busca en la Tabla de integrales una expresión equivalente

$$\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2+u^2} + \frac{1}{2}a^2 Ln|u+\sqrt{a^2+u^2}|$$

Se usará la Fórmula 32 de la Tabla de Integrales.

$$\int \sqrt{9+x^2}\,dx = \int \sqrt{3^2+x^2}\,dx$$

Ordenado la Función para aplicar luego la fórmula.

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{3^2+x^2} + \frac{1}{2}3^2 Ln|x+\sqrt{3^2+x^2}| + c$$

8-7 Utilizando la Tabla de Integrales, integrar:

a) $\int 3^{7-x}\,dx = ?$

Se usará la Fórmula 2 de la Tabla de integrales anteriormente indicada.

Si: $\int a^u\,du = \frac{a^u}{Ln\,a}$

Se debe ordenar previamente por Leyes de exponentes.

$$\int 3^{7-x}\,dx = \int 3^7 3^{-x}\,dx = 3^7\int (3^{-1})^x\,dx$$

El valor de a que se emplea en la Fórmula es $a = 3^{-1}$

$$= 3^7\frac{(3^{-1})^x}{Ln(3^{-1})} + c = 3^7\frac{3^{-x}}{(-1)Ln\,3} + c = -\frac{3^{7-x}}{Ln\,3} + c$$

b) $\int \frac{\sqrt{7-x^2}}{6}\,dx = ?$

Ordenando la Función para aplicar la Fórmula 33 de la tabla.

Si: $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\,Arcsen\frac{u}{a}$

$$\int \frac{\sqrt{7-x^2}}{6}\,dx = \frac{1}{6}\int \sqrt{(\sqrt{7})^2-x^2}\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{(\sqrt{7})^2-x^2} + \frac{1}{2}(\sqrt{7})^2 Arcsen\frac{x}{\sqrt{7}}\right] + c$$

c) $\int Ln^3x\,dx = ?$: Si: $\int Ln^m u\,du = u\,Ln^m u - m\int Ln^{m-1}u\,du$

En este caso debe usarse una Fórmula de Recurrencia, la que se aplica en forma reiterada, hasta lograr el resultado final.

$$\int Ln^3x\,dx = x\,Ln^3x - 3\int Ln^2x\,dx = x\,Ln^3x - 3(\int Ln^2x\,dx)$$

$$= x\,Ln^3x - 3(x\,Ln^2x - 2\int Ln\,x\,dx) = x\,Ln^3x - 3x\,Ln^2x + 6(\int Ln\,x\,dx)$$

$$= x\,Ln^3x - 3x\,Ln^2x + 6(x\,Ln\,x - \int 1\,dx)$$

$$= x\,Ln^3x - 3x\,Ln^2x + 6x\,Ln\,x - 6x + c$$

No todas las Funciones poseen Funciones Primitivas, es decir que no todas las Funciones pueden integrarse, en términos de Funciones conocidas, ni por Integración Inmediata ni por alguno de los Métodos de Integración. Por ejemplo:

$$\int e^{-x^2}\,dx = ? \qquad \int \frac{Sen\,x}{x}\,dx = ? \qquad \int \sqrt{1+x^3}\,dx = ?$$

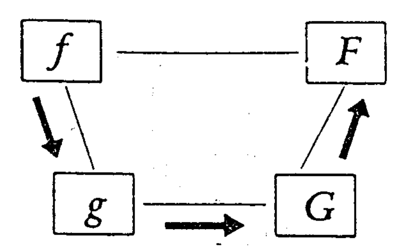
$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = ? \qquad \int x^x\,dx = ? \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = ?$$

Sin embargo se puede calcular en forma aproximada, recurriendo a otras técnicas, no pertenecientes a CÁLCULO I, tales como Series de Potencias o Integrales Dobles cuando las Integrales son definidas.

VIII-4 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Los Métodos de Integración son procedimientos generales, que se aplican de acuerdo a las características de la Función a integrar, permitiendo así su integración.

El objetivo de los Métodos de Integración puede resumirse en el esquema adjunto:



Si se busca integrar la Función $f_{(x)}$, su Función Primitiva seria $F_{(x)}$, sin embargo asumiendo que no es posible obtenerla directamente; Entonces se debería transformar $f_{(x)}$ en $g_{(x)}$, para así hallar su correspondiente Función Primitiva $G_{(x)}$.

Luego a partir de $G_{(x)}$ se determinará $F_{(x)}$, obteniendo así el resultado requerido.

Los principales Métodos de Integración son:

- MÉTODO DE SUSTITUCIÓN
- MÉTODO DE POR PARTES
- MÉTODO DE CUADRÁTICAS
- MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES
- MÉTODO DE TRIGONOMÉTRICAS
- MÉTODO DE SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS
- MÉTODO DE SUSTITUCIONES ESPECIALES
- MÉTODO DE INTEGRALES BINOMIAS

De acuerdo a la Función que se debe integrar, se elige el método adecuado, cada uno de los métodos posee reglas específicas, que se deben cumplir para su aplicación.

Se considera que derivar es una simple técnica, en cambio integrar es un arte, por ello siempre se procurará integrar en la forma mas rápida y elegante, eligiendo el adecuado Método de Integración.

VIII-5 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El Método de Integración por Sustitución, consiste en efectuar un Cambio de variable, de manera tal que la Función a integrar se simplifique, para luego integrar directamente.

El Cambio de variable debe efectuarse con una expresión que posea a su Diferencial, dentro de la misma Integral, puesto que necesariamente tras un Cambio de variable, debe calcularse el Diferencial para así poder expresar la Integral en términos de la nueva variable.

Ej 8-8 $\int (x-3)^8\,dx = ?$

La Integral, presenta un binomio a la octava potencia. Por tanto es conveniente un Cambio de variable.

Si: $u = x - 3$

Reemplazando la expresión dentro del binomio. La nueva variable será: u

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow du = dx$$

Derivando la expresión del Cambio de variable. Despejando luego el Diferencial: du (Este Diferencial puede calcularse directamente).

$$\int u^8\,du = \frac{u^9}{9} + c$$

Volviendo a la Integral y reemplazando todos sus términos con la nueva variable y Diferencial calculados.

$$= \frac{(x-3)^9}{9} + c$$

Se resuelve la sencilla Integral que queda, retornando luego a la variable original.

La integral inicialmente presentaba por variable a x, por tanto el resultado final deberá mostrar como variable a x.

8-8 Para los siguientes Cambios de variable, determinar directamente sus Diferenciales, usar las relaciones:
Si: $u = u_{(x)} \Rightarrow du = u'_{(x)}\,dx$ (Ver Cap. VII-2)

a) $u = x - 3 \quad \Rightarrow \quad du = dx$

b) $u = x^4 - 6x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = (4x^3 - 12x)\,dx$

c) $u = e^x + Ln\,x \quad \Rightarrow \quad du = (e^x + \frac{1}{x})\,dx$

d) $u = Arctan\,x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x^2+1}\,dx$

Una vez que se ha efectuado un Cambio de varia-ble, para calcular directamente el Diferencial de tal
Cambio, se procede de la siguiente manera:

Se deriva y coloca al final el Diferencial: dx, según las definiciones vistas en: VII-2.

La derivación se efectúa de acuerdo a Reglas conocidas.

8-9 Aplicando el Método de Sustitución, integrar:

a) $\int (5+x)^3\,dx = ?$ Si: $u = 5 + x \Rightarrow du = dx$

$$= \int u^3\,du$$

$$= \frac{u^4}{4} + c = \frac{(5+x)^4}{4} + c$$

Efectuando el Cambio de variable con el binomio, se halla luego el Diferencial directamente.

Se reemplaza en la Integral la nueva variable, luego se integra.

b) $\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = ?$ Si: $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$= \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= Ln|u| + c = Ln|x^2 - 1| + c$$

El Cambio de variable se efectúa con el denominador, hallando luego el Diferencial

Se reemplaza, ordena e integra

Retornando a la variable original.

c) $\int \sqrt[3]{x^3+1}\;3x^2\,dx = ?$ Si: $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2\,dx$

$$= \int \sqrt[3]{u}\,du = \int u^{1/3}\,du = \frac{u^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4} + c$$

$$= \frac{(x^3+1)^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^3+1)^4} + c$$

El Cambio de variable se efectúa con la expresión subradical.

Ordenando e integrando. Retornando a variable original.

d) $\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = ?$ Si: $u = x^3 - 1 \Rightarrow du = 3x^2\,dx$

$$= \int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}Ln|u| + c = \frac{1}{3}Ln|x^3 - 1| + c$$

Integrando y retornando a la variable original.

Luego del Cambio de variable y cálculo de Diferenciales, se observa que se obtuvo $3x^2\,dx$, pero en la integral solo se tiene $x^2\,dx$

Se debe ordenar hasta obtener la misma expresión existente en la Integral. Solo así será posible reemplazar en la Integral las expresiones con la nueva variable. $\frac{du}{3} = x^2\,dx$

e) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$ Si: $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx$

$$\int \sqrt{1-x^2}\;x\,dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{-2}\right) = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = -\frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$$

Luego del Cambio de variable y el cálculo de Diferenciales, se ordena hasta obtener: $\frac{du}{-2} = x\,dx$

Reemplazando, e integrando.

8-10 Aplicando el Método de Sustitución, integrar:

a) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = ?$ Si: $u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x\,dx$

$= \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u}\,du = Ln|u| + c$

$= Ln|e^x + 1| + c$

Efectuando un Cambio de variable con el denominador de la expresión a integrar y calculando el Diferencial de este cambio.

Integrando y volviendo a la variable original.

b) $\int 3^{5x-2}\,dx = ?$ Si: $u = 5x - 2 \Rightarrow du = 5\,dx$

$= \int 3^u \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int 3^u\,du = \frac{1}{5}\frac{3^u}{Ln\,3} + c$

$= \frac{1}{5}\frac{3^{5x-2}}{Ln\,3} + c$

Cambio de variable con el Exponente, calculando Diferenciales y ordenándolos.

Reemplazando, ordenando e integrando, volviendo a la variable original.

c) $\int \frac{\sqrt{1 + Ln\,x}}{x}\,dx = ?$ Si: $u = 1 + Ln\,x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$= \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + c$

$= \frac{(1 + Ln\,x)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(1 + Ln\,x)^3} + c$

El Cambio de variable es con la expresión subradical.

Reemplazando, ordenando e integrando.

Retornando a la variable original.

d) $\int \frac{Cos\,x}{Sen\,x + 3}\,dx = ?$ Si: $u = Sen\,x + 3 \Rightarrow du = Cos\,x\,dx$

$= \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u}\,du = Ln|u| + c = Ln|Sen\,x + 3| + c$

El Cambio de variable es con el denominador.

Reemplazando, e integrando, para volver a la variable original.

e) $\int e^{ax+b}\,dx = ?$ Si: $u = ax + b \Rightarrow du = a\,dx$

$= \int e^u \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int e^u\,du = \frac{1}{a}e^u + c = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$

Caso general de la Función Exponencial. El Cambio de variable se realiza con el exponente. Integrando y volviendo a la variable original.

f) $\int Sen(ax + b)\,dx = ?$ Si: $u = ax + b \Rightarrow du = a\,dx$

$= \int Sen\,u \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int Sen\,u\,du = \frac{1}{a}(-Cos\,u) + c$

$= \frac{1}{a}[-Cos(ax + b)] + c = -\frac{Cos(ax + b)}{a} + c$

Caso general de la Función Seno. El Cambio de variable es con el ángulo de Seno.

Note que su ángulo es una Función Lineal.

g) $\int Cos(ax + b)\,dx = ?$ Si: $u = ax + b \Rightarrow du = a\,dx$

$= \int Cos\,u \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int Cos\,u\,du = \frac{1}{a}Sen\,u + c = \frac{Sen(ax + b)}{a} + c$

Caso general de la Función Coseno, de ángulo lineal.

h) $\int \frac{1}{ax + b}\,dx = ?$ Si: $u = ax + b \Rightarrow du = a\,dx$

$= \int \frac{1}{u}\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{a}Ln|u| + c = \frac{Ln|ax + b|}{a} + c$

Caso general del Inverso de una Función Lineal. El Cambio de variable se hace con el denominador

8-11 Aplicando el Método de Sustitución, integrar:

a)
$$\int \frac{1}{e^x + 1}\,dx = ?$$
$$= \int \frac{1}{e^x+1}\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{e^x e^{-x} + e^{-x}}\,dx$$
$$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \qquad \text{Si: } u = 1 + e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}\,dx$$
$$= \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{1}{u}\,du = -Ln|u| + c$$
$$= -Ln|1+e^{-x}| + c$$

Comparando con el Problema: P-8-11-a, no se tiene el Diferencial, para el Cambio de variable: $u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx$

Por ello se usa el artificio de multiplicar y dividir por: e^{-x} dentro de la Integral.

De esa manera se tendrá el Diferencial del Cambio de variable efectuado:
$u = 1 + e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}dx$

b)
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = ? \qquad \text{Si: } u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$$
$$= \int \frac{e^x\,dx}{(e^x)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1}$$
$$= Arctan\,u + c = Arctan(e^x) + c$$

Antes del Cambio de variable, se ordena el denominador. Así se obtiene una expresión parecida a una de las Fórmulas.

El Cambio es con: e^x, usando la Formula 26

c)
$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = ? \qquad \text{Si: } u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \int e^u\,(-du) = -e^u + c = -e^{1/x} + c$$

El Cambio de variable es con el Exponente, se debe ordenar el signo menos.

d)
$$\int x^5\sqrt{1+x^3}\,dx = ? \qquad \text{Si: } u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2\,dx$$
$$= \int x^3\sqrt{1+x^3}\,x^2\,dx$$
$$= \int (u-1)\sqrt{u}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int (u^{3/2} - u^{1/2})\,du$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + c = \frac{2}{15}u^{5/2} - \frac{2}{9}u^{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{15}(1+x^3)^{5/2} - \frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2} + c$$

Para reemplazar en la Integral el Cambio de variable antes se debe descomponer $x^5 = x^3x^2$.

En el primer factor (x^3), se debe considerar que:
Si: $u = 1 + x^3 \Rightarrow x^3 = u - 1$

El segundo factor (x^2) se usa para el Diferencial: $\frac{du}{3} = x^2\,dx$

e)
$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = ? \qquad \text{Si: } u^2 = x \Rightarrow 2u\,du = dx$$
$$= \int \frac{1+u}{1-u}\,2u\,du = -2\int \frac{u^2+u}{u-1}\,du$$
$$= -2\int \left(u + 2 + \frac{2}{u-1}\right)du = -2\left(\frac{u^2}{2} + 2u + 2\,Ln|u-1|\right) + c$$
$$= -2\left(\frac{x}{2} + 2\sqrt{x} + 2\,Ln|\sqrt{x}-1|\right) + c$$

El Cambio de variable es $u = \sqrt{x}$, se toma $u^2 = x$, para mayor facilidad en el cálculo de Diferenciales.

Dividiendo la fracción resultante, ya que tal operación es posible (Porque la Fracción no es propia).

f)
$$\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx = ? \qquad \text{Si: } u = x + a \Rightarrow du = dx$$
$$= \int \frac{1}{u^n}\,du = \int u^{-n}\,du = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c$$
$$= -\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}} + c = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + c$$

Forma general de un binomio de grado n en el denominador, se resuelve con un Cambio de variable.

VIII-6 MÉTODO DE POR PARTES

El Método de Integración Por Partes, consiste en el uso de la Fórmula: 

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Esta Fórmula proviene de las Propiedades de los Diferenciales de Funciones:

$d(u\,v) = v\,du + u\,dv$ — Si: u, v son Funciones, se desarrolla por el Diferencial de producto (Ver VII-7)

$u\,dv = d(u\,v) - v\,du$ — Despejando: $u\,dv$ de la anterior expresión.

$\int u\,dv = \int d(u\,v) - \int v\,du$ — Integrando (La Integral se anula con el Diferencial).

$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ — Fórmula de Integración Por Partes.

El Método de Integración Por partes, se aplica para integrar Productos de Funciones de distinta naturaleza, o Funciones que no poseen Integral Inmediata.

Ej 8-9 Las siguientes Integrales pueden resolverse por el Método de Por Partes:

$$\int x\,Sen\,x\,dx \qquad \int x^5\,Ln\,x\,dx \qquad \int Ln\,x\,dx$$

$$\int x^2 e^x\,dx \qquad \int e^x\,Cos\,x\,dx \qquad \int Arctan\,x\,dx$$

Las Primeras son Integrales de Productos de Funciones. Las dos últimas son de Funciones que no poseen Integral Inmediata.

Ej 8-10 Se calculará una Integral usando el Método de Por Partes:

$$\int x\,Sen\,x\,dx = ?$$

La expresión a integrar, se separa en dos Partes, una de ellas es: u , la otra es: dv (Esta segunda parte debe contener al Diferencial: dx)

$$\int [x]\,[Sen\,x\,dx] =$$

A partir de: u se deriva y calcula el Diferencial: du (Puede calcularse directamente).

$$u = x \qquad \frac{du}{dx} = 1 \qquad du = dx$$

A partir de: dv se integra, obteniéndose: v (Puede calcularse también directamente).

$$dv = Sen\,x\,dx \qquad \int dv = \int Sen\,x\,dx \qquad v = -Cos\,x$$

Aplicando la Fórmula de Integración de Por Partes, donde se reemplazarán: u, du, v, dv

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Ordenando, queda una sencilla Integral por calcular. Integrando se arriba al resultado final.

$$\int x\,Sen\,x\,dx = x(-Cos\,x) - \int(-Cos\,x)\,dx$$

$$= -x\,Cos\,x + \int Cos\,x\,dx$$

$$= -x\,Cos\,x + Sen\,x + c$$

Ej 8-11 Se calcula de dos maneras la Integral siguiente:

$$\int x e^x\,dx = \int [x]\,[e^x\,dx]$$

$$u = x \qquad dv = e^x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \underline{\int e^x dx}$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$$\int x e^x\,dx = \int [e^x]\,[x\,dx]$$

$$u = e^x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = e^x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

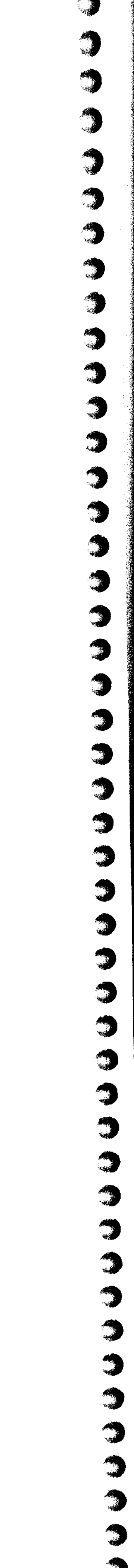
$$\int e^x x\,dx = e^x\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x x^2 - \underline{\frac{1}{2}\int x^2 e^x\,dx}$$

La 1era manera de resolución es la correcta.

La 2da por mala elección de Partes, muestra una más complicada Integral resultante. (Es la Integral final obtenida tras reemplazar las Partes)

Por tanto para elegir Partes, se deben buscar aquellas que simplifique la Integral resultante.



8-12 Aplicando el Método de Integración de Por Partes, resolver las Integrales:

a) $\int x^2 5^x\, dx$

$\int x^2 5^x\, dx = \int [x^2]\,[5^x\, dx]$

Integral de un producto de Funciones, por tanto debe usarse necesariamente el Método de Por Partes.

Se eligen las Partes: u, dv

$u = x^2 \qquad dv = 5^x\, dx$

$\frac{du}{dx} = 2x \qquad \int dv = \int 5^x\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = \frac{5^x}{Ln\, 5}$

Luego a partir de: u se calcula du por derivación o directamente por diferenciación

A partir de: dv se calcula: v por Integración.

Fórmula de Integración de Por Partes.

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Reemplazando, tanto las Partes elegidas como las calculadas: u, dv, du, v

$\int x^2 5^x\, dx = x^2 \frac{5^x}{Ln\, 5} - \int \frac{5^x}{Ln\, 5} 2x\, dx$

$= x^2 \frac{5^x}{Ln\, 5} - \frac{2}{Ln\, 5}\left(\int x\, 5^x\, dx\right)$

Se observa que la Integral que queda presenta aún un producto de dos Funciones, para resolverse requiere de otra aplicación del Método de Por Partes.

Llamando I_1 a la Integral que queda y eligiendo las Partes para volver a aplicar el Método.

$I_1 = \int x\, 5^x\, dx = \int [x]\,[5^x\, dx]$

A partir de: u, dv se calculan: du, v por Diferenciación e Integración respectivamente.

$u = x \qquad dv = 5^x\, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{5^x}{Ln\, 5}$

Fórmula de Integración de Por Partes

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Reemplazando: u, du, v, dv en la Fórmula.

La Integral que queda es directamente resoluble.

$\int x\, 5^x\, dx = x \frac{5^x}{Ln\, 5} - \int \frac{5^x}{Ln\, 5}\, dx$

$= x \frac{5^x}{Ln\, 5} - \frac{1}{Ln\, 5}\frac{5^x}{Ln\, 5}$

El resultado de I_1 se reemplaza en la expresión de la Integral originalmente planteada, obteniendo así la Solución total.

$$\int x^2 5^x\, dx = x^2 \frac{5^x}{Ln\, 5} - \frac{2}{Ln\, 5}\left(x\frac{5^x}{Ln\, 5} - \frac{1}{Ln\, 5}\frac{5^x}{Ln\, 5}\right) + c = x^2 \frac{5^x}{Ln\, 5} - 2x\frac{5^x}{Ln^2 5} + 2\frac{5^x}{Ln^3 5} + c$$

b) $\int x^2 Cos\, x\, dx$

Integral de un Producto.

$\int x^2 Cos\, x\, dx = \int [x^2]\,[Cos\, x\, dx]$

Eligiendo las Partes.

$u = x^2 \qquad dv = Cos\, x\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = Sen\, x$

A partir de: u se calcula: du por Diferenciación, a partir de: dv se calcula: v por Integración.

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Fórmula de Por Partes. Reemplazando, queda la Integral de un Producto que podría resolverse por el Método.

$\int x^2 Cos\, x\, dx = x^2 Sen\, x - \int Sen\, x\; 2x\, dx = x^2 Sen\, x - 2\left[\int x\, Sen\, x\, dx\right]$

$= x^2 Sen\, x - 2[-x\, Cos\, x + Sen\, x] + c = x^2 Sen\, x + 2x\, Cos\, x - 2\, Sen\, x + c$

La Integral resultante que queda ya ha sido resuelta en el Ej 8-10, reemplazando.

c) $\int Sen\sqrt{x}\, dx = ?$ Si: $z^2 = x \Rightarrow 2z\, dz = dx$

$= \int Sen\, z\; 2z\, dz = 2\int z\, Sen\, z\, dz$

$= 2(-z\, Cos\, z + Sen\, z) + c = 2(-\sqrt{x}\, Cos\sqrt{x} + Sen\sqrt{x}) + c$

Resolviendo por Sustitución y luego en la Integral que queda se reemplaza el resultado obtenido en el Ej 8-10

8.13 Aplicando el Método de Integración de Por Partes, integrar:

a) $\int Ln\,x\,dx$

$\int Ln\,x\,dx = \int [Ln\,x]\,[dx]$ $\qquad u = Ln\,x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int Ln\,x\,dx = Ln\,x\,x - \int x\frac{1}{x}dx = x\,Ln\,x - \int dx$

$= x\,Ln\,x - x + c$

Integral de Función que no posee Integral Inmediata.

Eligiendo Partes: u, dv ; calculando luego du, v ; Por Diferenciación e Integración respectivamente.

La Integral que queda es simple.

b) $\int Arctan\,x\,dx$

$\int Arctan\,x\,dx = \int [Arctan\,x]\,[dx]$ $\qquad u = Arctan\,x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x^2+1}dx \qquad v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int Arctan\,x\,dx = Arctan\,x\,x - \int x\frac{1}{x^2+1}dx = x\,Arctan\,x - \int \frac{x}{x^2+1}dx$

$I_1 = \int \frac{x}{x^2+1}dx = ?$ $\qquad$ Si: $z = x^2+1 \Rightarrow dz = 2x\,dx$

$= \int \frac{dz/2}{z} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2}Ln|z|$

$= \frac{1}{2}Ln|x^2+1| + c$

$\int Arctan\,x\,dx = x\,Arctan\,x - \frac{1}{2}Ln|x^2+1| + c$

Integral de Función que no posee Integral Inmediata.

Se aplica el Método de Por Partes.

Eligiendo partes y reemplazando.

Ordenando la expresión.

Queda una Integral que debe resolverse por el Método de Sustitución.

Llamando I_1 a esta Integral, resolviendo.

Reuniendo resultados.

c) $\int e^x Sen\,x\,dx$

$\int e^x Sen\,x\,dx = \int [e^x]\,[Sen\,x\,dx]$ $\qquad u = e^x \qquad dv = Sen\,x\,dx$

$du = e^x dx \qquad v = -Cos\,x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int e^x Sen\,x\,dx = e^x(-Cos\,x) - \int(-Cos\,x)\,e^x dx = -e^x Cos\,x + \int e^x Cos\,x\,dx$

$I_1 = \int e^x Cos\,x\,dx = \int [e^x]\,[Cos\,x\,dx]$ $\qquad u = e^x \qquad dv = Cos\,x\,dx$

$du = e^x dx \qquad v = Sen\,x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int e^x Cos\,x\,dx = e^x Sen\,x - \int Sen\,x\,e^x dx$

$\Rightarrow \quad \int e^x Sen\,x\,dx = -e^x Cos\,x + \left[e^x Sen\,x - \int e^x Sen\,x\,dx\right]$

$2\int e^x Sen\,x\,dx = -e^x Cos\,x + e^x Sen\,x$

$\int e^x Sen\,x\,dx = \frac{-e^x Cos\,x + e^x Sen\,x}{2} + c = \frac{e^x}{2}(Sen\,x - Cos\,x) + c$

Resolviendo Por Partes.

Así queda una Integral: I_1, cuya resolución necesita de una nueva aplicación del Método.

Reiterando la Integración Por Partes sobre I_1. Reemplazando sus partes.

Lo obtenido se reemplaza en la Integral que se estaba resolviendo.

La Integral que queda o resultante, es la misma que la Integral original.

Ordenando y despejando algebraicamente esa Integral original, se obtiene el resultado final.

8-14 Aplicando el Método de Por Partes, Integrar:

a) $\int Sec^3x\,dx$

$\int Sec^3x\,dx = \int [Sec\,x]\,[Sec^2x\,dx]$ $\qquad u = Sec\,x \qquad dv = Sec^2x\,dx$

$\qquad du = Sec\,x\,Tan\,x\,dx \qquad v = Tan\,x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int Sec^3x\,dx = Sec\,x\,Tan\,x - \int Tan\,x\,Sec\,x\,Tan\,x\,dx$

Se descompone la Función a integrar, para luego elegir las Partes.

$= Sec\,x\,Tan\,x - \int Tan^2x\,Sec\,x\,dx$

Aplicando el Método.

$= Sec\,x\,Tan\,x - \int (Sec^2x - 1)\,Sec\,x\,dx$

Ordenando y simplificando se obtiene la misma Integral original.

$\int Sec^3x\,dx = Sec\,x\,Tan\,x - \int Sec^3x\,dx + \int Sec\,x\,dx$

Operando algebraicamente, se traspone de miembro y se suma. Tal como en P-8-13-c

$2\int Sec^3x\,dx = Sec\,x\,Tan\,x + \int Sec\,x\,dx$

La Integral de: $Sec\,x$ es conocida, reemplazando su resultado.

$2\int Sec^3x\,dx = Sec\,x\,Tan\,x + Ln\,|Sec\,x + Tan\,x|$

Despejando la Integral requerida.

$$\int Sec^3x\,dx = \frac{Sec\,x\,Tan\,x + Ln\,|Sec\,x + Tan\,x|}{2} + c$$

b) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx =$

Para integrar, previamente se aplica el Método de Sustitución.

$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = ? \quad Si: \quad z^2 = x \Rightarrow 2z\,dz = dx$

Así queda una Integral, que al ser un Producto de Funciones, requiere del Método de Por Partes. Usando los resultados del Ej 8-11.

$= \int e^z\,2z\,dz = 2\int z\,e^z\,dz$

$= 2(z\,e^z - e^z) + c = 2(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + c$

c) $\int Arctan\sqrt{x}\,dx$

Previamente se aplica el Método de Sustitución.

$\int Arctan\sqrt{x}\,dx = ? \qquad Si: \quad z^2 = x \Rightarrow 2z\,dz = dx$

Queda así la Integral I_1, que requiere del Método de Por Partes.

$= \int Arctan\,z\,2z\,dz = 2\int Arctan\,z\,z\,dz = 2I_1$

Eligiendo Partes y aplicando el método para resolver: I_1

$I_1 = \int [Arctan\,z]\,[z\,dz] \qquad u = Arctan\,z \qquad dv = z\,dz$

$\qquad du = \frac{1}{z^2+1}dz \qquad v = \frac{z^2}{2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Queda una Integral de una Fracción, que requiere de una división previa a su resolución.

$$I_1 = \int Arctan\,z\,z\,dz = Arctan\,z\,\frac{z^2}{2} - \int \frac{z^2}{2}\,\frac{1}{z^2+1}\,dz$$

Efectuando la división y ordenando

$$= \frac{z^2}{2}Arctan\,z - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{z^2+1}\right)dz$$

Integrando.

$$= \frac{z^2}{2}Arctan\,z - \frac{1}{2}(z - Arctan\,z) + c$$

Reemplazando resultados en la Integral original.

Retornando a la Variable original.

$$\int Arctan\sqrt{x}\,dx = 2(I_1) = 2\left(\frac{z^2}{2}Arctan\,z - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}Arctan\,z\right) + c$$

$$= x\,Arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + Arctan\sqrt{x} + c$$

FÓRMULAS DE RECURRENCIA

Las Fórmulas de Recurrencia son Fórmulas reiterativas, permiten disminuir el grado de una expresión, para así luego permitir el cálculo de la Integral. Usualmente estas Fórmulas se deducen usando el Método de Integración de Por Partes.

Ej 8-12 $\int Ln^m x\, dx$

$\int Ln^m x\, dx = \int [Ln^m x]\,[dx]\;;\quad u = Ln^m x \qquad dv = dx$

$du = m\,Ln^{m-1}x\,\frac{1}{x}dx \qquad v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int Ln^m x\, dx = Ln^m x\; x - \int x\, m\,Ln^{m-1}x\,\frac{1}{x}\,dx$

$= x\,Ln^m x - m\int Ln^{m-1}x\,dx$

La expresión tiene un grado general: m integrando Por Partes

Queda una Integral donde el grado de $Ln\,x$ es: m-1

La Fórmula se usó en: P-8-7-b

8-15 Usando el Método de Por Partes, deducir las Formulas de Recurrencia de:

a) $\int Sen^m x\, dx$

$\int Sen^m x\,dx = \int [Sen^{m-1}x]\,[Sen\,x\,dx] \qquad u = Sen^{m-1}x \qquad dv = Sen\,x\,dx$

$du = (m-1)Sen^{m-2}x\;Cos\,x\,dx \qquad v = -Cos\,x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = \int Sen^m x\,dx = Sen^{m-1}x\,(-Cos\,x) - \int(-Cos\,x)(m-1)\,Sen^{m-2}x\,Cos\,x\,dx$

$I = -Sen^{m-1}x\,Cos\,x + (m-1)\int Cos^2 x\,Sen^{m-2}x\,dx$

$I = -Sen^{m-1}x\,Cos\,x + (m-1)\int (1-Sen^2 x)\,Sen^{m-2}x\,dx$

$I = -Sen^{m-1}x\,Cos\,x + (m-1)\int Sen^{m-2}x\,dx - (m-1)\int Sen^m x\,dx$

$I = -Sen^{m-1}x\,Cos\,x + (m-1)\int Sen^{m-2}x\,dx - (m-1)\,I$

$$\Rightarrow\quad I = \frac{-Sen^{m-1}x\,Cos\,x}{m} + \frac{m-1}{m}\int Sen^{m-2}\,dx$$

Luego de descomponer la Función: $Sen^m x$

Se aplica el Método de Por Partes.

Como se obtiene la misma Integral original I, se la despeja algebraicamente.

b) $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^m}\,dx$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^m}\,dx = \frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^m}\,dx = \frac{1}{a^2}\left(\int\frac{1}{(a^2+x^2)^{m-1}}\,dx - \int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^m}\,dx\right)$$

$I_1 = \int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^m}\,dx = \int x\,\frac{x}{(a^2+x^2)^m}\,dx \qquad u = x \qquad dv = \frac{x}{(a^2+x^2)^m}\,dx$

$du = dx$

$v = \int\frac{x}{(a^2+x^2)^m}\,dx = ?\quad$ Si: $\quad z = a^2+x^2 \;\Rightarrow\; dz = 2x\,dx$

$= -\frac{1}{2(m-1)z^{m-1}} = -\frac{1}{(2m-2)(a^2+x^2)^{m-1}}$

Al aplicar el Método se requiere el cálculo de: v Se lo efectúa por el Método de Sustitución.

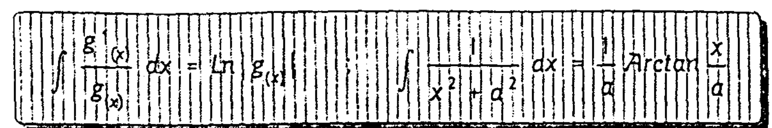
$$I_1 = \int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^m}\,dx = x\left[\frac{-1}{(2m-2)(a^2+x^2)^{m-1}}\right] - \int\frac{-1}{(2m-2)(a^2+x^2)^{m-1}}\,dx$$

$$\int\frac{1}{(a^2+x^2)^m}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\int\frac{1}{(a^2+x^2)^{m-1}}\,dx - \left(\frac{-x}{(2m-2)(a^2+x^2)^{m-1}} + \int\frac{1}{(2m-2)(a^2+x^2)^{m-1}}\,dx\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{(2m-2)(a^2+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{1}{(a^2+x^2)^{m-1}}\,dx\right]$$

VIII-7 MÉTODO EXPRESIONES CUADRÁTICAS

El Método de Expresiones Cuadráticas, consiste en la aplicación de las siguientes Fórmulas Generales de Integración.



$$\int \frac{g'_{(x)}}{g_{(x)}}\,dx = Ln\,|g_{(x)}| \qquad ; \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,Arctan\,\frac{x}{a}$$

El Método de Expresiones Cuadráticas, se aplica fundamentalmente sobre Funciones Algebraicas, que poseen Expresiones Cuadráticas en su denominador.

Si: $\int \frac{g'_{(x)}}{g_{(x)}}\,dx = Ln\,[g_{(x)}] \Rightarrow \left[Ln\,[g_{(x)}]\right]' = \frac{1}{g_{(x)}}\,g'_{(x)} = \frac{g'_{(x)}}{g_{(x)}}$

Si: $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,Arctan\,\frac{x}{a} \Rightarrow \left[\frac{1}{a}\,Arctan\,\frac{x}{a}\right]' = \frac{1}{a}\,\frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}\,\frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}$

La verificación de estas Fórmulas se efectúa por simple derivación:

Ej 8-13

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$$

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = Ln\,|x^3+1| + c$$

En la Función que se va a integrar, el numerador es la Derivada del denominador.

Por tanto se satisface la Fórmula, luego su resultado se puede determinar directamente.

8-16 Aplicando la Fórmula 1 del método de Expresiones Cuadráticas, resolver:

a)
$$\int \frac{2x}{x^2-5}\,dx$$
$$\int \frac{2x}{x^2-5}\,dx = Ln\,|x^2-5| + c$$

b)
$$\int \frac{Cos\,x}{Sen\,x+3}\,dx$$
$$\int \frac{Cos\,x}{Sen\,x+3}\,dx = Ln\,|Sen\,x+3| + c$$

Verificando que la Derivada del denominador se encuentra en el numerador, se aplica la Fórmula correspondiente. (Otro modo ver P-8-9, P-8-10)

8-17 Resolver las siguientes Integrales usando la Primera Fórmula del método.

a)
$$\int \frac{x^7}{x^8+1}\,dx$$
$$\int \frac{x^7}{x^8+1}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x^7}{x^8+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\,Ln\,|x^8+1| + c$$

La Derivada del denominador no está exactamente en el numerador (Falta la constante: 8)

Multiplicando y dividiendo por 8 ; La multiplicación dentro de la Integral, la división fuera. (O operación correcta por tratarse de una constante). Aplicando la Fórmula correspondiente.

b)
$$\int \frac{x^5}{x^6+1}\,dx$$
$$\int \frac{x^5}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5}{x^6+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\,Ln\,|x^6+1| + c$$

c)
$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx$$
$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\,Ln\,|x^2+a^2| + c$$

Ej 8-14 Aplicando la Segunda Fórmula del método de expresiones Cuadráticas se integra:

$$\int \frac{1}{x^2+3^2}\,dx$$
$$\int \frac{1}{x^2+3^2}\,dx = \frac{1}{3}\,Arctan\,\frac{x}{3} + c$$

Para aplicar la Fórmula 2 del método de Expresiones Cuadráticas, se considera: $a = 3$. Esta Fórmula se llama también la Fórmula del Arco Tangente.

8-18 Calcular las siguientes Integrales:

a) $\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$

$\int \frac{1}{x^2+7}\,dx = \int \frac{1}{x^2+\sqrt{7}^2}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} Arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + c$

b) $\int \frac{5}{3x^2+12}\,dx$

$\int \frac{5}{3x^2+12}\,dx = 5\int \frac{1}{3(x^2+4)}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx$

$= \frac{5}{3}\,\frac{1}{2} Arctan \frac{x}{2} + c = \frac{5}{6} Arctan \frac{x}{2} + c$

c) $\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx$

$\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-3^2+13}\,dx$

$= \int \frac{1}{(x+3)^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2} Arctan \frac{x+3}{2} + c$

Para tener la Forma General requerida por la Fórmula, se precisa efectuar el proceso de COMPLETAR CUADRADOS en el denominador.

En ese proceso: Se forma un Binomio al cuadrado entre la variable y la mitad del Coeficiente Lineal, luego restando el cuadrado de esa mitad. (Ver Ej-4-16). Aplicando luego la Fórmula.

8-19 Usando las Fórmulas del Método de Cuadráticas, resolver las Integrales:

a) $\int \frac{x}{x^2+8x+17}\,dx$

$\int \frac{x}{x^2+8x+17}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+8x+17}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8-8}{x^2+8x+17}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+8}{x^2+8x+17} + \frac{-8}{x^2+8x+17}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+8}{x^2+8x+17}\,dx + (-8)\int \frac{1}{(x+4)^2+1^2}\,dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[Ln|x^2+8x+17| - 8\,\frac{1}{1} Arctan \frac{x+4}{1} + c\right]$

Se busca la forma de la Fórmula 1. (Derivada del numerador en el denominador)

Se multiplica y divide por 2; Se suma y resta 8, se descompone en dos Fracciones.

La 1^{era} Fracción se considera resuelta. Se completan Cuadrados en la 2da Fracción. Se integra cada Fracción con Fórmulas del Método.

b) $\int \frac{2x^2+9x+77}{x^2+4x+40}\,dx$

$\int \frac{2x^2+9x+77}{x^2+4x+40}\,dx = \int \left(2 + \frac{x-3}{x^2+4x+40}\right)dx = 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2(x-3)}{x^2+4x+40}\,dx$

$= 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2+4x+40}\,dx = 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4-6}{x^2+4x+40}\,dx$

$= 2x + \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+4}{x^2+4x+40} + \frac{-10}{x^2+4x+40}\right)dx$

$= 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+40}\,dx - 5\int \frac{1}{(x+2)^2+6^2}\,dx$

$= 2x + \frac{1}{2}\left[Ln|x^2+4x+40| - 5\,\frac{1}{6} Arctan \frac{x+2}{6} + c\right]$

Dividiendo la Fracción por no ser Propia.

Multiplicando, dividiendo por 2 en la Fracción. Sumando, restando 4. Descomponiendo en dos fracciones.

Así la 1^{era} Fracción tiene a la Derivada del denominador en el numerador. Completando cuadrados en la 2da.

d) $\int \frac{1}{x^2+10x+21}\,dx$

$\int \frac{1}{x^2+10x+21}\,dx = \int \frac{1}{(x+5)^2-5^2+21}\,dx = \int \frac{1}{(x+5)^2-2^2}\,dx = ?$

Al completar Cuadrados, queda una Diferencia de cuadrados en el denominador. Por lo que no sirve el Método (Ver P-8-31-b)

VIII-8 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

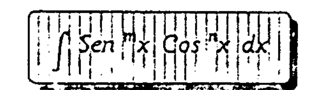
Son Integrales trigonométricas, aquellas que contienen Funciones Trigonométricas. Se presentan los siguientes tres tipo principales:

A) $\int Sen^m x\ Cos^n x\ dx$ B) $\int Tan^m x\ Sec^n x\ dx$ C) $\int Cot^m x\ Csc^n x\ dx$

Las Potencias: m, n son Números Naturales (En algunos casos, se generalizan a Números Reales).

Cada Tipo de Integral Trigonométrica a su vez tendrá 4 casos característicos, de acuerdo a la paridad de las potencias: m, n (Cuando sean pares o impares). Existirán entonces diversas Técnicas de Integración, para cada caso.

TIPO A



I) Si: m es Par ; n es Impar
II) Si: m es Impar ; n es Par
III) Si: m es Impar ; n es Impar
IV) Si: m es Par ; n es Par

CASOS: I, II, III.- En estos 3 primeros casos para integrar, se aplica la Regla:

"Se reserva para el Diferencial un Término de la Función de potencia impar, llevando el resto a términos de la Función de potencia par con la que se efectúa un Cambio de variable". (En el caso III, se hace el Cambio con cualquiera de las Funciones indistintamente)

Ej 8-15 Se calcula una Integral Trigonométrica del Tipo A, Caso I) m Par, n Impar

$$\int Sen^2 x\ Cos^3 x\ dx$$

$$\int Sen^2 x\ Cos^3 x\ dx = ? \quad \text{Si: } u = Sen\,x \Rightarrow du = Cos\,x\ dx$$

Cambio de variable con la Función de potencia par ($Sen\,x$)

$$= \int Sen^2 x\ Cos^2 x\ \underline{Cos\,x\ dx}$$

$$= \int Sen^2 x\,(1 - Sen^2 x)\ \underline{Cos\,x\ dx}$$

Se reserva para uso del Diferencial del Cambio de variable, un Término de la Función de Potencia impar ($Cos\,x\,dx$)

$$= \int u^2(1 - u^2)\ \underline{du} = \int (u^2 - u^4)\ du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{Sen^3 x}{3} - \frac{Sen^5 x}{5} + c$$

Se lleva el resto a términos de la Función de potencia par. Resolviendo luego por el Método de Sustitución. (Usando el cambio de variable anterior $u = Sen\,x$)

8-20 Aplicando la correspondiente Regla, integrar:

a) $\int Sen^3 x\ Cos^6 x\ dx = ? \quad \text{Si: } u = Cos\,x \Rightarrow du = -Sen\,x\ dx$

$$= \int Sen^2 x\ Cos^6 x\ \underline{Sen\,x\ dx} = \int (1 - Cos^2 x)\,Cos^6 x\ \underline{Sen\,x\ dx}$$

$$= \int (1 - u^2)\,u^6\ \underline{(-du)} = \int (u^8 - u^6)\ du$$

$$= \frac{u^9}{9} - \frac{u^7}{7} + c = \frac{Cos^9 x}{9} - \frac{Cos^7 x}{7} + c$$

Caso: ii) Donde: m Impar; n Par.

El Cambio es con la Función de potencia par. Llevando el resto a Términos de esta Función, luego de reservar un Término de la de potencia impar para Diferencial.

b) $\int Sen^7 x\ Cos^5 x\ dx = ? \quad \text{Si: } u = Sen\,x \Rightarrow du = Cos\,x\ dx$

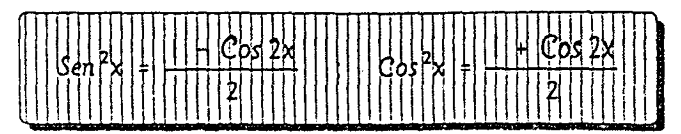
$$= \int Sen^7 x\ Cos^4 x\ \underline{Cos\,x\ dx} = \int Sen^7 x\,(1 - Sen^2 x)^2\ \underline{Cos\,x\ dx}$$

$$= \int u^7(1 - u^2)^2\ \underline{du} = \int (u^7 - 2u^9 + u^{11})\ du$$

$$= \frac{u^8}{8} - 2\frac{u^{10}}{10} + \frac{u^{12}}{12} + c = \frac{Sen^8 x}{8} - 2\frac{Sen^{10} x}{10} + \frac{Sen^{12} x}{12} + c$$

En este caso el Cambio de variable se efectúa con cualquiera de las Funciones

CASO IV Si: m es Par ; n es Par; En este caso, para integrar, se usan las Fórmulas del Ángulo Medio: (Estas Fórmulas se emplean tantas veces como requiera la Integración)



$$Sen^2x = \frac{1 - Cos\, 2x}{2} \qquad Cos^2x = \frac{1 + Cos\, 2x}{2}$$

Ej 8-16 Se calcula una Integral Tipo A, caso IV (Donde ambas Potencias son Pares)

$$\int Sen^2x\ Cos^2x\ dx$$

$$\int Sen^2x\ Cos^2x\ dx = \int [\frac{1 - Cos\, 2x}{2}]\ [\frac{1 + Cos\, 2x}{2}]\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - Cos^2 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \frac{1 + Cos\, 4x}{2})\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - Cos\, 4x)\ dx$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{Sen\, 4x}{4}) + c$$

Caso IV: Las Potencias son: 2 y 2 (Ambas son pares)

Aplicando las Fórmulas del Ángulo Medio.

Efectuando el Producto que queda (Producto de Suma por Diferencia)

Nuevamente queda una Potencia par, donde se generaliza la Fórmula del Ángulo Medio. (Se duplica el Ángulo).

Note que: $\int Cos\, ax\ dx = \frac{Sen\, ax}{a}$

8-21 Aplicando las respectivas Reglas de Integración, calcular:

a) $\int Sen^2x\ dx$

$$\int Sen^2x\ dx = \int \frac{1 - Cos\, 2x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int (1 - Cos\, 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}(x - \frac{Sen\, 2x}{2}) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}Sen\, 2x + c$$

Caso IV, se asume Potencias 2 y 0

Potencias pares, aplicando las Fórmulas del Ángulo Medio.

Integrando.

b) $\int Sen^2x\ Cos^4x\ dx$

$$\int Sen^2x\ Cos^4x\ dx = \int \left[\frac{1 - Cos\, 2x}{2}\right]\left[\frac{1 + Cos\, 2x}{2}\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - Cos\, 2x)(1 + 2\, Cos\, 2x + Cos^2 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1 + Cos\, 2x - Cos^2 2x - Cos^3 2x\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int dx + \int Cos\, 2x\ dx - \int Cos^2 2x\ dx - \int Cos^3 2x\ dx\right]$$

$$I_3 = \int Cos^2 2x\ dx = \int [\frac{1 + Cos\, 4x}{2}]\ dx = \frac{1}{2}(x + \frac{Sen\, 4x}{4})$$

$$I_4 = \int Cos^3 2x\ dx = \int [1 - Sen^2 2x]\ \underline{Cos\, 2x\ dx} \quad : \quad \begin{aligned} u &= Sen\, 2x \\ du &= 2\, Cos\, 2x\ dx \end{aligned}$$

$$= \int (1 - u^2)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}(u - \frac{u^3}{3}) = \frac{1}{2}(Sen\, 2x - \frac{1}{3}Sen^3 2x)$$

$$\int Sen^2x\ Cos^4x\ dx = \frac{1}{8}\left[x + \frac{Sen\, 2x}{2} - \frac{1}{2}(x + \frac{Sen\, 4x}{4}) - \frac{1}{2}(Sen\, 2x - \frac{Sen^3 2x}{3})\right] + c$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}Sen\, 4x + \frac{1}{48}Sen^3 2x + c$$

Integral del CASO IV.

Usando las Fórmulas del Ángulo Medio las veces que se precise.

Reordenando quedan Integrales del Caso IV como Caso III.

Se integran separadamente aplicando las Reglas que corresponden a cada caso.

Reuniendo todos los resultados obtenidos.

TIPO B $\int Tan^m x \, Sec^n x \, dx$

I) Si: m es Par ; n es Impar
II) Si: m es Impar ; n es Par
III) Si: m es Impar ; n es Impar
IV) Si: m es Par ; n es Par

CASOS II ; IV (La Función *Secante* es de Potencia Par) En estos dos casos, se efectúa un Cambio de variable con la Función: $Tan\,x$; Separando previamente el Término: Sec^2x para el Diferencial, expresando el resto de la expresión a integrar en términos de: $Tan\,x$

Ej 8-17 Se calcula la siguiente Integral Trigonométrica de tipo: B

$$\int Tan^3x \, Sec^4x \, dx$$

Caso II), donde: m Impar, n Par

$$\int Tan^3x \, Sec^4x \, dx = ? \quad \text{Si:} \quad u = Tan\,x \Rightarrow du = Sec^2x \, dx$$

Cambio de variable con la Función: $Tan\,x$, calculando además su Diferencial.

$$\int Tan^3x \, Sec^4x \, dx = \int Tan^3x \, Sec^2x \, \underline{Sec^2x \, dx}$$

Separando para el Diferencial la expresión: Sec^2x

$$= \int Tan^3x \, (Tan^2x + 1) \, \underline{Sec^2x \, dx}$$

$$= \int u^3 (u^2 + 1) \, \underline{du} = \int (u^5 + u^3) \, du$$

Llevando el resto de la expresión a términos de: $Tan\,x$

$$= \frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + c = \frac{Tan^6x}{6} + \frac{Tan^4x}{4} + c$$

Luego se resuelve la Integral por el Método de Sustitución.

8-22 Aplicando las correspondientes Reglas de Integración, calcular:

$$\int Tan^8x \, Sec^6x \, dx$$

$$\int Tan^8x \, Sec^6x \, dx = ? \qquad \text{Si:} \quad u = Tan\,x \Rightarrow du = Sec^2x \, dx$$

Separando para el Diferencial la expresión: Sec^2x

$$\int Tan^8x \, Sec^6x \, dx = \int Tan^8x \, (Sec^4x) \, \underline{Sec^2x \, dx}$$

$$= \int Tan^8x \, (Tan^2x + 1)^2 \, \underline{Sec^2x \, dx}$$

$$= \int u^8 (u^2 + 1)^2 \, \underline{du} = \int (u^{12} + 2u^{10} + u^8) \, du$$

$$= \frac{u^{13}}{13} + 2\frac{u^{11}}{11} + \frac{u^9}{9} + c = \frac{Tan^{13}x}{13} + 2\frac{Tan^{11}x}{11} + \frac{Tan^9x}{9} + c$$

Llevando el resto a términos de $Tan\,x$, función con la que se hace un Cambio de variable

CASO III (Si: m es Impar; n es Impar) En este caso se efectúa un Cambio de variable con la Función: $Sec\,x$; expresando el resto de la Función a integrar en términos de la Función: $Sec\,x$; reservando previamente para el Diferencial del Cambio de variable la expresión: $Sec\,x\,Tan\,x$

Ej 8-18 Resolviendo la Integral Trigonométrica del caso: III)

$$\int Tan^3x \, Sec^5x \, dx$$

Caso III), donde: m y n son Impares.

$$\int Tan^3x \, Sec^5x \, dx = ? \quad \text{Si:} \quad u = Sec\,x \Rightarrow du = Sec\,x \, Tan\,x \, dx$$

Cambio de Variable con la Función: $Sec\,x$

$$\int Tan^3x \, Sec^5x \, dx = \int Tan^2x \, Sec^4x \, \underline{Sec\,x \, Tan\,x \, dx}$$

$$= \int (Sec^2x - 1) \, Sec^4x \, \underline{Sec\,x \, Tan\,x \, dx}$$

$$= \int (u^2 - 1) \, u^4 \, \underline{du} = \int (u^6 - u^4) \, du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{Sec^7x}{7} - \frac{Sec^5x}{5} + c$$

Separando: $Sec\,x\,Tan\,x$ para Diferencial, el resto se lleva a términos de: $Sec\,x$ Luego se resuelve por Sustitución

CASO I (Si: m es Par, n es Impar) En este caso se lleva toda la expresión que se debe integrar, a Términos de la Función *Sec x*, integrando luego con el Método de Por Partes.

Ej 8-19 Se resuelve la siguiente Integral Trigonométrica Tipo B Caso I:

$$\int Tan^2x\ Sec^3x\ dx$$

Se lleva toda la Integral a Términos de la Función: *Sec x*

$$\int Tan^2x\ Sec^3x\ dx = \int (Sec^2x - 1)\,Sec^3x\ dx$$

$$= \int Sec^5x\ dx - \int Sec^3x\ dx = I_1 - I_2$$

La Integral I_2 se resolvió anteriormente en: P-8-14-a

$$I_2 = \int Sec^3x\ dx = \frac{1}{2}(Sec\,x\ Tan\,x + Ln\,|Sec\,x + Tan\,x|)$$

Resolviendo I_1 Por Partes.

$$I_1 = \int Sec^5x\ dx = \int [Sec^3x]\,[Sec^2x\ dx] \qquad u = Sec^3x \qquad dv = Sec^2x\ dx$$

$$du = 3\,Sec^2x\,Sec\,x\,Tan\,x\,dx \qquad v = Tan\,x$$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

Se reemplazan las Partes y se simplifica.

$$I_1 = \int Sec^5x\ dx = Sec^3x\ Tan\,x - \int Tan\,x\ 3\,Sec^2x\,Sec\,x\,Tan\,x\ dx$$

$$= Sec^3x\ Tan\,x - 3\int Tan^2x\ Sec^3x\ dx$$

Se observa que como Integral resultante se logra la misma I_1

$$= Sec^3x\ Tan\,x - 3\int (Sec^2x - 1)\,Sec^3x\ dx$$

Corresponde entonces despejar algebraicamente a I_1

$$= Sec^3x\ Tan\,x - 3\int Sec^5x\ dx + 3\int Sec^3x\ dx$$

$$I_1 = Sec^3x\ Tan\,x - 3\,I_1 + 3I_2 = Sec^3x\ Tan\,x - 3\,I_1 + 3\,\frac{1}{2}(Sec\,x\ Tan\,x + Ln\,|Sec\,x + Tan\,x|)$$

$$4\,I_1 = Sec^3x\ Tan\,x + \frac{3}{2}(Sec\,x\ Tan\,x + Ln\,|Sec\,x + Tan\,x|)$$

$$I_1 = \frac{1}{4}Sec^3x\ Tan\,x + \frac{3}{8}[Tan\,x\ Sec\,x + Ln\,|Sec\,x + Tan\,x|]$$

$$\int Tan^2x\ Sec^3x\ dx = I_1 - I_2 = \frac{1}{4}Sec^3x\ Tan\,x - \frac{1}{8}Tan\,x\ Sec\,x - \frac{1}{8}Ln\,|Sec\,x + Tan\,x| + c$$

TIPO C



I) Si: m es Par ; n es Impar
II) Si: m es Impar ; n es Par
III) Si: m es Impar ; n es Impar
IV) Si: m es Par ; n es Par

Para todos los casos de las Integrales de este Tipo, se aplican las Reglas de Integración correspondientes a las Integrales del TIPO B (Se deben identificar: $Tan\,x \to Cot\,x$; $Sec\,x \to Csc\,x$)

Los Casos II; III pueden resolverse también llevando a Términos de: *Sen x* ; *Cos x*

Ej 8-20 Se resuelve la siguiente Integral Trigonométrica del Tipo: C ; Caso IV

$$\int Cot^2x\ Csc^4x\ dx$$

Esta Integral es equivalente al Caso IV del Tipo B.

$$\int Cot^2x\ Csc^4x\ dx = \ ? \qquad Si: \quad u = Cot\,x \Rightarrow du = -Csc^2x$$

Se efectúa un Cambio de variable con la Función *Cot* dejando el Término Csc^2x para el Diferencial del Cambio de variable.

$$\int Cot^2x\ Csc^4x\ dx = \int Cot^2x\ Csc^2x\ \underline{Csc^2x\ dx}$$

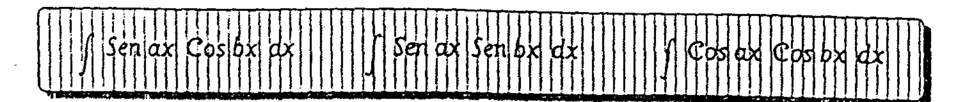
$$= \int Cot^2x\,(Cot^2x + 1)\ \underline{Csc^2x\ dx}$$

$$= \int u^2\,(u^2 + 1)\,\underline{(-du)} = -\int (u^4 + u^2)\ du$$

El resto de la expresión se lleva a términos de la *Cotangente*.

$$= -\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c = -\frac{Cot^5x}{5} - \frac{Cot^3x}{3} + c$$

TIPO D



Este tipo de Integrales Trigonométricas, comprende a Productos de Funciones Trigonométricas, que poseen diferentes ángulos, se resumen en los casos indicados.

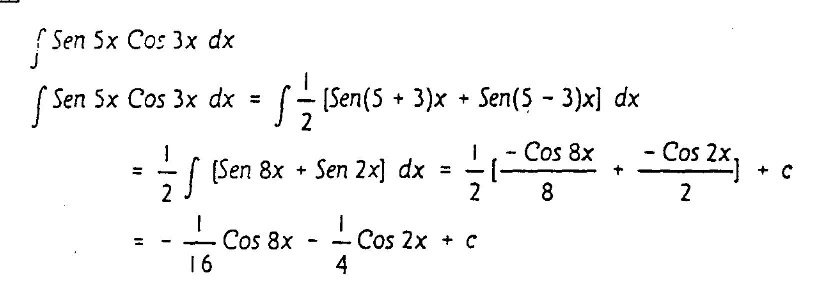
Para resolver estas Integrales, se usan las siguientes Fórmulas Trigonométricas:

$$Sen\,ax\ Cos\,bx = \frac{1}{2}[Sen(a+b)x + Sen(a-b)x] \qquad (1)$$

$$Sen\,ax\ Sen\,bx = \frac{1}{2}[Cos(a-b)x - Cos(a+b)x] \qquad (2)$$

$$Cos\,ax\ Cos\,bx = \frac{1}{2}[Cos(a-b)x + Cos(a+b)x] \qquad (3)$$

<u>Ej 8-21</u> Se calcula la siguiente Integral Trigonométrica del Tipo: D



$$\int Sen\,5x\ Cos\,3x\ dx$$

$$\int Sen\,5x\ Cos\,3x\ dx = \int \frac{1}{2}[Sen(5+3)x + Sen(5-3)x]\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [Sen\,8x + Sen\,2x]\ dx = \frac{1}{2}[\frac{-Cos\,8x}{8} + \frac{-Cos\,2x}{2}] + c$$

$$= -\frac{1}{16}Cos\,8x - \frac{1}{4}Cos\,2x + c$$

Integral Trigonométrica, donde los Ángulos de las Funciones son diferentes entre sí.

Aplicando la Fórmula <u>(1)</u>. Note el uso del Prob. P-8-10-f

8-23 Aplicando la respectiva Regla de Integración, calcular:

a) $\int Sen\frac{x}{2}\ Sen\frac{x}{3}\ dx$

$$\int Sen\frac{x}{2}\ Sen\frac{x}{3}\ dx = \int\frac{1}{2}\left[Cos\,(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})x - Cos\,(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x\right]dx = \frac{1}{2}\int(Cos\frac{1}{6}x - Cos\frac{5}{6}x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{Sen(x/6)}{1/6} - \frac{Sen(5x/6)}{5/6}\right] + c = 3\,Sen\frac{x}{6} - \frac{3}{5}Sen\frac{5x}{6} + c$$

b) $\int Sen^2 3x\ Cos\,2x\ dx$

$$\int Sen^2 3x\ Cos\,2x\ dx = \int Sen\,3x\ [Sen\,3x\ Cos\,2x]\ dx$$

$$= \int Sen\,3x\,[\frac{1}{2}(Sen\,5x + Sen\,x)]\ dx = \frac{1}{2}\int[Sen\,3x\ Sen\,5x + Sen\,3x\ Sen\,x]\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int[\frac{1}{2}(Cos(-2x) - Cos\,8x) + \frac{1}{2}(Cos\,2x - Cos\,4x)]\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(2\,Cos\,2x - Cos\,8x - Cos\,4x)\ dx = \frac{1}{4}(2\frac{Sen\,2x}{2} - \frac{Sen\,8x}{8} - \frac{Sen\,4x}{4}) + c$$

$$= \frac{1}{4}Sen\,2x - \frac{1}{32}Sen\,8x - \frac{1}{16}Sen\,4x + c$$

Sen^2x se descompone.

Luego se aplican las Fórmulas en dos ocasiones, hasta eliminar los Productos.

Note: $Cos(-a) = Cos\,a$

c) $\int Cos\,3x\ Cos\,2x\ Cos\,x\ dx$

$$\int Cos\,3x\ (Cos\,2x\ Cos\,x)\ dx = \int Cos\,3x\,\frac{Cos\,x + Cos\,3x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int(Cos\,3x\,Cos\,x + Cos\,3x\,Cos\,3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{2}(Cos\,2x + Cos\,4x) + \frac{1}{2}(Cos\,6x + Cos\,0x)\right]dx = \frac{1}{4}\int(1 + Cos\,2x + Cos\,4x + Cos\,6x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}(x + \frac{Sen\,2x}{2} + \frac{Sen\,4x}{4} + \frac{Sen\,6x}{6}) + c$$

VIII-9 SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Si una Función a integrar, contiene Radicales, se usan las siguientes Sustituciones, para cada Forma General de Radical.

Si: $\int f(\sqrt{\quad})\, dx$	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\Rightarrow$	$x = a\ Sen\,\theta$
	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\Rightarrow$	$x = a\ Tan\,\theta$
	$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\Rightarrow$	$x = a\ Sec\,\theta$

Las indicadas Sustituciones Trigonométricas, permiten la eliminación de los Radicales, llevando la expresión a integrar a una Forma Trigonométrica.

[redacted] Se calcula la Integral de la Siguiente Función, que contiene Radicales:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2^2 - x^2}}\, dx$$

Integral de Función que contiene a un Radical de la primera forma.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2^2 - x^2}}\, dx = ? \qquad \text{Si: } x = 2\ Sen\,\theta \Rightarrow dx = 2\ Cos\,\theta\ d\theta$$

Por la forma del Radical se usa la Sustitución indicada. Se toma $a = 2$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{(2\ Sen\,\theta)^3}{\sqrt{2^2 - (2\ Sen\,\theta)^2}}\, 2\ Cos\,\theta\ \theta = \int \frac{16\ Sen^3\theta\ Cos\,\theta}{\sqrt{2^2(1 - Sen^2\theta)}}\, d\theta$$

Reemplazando y simplificando por propiedades trigonométricas.

$$= \int \frac{16\ Sen^3\theta\ Cos\,\theta}{2\ Cos\,\theta}\, d\theta = 8\int Sen^3\theta\ d\theta$$

Así se obtiene una Integral Trigonométrica. Que es del Tipo A, caso II

$$8\int Sen^3\theta\ d\theta = ? \qquad \text{Si: } u = Cos\,\theta \Rightarrow du = -Sen\,\theta\ d\theta$$

$$= 8\int Sen^2\theta\ Sen\,\theta\ d\theta = 8\int (1 - Cos^2\theta)\, Sen\,\theta\ d\theta$$

$$= 8\int (1 - u^2)(-du) = 8\int (u^2 - 1)\, du = 8\left(\frac{u^3}{3} - u\right) + c$$

$$= \frac{8}{3}u^3 - 8u + c = \frac{8}{3}Cos^3\theta - 8\,Cos\,\theta + c$$

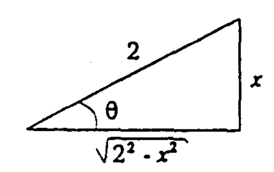
De acuerdo a este tipo se asume en la Integral que la Función *Cos* posee Potencia cero, luego de la Sustitución se integra directamente.

Para retornar a la Variable original, se conforma un Triángulo rectángulo, cuyos lados se obtienen a partir del Cambio de variable.

Si: $x = 2\ Sen\,\theta$

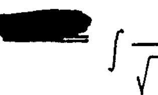
$\Rightarrow Sen\,\theta = \dfrac{x}{2}$

Del Cambio de variable se despeja la Función trigonométrica. Según su definición x será el cateto opuesto, 2 la hipotenusa. Luego por Pitágoras se determina el valor del restante lado.



$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2^2 - x^2}}\, dx = \frac{8}{3}\left[\frac{\sqrt{2^2 - x^2}}{2}\right]^3 - 8\left[\frac{\sqrt{2^2 - x^2}}{2}\right] + c$$

La Función *Coseno* del resultado se determina a partir del Triángulo según su definición, reemplazando en el resultado.


[redacted]

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = ? \qquad \text{Si: } x = Sen\,\theta \Rightarrow dx = Cos\,\theta\ d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - Sen^2\theta}}\, Cos\,\theta\ d\theta = \int \frac{Cos\,\theta}{Cos\,\theta}\, d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta + c = Arcsen\ x$$

En esta Integral, luego de resolverla, es posible volver directamente a la variable original

8-24 Aplicando la correspondiente Sustitución Trigonométrica, integrar:

a) $\int \frac{\sqrt{x^2+3^2}}{x^4}\,dx$

La forma del Radical requiere de la Sustitución con la Función: *Tan x*

$\int \frac{\sqrt{x^2+3^2}}{x^4}\,dx = ?$ Si: $x = 3\,Tan\,\theta \Rightarrow dx = 3\,Sec^2\theta\,d\theta$

Desaparece el Radical.

$= \int \frac{\sqrt{(3\,Tan\,\theta)^2+3^2}}{(3\,Tan\,\theta)^4}\,3\,Sec^2\theta\,d\theta = \int \frac{\sqrt{3^2(Tan^2\theta+1)}}{3^4\,Tan^4\theta}\,3\,Sec^2\theta\,d\theta$

Queda una Integral Trigonométrica. Se lleva a términos de *Sen x, Cos x*

$= \int \frac{3\,Sec\,\theta}{3^4\,Tan^4\theta}\,3\,Sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{Sec^3\theta}{Tan^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{Cos\,\theta}{Sen^4\theta}\,d\theta$

Efectuando el Cambio de variable correspondiente (Tipo A, Caso III)

$\frac{1}{9}\int \frac{Cos\,\theta}{Sen^4\theta}\,d\theta = ?$ Si: $u = Sen\,\theta \Rightarrow d\theta = Cos\,\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^4} = \frac{-1}{27\,u^3} + c = -\frac{1}{27}Csc^3\theta + c$

La Integral resuelta en términos de θ, debe volver a la variable original, se requiere del Triángulo del Cambio de variable.

Si: $x = 3\,Tan\,\theta$

$\Rightarrow Tan\,\theta = \frac{x}{3}$

(Triángulo: hipotenusa $\sqrt{x^2+3^2}$, cateto opuesto x, cateto adyacente 3, ángulo θ)

Por tanto reemplazando la Csc

$\int \frac{\sqrt{x^2+3^2}}{x^4}\,dx = -\frac{1}{27}\left(\frac{\sqrt{x^2+3^2}}{x}\right)^3 + c$

b) $\int \frac{\sqrt{x^2-4^2}}{x}\,dx = ?$ Si: $x = 4\,Sec\,\theta \Rightarrow dx = 4\,Sec\,\theta\,Tan\,\theta\,d\theta$

La forma del Radical requiere de la Sustitución efectuada (Con la Función: *Sec* θ)

$\int \frac{\sqrt{x^2-4^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{(4\,Sec\,\theta)^2-4^2}}{4\,Sec\,\theta}\,4\,Sec\,\theta\,Tan\,\theta\,d\theta$

$= \int \frac{4\,Tan\,\theta}{4\,Sec\,\theta}\,4\,Sec\,\theta\,Tan\,\theta\,d\theta = 4\int Tan^2\theta\,d\theta$

$= 4\int (Sec^2\theta - 1)\,d\theta = 4\,(Tan\,\theta - \theta) + c$

Por Identidad Trigonométrica. Formando un Triángulo de acuerdo al Cambio de variable.

Si: $x = 4\,Sec\,\theta$

$\Rightarrow Sec\,\theta = \frac{x}{4}$

(Triángulo: hipotenusa x, cateto opuesto $\sqrt{x^2-4^2}$, cateto adyacente 4, ángulo θ)

Por tanto, reemplazando:

$\int \frac{\sqrt{x^2-4^2}}{x}\,dx = 4\left[\frac{\sqrt{x^2-4^2}}{4} - Arcsec\,\frac{x}{4}\right] + c$

c) $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$

Efectuando el Cambio de variable correspondiente.

$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = ?$ Si: $x = Sec\,\theta \Rightarrow dx = Sec\,\theta\,Tan\,\theta\,d\theta$

$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \int Sec^2\theta\sqrt{Sec^2\theta-1}\,Sec\,\theta\,Tan\,\theta\,d\theta = \int Tan^2\theta\,Sec^3\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{4}Sec^3\theta\,Tan\,\theta - \frac{1}{8}Sec\,\theta\,Tan\,\theta - \frac{1}{8}Ln\,|Sec\,\theta + Tan\,\theta| + c$

La Integral Trigonométrica se resolvió en el Ej-8-19

Si: $x = Sec\,\theta$

$\Rightarrow Sec\,\theta = \frac{x}{1}$

(Triángulo: hipotenusa x, cateto opuesto $\sqrt{x^2-1^2}$, cateto adyacente 1, ángulo θ)

Se arma el Triángulo de acuerdo al Cambio de variable, del mismo se obtienen Funciones Trigonométricas a reemplazar en el resultado.

$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}x^3\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{8}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{8}Ln\,|x+\sqrt{x^2-1}| + c$

8-25 Por el Método de Sustitución Trigonométrica, calcular las Integrales:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+13}}\,dx$

Luego de Completar Cuadrados en el denominador, se efectúa el Cambio de variable.

Se conforma el Triángulo, para volver a la variable original.

$\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+3^2}}\,dx = ?$ Si: $x+2 = 3\,Tan\,\theta \Rightarrow dx = 3\,Sec^2\theta\,d\theta$

$= \int \frac{1}{\sqrt{(3\,Tan\,\theta)^2+3^2}}\,3\,Sec^2\theta\,d\theta = \int \frac{3\,Sec^2\theta}{3\,Sec\,\theta}\,d\theta$

$= \int Sec\,\theta\,d\theta = Ln\,|Sec\,\theta + Tan\,\theta| + c$

$x+2 = 3\,Tan\,\theta$

$\Rightarrow Tan\,\theta = \frac{x+2}{3}$

$\sqrt{(x+2)^2+3^2}$, $x+2$, θ, 3

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+13}}\,dx = Ln\left|\frac{\sqrt{(x+2)^2+3^2}}{3} + \frac{x+2}{3}\right| + c$

b) $\int \frac{1}{(x^2+2^2)^2}\,dx$

Si bien la Integral no contiene radicales, por la forma del denominador puede resolverse por Sustitución trigonométrica.

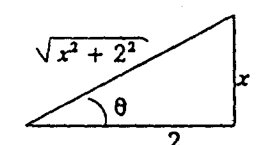
$\int \frac{1}{(x^2+2^2)^2}\,dx = ?$ Si: $x = 2\,Tan\,\theta \Rightarrow dx = 2\,Sec^2\theta\,d\theta$

$= \int \frac{1}{[(2\,Tan^2\theta)^2+2^2]^2}\,2\,Sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int \frac{1}{Sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{8}\int Cos^2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{8}\int \frac{1+Cos\,2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{Sen\,2\theta}{2}\right) + c = \frac{1}{16}(\theta + Sen\,\theta\,Cos\,\theta) + c$

Si: $x = 2\,Tan\,\theta$

$\Rightarrow Tan\,\theta = \frac{x}{2}$



De acuerdo al Cambio de variable, se arma un Triángulo rectángulo, cuyos lados provienen del despeje de la *Tan*.

A partir del Triángulo se obtienen las otras Funciones del resultado.

$\int \frac{1}{(x^2+2^2)^2}\,dx = \frac{1}{16}\left(Arctan\,\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2^2}}\,\frac{2}{\sqrt{x^2+2^2}}\right) + c = \frac{1}{16}\left(Arctan\,\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+2^2}\right) + c$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^4)^3}}\,dx$

Para resolver la Integral, debe reordenarse la expresión subradical, hasta que presente la forma de los Radicales sobre los cuales se aplica el Método.

$\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^4)^3}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{(1-(x^2)^2)^3}}\,dx$ Si: $x^2 = Sen\,\theta \Rightarrow 2x\,dx = Cos\,\theta\,d\theta$

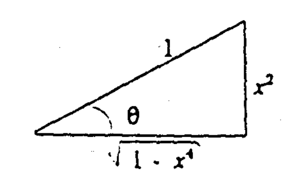
$= \int \frac{1}{\sqrt{[1-(Sen\,\theta)^2]^3}}\,\frac{Cos\,\theta\,d\theta}{2}$

$= \int \frac{1}{Cos^3\theta}\,\frac{Cos\,\theta\,d\theta}{2} = \frac{1}{2}\int Sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,Tan\,\theta + c$

$= \frac{1}{2}\,\frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta} + c = \frac{1}{2}\,\frac{x^2/1}{\sqrt{1-x^4/1}} + c = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} + c$

Si: $x^2 = Sen\,\theta$

$\Rightarrow Sen\,\theta = \frac{x^2}{1}$



Para retornar a la variable original se arma el Triángulo a partir del Cambio de variable.

VIII-10 MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES

El Método de Integración de Fracciones Parciales, consiste en la integración de una Fracción algebraica, descompuesta como una suma de Fracciones simples.
El Método se aplica sobre Fracciones Algebraicas Racionales Propias, de la forma:

$$f_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{D_{(x)}} \qquad \text{Donde: } N_{(x)} \text{ ; } D_{(x)} \text{ son Polinomios}$$

Un Teorema del Álgebra indica: "Un Polinomio: $D_{(x)}$ puede descomponerse como un producto de factores lineales y cuadráticos de coeficientes reales"

De acuerdo a ese Teorema, toda Fracción Racional Propia, podrá descomponerse como una suma de fracciones simples. (Se Llama Fracción Propia si el grado del numerador es menor al grado del denominador).

Se registran los siguientes cuatro casos :

i) FACTORES LINEALES

$$\frac{N_{(x)}}{D_{(x)}} = \frac{N_{(x)}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \dots + \frac{N}{x-a_n}$$

$D_{(x)}$ que es el Polinomio del denominador, se descompone en Factores todos Lineales, que no se reiteran, por tanto en cada numerador se emplea una sola constante: $A, B, \dots, N$.

ii) FACTORES LINEALES REITERADOS

$$\frac{N_{(x)}}{D_{(x)}} = \frac{N_{(x)}}{(x-a_1)^m(x-a_2)^n\dots} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_1)^2} + \frac{C}{(x-a_1)^3} + \dots + N(x-a_1)^m$$
$$+ \frac{P}{(x-a_2)} + \frac{Q}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{S}{(x-a_2)^n} + \dots$$

$D_{(x)}$ se descompone en Factores todos Lineales, los cuales se reiteran m o n veces, en cada numerador se emplea una sola constante: $A, B, C, \dots N, P, Q, \dots, S, \dots$. El grado del denominador es creciente hasta m o n

iii) FACTORES CUADRÁTICOS

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\dots} = \frac{Ax+B}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{Cx+D}{x^2+b_2x+c_2} + \dots$$

$D_{(x)}$ se descompone en Factores Cuadráticos, los cuales no se reiteran. Por tanto se emplean dos constantes Donde: $A, B, C, D, \dots$ son constantes. Se asume que los Factores Cuadráticos del denominador: $x^2 + bx + c$ son irreducibles (Ya no pueden factorizarse)

iv) FACTORES CUADRÁTICOS REITERADOS

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(x^2+b_1x+c_1)^m(x^2+b_2x+c_2)^n\dots} = \frac{Ax+B}{(x^2+b_1x+c_1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \dots$$
$$+ \frac{Gx+H}{(x^2+b_2x+c_2)} + \frac{Ix+J}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + \dots$$

$D_{(x)}$ se descompone en Factores todos Cuadráticos, los cuales se reiteran m o n veces. Donde. $A, B, C, D, G, H, I, J, \dots$ son constantes. Los Factores Cuadráticos del denominador son irreducibles.

Ej 8-24 Las formas generales de descomposición en Fracciones simples son las siguientes

$$\frac{5x-12}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{3x-1}{(x+2)^3(x-5)^2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{D}{(x-5)} + \frac{E}{(x-5)^2}$$

$$\frac{5x}{(x^2+x+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+x+3)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+x+3}$$

Descomponiendo por las reglas correspondientes a cada caso.

Una vez descompuesta la Fracción original, como una suma de fracciones simples, para hallar sus correspondientes numeradores (Las constantes: A, B, etc.), se efectúa la suma de las Fracciones Simples, para luego igualar numeradores entre sí.(Esta Ecuación se conoce como ECUACIÓN FUNDAMENTAL). A partir de esta Ecuación existen dos modos de cálculo de las constantes.

POR SUSTITUCIÓN DIRECTA

Consiste en asignar valores arbitrarios a la variable, de manera tal que se obtenga directamente el valor de las constantes.(Método adecuado para el caso: i)

POR SISTEMA DE ECUACIONES

Consiste en igualar los Coeficientes de las mismas potencias de la Ecuación Fundamental, conformando así un Sistema de Ecuaciones, cuya solución determinará a las constantes. (Método adecuado para todos los casos)

Este modo se basa en el Teorema "Dos Polinomios $P(x)$, $Q(x)$ si son iguales para todos los valores de: x, excepto tal vez para un número finito de ellos, entonces los coeficientes de $P(x)$, $Q(x)$ son iguales entre sí para cada potencia"

Ej 8-25 Una Fracción Algebraica se descompone en Fracciones Simples

$$\frac{8x-11}{x^2-3x+2}$$

Fracción Racional y Propia (Porque el grado del denominador es menor al del denominador), se descompone como suma de fracciones simples.

$$\frac{8x-11}{x^2-3x+2} = \frac{8x-11}{(x-1)(x-2)}$$

Factorizando el denominador, se tienen Factores lineales que no se reiteran, Caso: i

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Descomponiendo de acuerdo a Reglas, son dos los Factores en el denominador, entonces existen dos fracciones.

$$= \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$8x - 11 = A(x-2) + B(x-1)$$

Sumando. Tomando la igualdad entre Numeradores se obtiene la: ECUACIÓN FUNDAMENTAL. A partir de esta Ecuación se hallan los valores de A, B.

POR SUSTITUCIÓN DIRECTA

$$8x - 11 = A(x-2) + B(x-1)$$

Si: $x = 1$ $\quad -3 = A(-1) + 0 \quad \Rightarrow \quad A = 3$

Si: $x = 2$ $\quad 5 = 0 + B(1) \quad \Rightarrow \quad B = 5$

Se reemplazan valores que permitan eliminar alguno de los Términos, así se calculan directamente las constantes: A, B

POR SISTEMA DE ECUACIONES

$$8x - 11 = A(x-2) + B(x-1)$$

$$8x - 11 = (A + B)x + (-2A - B)$$

Se ordenan los Términos para cada potencia.

Para x $\quad 8 = A + B \quad \Rightarrow \quad A = 3$

Para I $\quad -11 = -2A - B \quad \Rightarrow \quad B = 5$

$$\Rightarrow \quad \frac{8x-11}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-2}$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales (I representa a los términos independientes o constantes), queda así un Sistema de Ecuaciones, cuyas incógnitas son las constantes A, B que van a los numeradores.

8-26 Descomponer en Fracciones Parciales, la Fracción:

$$\frac{2x^3 - 9x^2 - 56x + 195}{x^3 - 10x^2 + 17x + 28}$$

Antes de descomponer, se divide la Fracción, ya que tal operación es posible.

$$\frac{2x^3 - 9x^2 - 56x + 195}{x^3 - 10x^2 + 17x + 28} = 2 + \frac{11x^2 - 90x + 139}{(x+1)(x-4)(x-7)} = 2 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-7}$$

$$= 2 + \frac{A(x-4)(x-7) + B(x+1)(x-7) + C(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-4)(x-7)}$$

En la Fracción que queda se aplica la descomposición en Fracciones Simples.

Ec. Fundamental $\quad 11x^2 - 90x + 139 = A(x-4)(x-7) + B(x+1)(x-7) + C(x+1)(x-4)$

Si: $x = -1 \Rightarrow 11(-1)^2 - 90(-1) + 139 = A(-1-4)(-1-7) + B(0)(-1-7) + C(0)(-1-4) \Rightarrow A = 6$

Si: $x = 4 \Rightarrow 11(4)^2 - 90(4) + 139 = A(0)(4-7) + B(4+1)(4-7) + C(4+1)(0) \Rightarrow B = 3$

Si: $x = 7 \Rightarrow 11(7)^2 - 90(7) + 139 = A(7-4)(0) + B(7+1)(0) + C(7+1)(7-4) \Rightarrow C = 2$

$$\frac{2x^3 - 9x^2 - 56x + 195}{x^3 - 10x^2 + 17x + 28} = 2 + \frac{6}{x+1} + \frac{3}{x-4} + \frac{2}{x-7}$$

Note la necesidad de división por que la Fracción inicial no era propia.

8-27 Aplicando el Método de Fracciones Parciales, calcular las Integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 4}\, dx$

Considerando la Fracción Racional Propia. Buscando su Descomposición.

$$\frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 4} = \frac{5x - 14}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$$

Factorizando el denominador, expresando como suma de Fracciones Simples.

$$= \frac{A(x-4) + B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

Sumando las Fracciones Simples

$$\Rightarrow \quad 5x - 14 = A(x-4) + B(x-1)$$

La Ecuación Fundamental es la igualdad entre numeradores. Las constantes se calculan por Sustitución Directa.

Si: $x = 1 \qquad -9 = A(-3) + B\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = 3$

Si: $x = 4 \qquad 6 = A\cdot 0 + B(3) \quad \Rightarrow \quad B = 2$

$$\frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 4} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-4}$$

Luego se expresa la Fracción dada como Suma de Fracciones Simples. La Integral se aplica luego sobre la Suma de Fracciones Simples.

$$\int \frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 4}\, dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-4}\right) dx = 3\,Ln|x-1| + 2\,Ln|x-4| + c$$

b) $\displaystyle\int \frac{48}{x^4 - 10x^2 + 9}\, dx$

$$\frac{48}{x^4 - 10x^2 + 9} = \frac{48}{(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-3}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+3)(x-3) + B(x+1)(x+3)(x-3) + C(x+1)(x-1)(x-3) + D(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)}$$

$$48 = A(x-1)(x+3)(x-3) + B(x+1)(x+3)(x-3) + C(x+1)(x-1)(x-3) + D(x+1)(x-1)(x+3)$$

Si: $x = -1 \qquad 48 = A(-2)(2)(-4) + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad A = 3$

Si: $x = 1 \qquad 48 = 0 + B(2)(4)(-2) + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad B = -3$

Si: $x = -3 \qquad 48 = 0 + 0 + C(-2)(-4)(-6) + 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1$

Si: $x = 3 \qquad 48 = 0 + 0 + 0 + D(4)(2)(6) \quad \Rightarrow \quad D = 1$

$$\int \frac{48}{x^4 - 10x^2 + 9}\, dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{-3}{x-1} + \frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x-3}\right) dx$$

$$= 3\,Ln|x+1| - 3\,Ln|x-1| - Ln|x+3| + Ln|x-3| + c = Ln\left|\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \left(\frac{x-3}{x+3}\right)\right| + c$$

Ej 8-26 Se integra una Fracción que contiene Factores Lineales Reiterados.

$$\int \frac{4}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}\,dx$$

Al Factorizar el denominador, se obtienen 3 Factores, dos de ellos iguales entre sí.

$$\frac{4}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} = \frac{4}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-3}$$

$$= \frac{A(x-1)(x-3) + B(x-3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-3)}$$

Se descompone de acuerdo al Caso ii de FACTORES LINEALES REITERADOS. Note la potencia en el segundo denominador

$$\Rightarrow \quad 4 = A(x-1)(x-3) + B(x-3) + C(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 4 = (A + C)x^2 + (-4A + B - 2C)x + (3A - 3B + C)$$

Se determina la ECUACIÓN FUNDAMENTAL, por la Igualdad entre numeradores.

Para: x^2: $0 = A + C$

Para: x: $0 = -4A + B - 2C \quad \Rightarrow$

Para: 1: $4 = 3A - 3B + C$

$A = -1$; $B = -2$; $C = 1$

Se hallan las constantes por el Método de: Sistema de Ecuaciones. Que en este caso es el modo adecuado.

$$\frac{4}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} = \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-3}$$

Luego se calcula la Integral de la Suma de Fracciones Simples.

$$\int \frac{4}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-3}\right) dx$$

$$= -Ln|x-1| + I_2 + Ln|x-3|$$

Queda una Integral pendiente (I_2) se resuelve separadamente por el Método de Sustitución.

$$I_2 = \int \frac{-2}{(x-1)^2}\,dx = ? \quad \text{Si:} \quad u = x - 1 \Rightarrow du = dx$$

$$I_2 = \int \frac{-2}{u^2}\,du = -2\int u^{-2}\,du = -2\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{2}{u} = \frac{2}{x-1}$$

Luego se reemplaza esta Integral en el Resultado Final

$$\int \frac{4}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}\,dx = -Ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + Ln|x-3| + c$$

8-28 Calcular la Integral de Fracción con Factores Lineales Reiterados.

$$\int \frac{4x^3 + 7x^2 + 2x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}\,dx$$

$$\frac{4x^3 + 7x^2 + 2x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{4x^3 + 7x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)(x-1)^2 + B(x-1)^2 + C(x+1)^2(x-1) + D(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

La Integral posee FACTORES LINEALES REITERADOS, se descompone con las Reglas del Caso ii

$$4x^3 + 7x^2 + 2x + 1 = (A + C)x^3 + (-A + B + C + D)x^2 + (-A - 2B - C + 2D)x + (-A + B - C + D)$$

Para: x^3: $4 = A + C$

Para: x^2: $7 = -A + B + C + D \quad \Rightarrow$

Para: x: $2 = -A - 2B - C + 2D$

Para: 1: $1 = -A + B - C + D$

$A = 1$; $B = 1$; $C = 3$; $D = 4$

$$\int \frac{4x^3 + 7x^2 + 2x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}\,dx = \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= Ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + 3\,Ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + c$$

La integración se realiza directamente y usando métodos empleados en la anterior Integral

Ej 8-27 Se integra una Fracción de Factores Cuadráticos:

$$\int \frac{4x-2}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\,dx$$

La Fracción es Racional y Propia.

$$\frac{4x-2}{(x^2+1)(x^2-2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2-2x+2) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}$$

Descomponiendo de acuerdo al Caso iii de Factores Cuadráticos en el denominador (Dos constantes en el numerador)

$$4x-2 = (Ax+B)(x^2-2x+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$

$$= (A+C)x^2 + (-2A+B+D)x^2 + (2A-2B+C)x + 2B + D$$

Determinando la Ecuación Fundamental.

Para: x^3: $0 = A + C$

Para: x^2: $0 = -2A + B + D$

Para: x: $4 = 2A - 2B + C$

Para: 1: $-2 = +2B + D$

$\Rightarrow$ $A = 0$, $B = -2$, $C = 0$, $D = 2$

Las constantes se pueden hallar únicamente por el Método del Sistema de Ecuaciones.

$$\int \frac{4x-2}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\,dx = \int\left(\frac{-2}{x^2+1} + \frac{2}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$= -2\int\frac{1}{x^2+1}\,dx + 2\int\frac{1}{(x-1)^2+1^2}\,dx$$

$$= -2\,Arctan\,x + 2\,Arctan\,(x-1) + c$$

Las Fracciones resultantes se integran por el Método de Expresiones Cuadráticos (Ver VIII-8)

8-29 Calcular la siguiente Integral de Fracción

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$1 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)$$

$\Rightarrow$ Para: x^2: $0 = A + B$; Para: x: $0 = -A + B + C$; Para: 1: $1 = A + C$ $\Rightarrow$ $A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = 2/3$

$$\int\frac{1}{x^3+1}\,dx = \int\left(\frac{1/3}{x+1} + \frac{(-1/3)x+2/3}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{-3}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{-3}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{4}})^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(Ln|x^2-x+1| - 3\frac{1}{\sqrt{3/4}}Arctan\frac{x-1/2}{\sqrt{3/4}}\right)$$

$$\int\frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}(Ln|x+1|) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(Ln|x^2-x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}}Arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}})\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}Ln|x+1| - \frac{1}{6}Ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

La Integral contiene a un Factor Lineal y otro Cuadrático, descomponiendo de acuerdo a sus Reglas. Note que la segunda Fracción obtenida se calcula por el Método de Expresiones Cuadráticas.

Ej 8-28 Se integra una Fracción de Factores Cuadráticos Reiterados. Caso iv

$$\int \frac{2x^3+3x^2+x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}\,dx$$

$$\frac{2x^3+3x^2+x+2}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x-1) + E(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

$$2x^3+3x^2+x+2 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1) + E(x^2+1)^2$$

$$= (A+E)x^4 - (-A+B)x^3 + (A-B+C+2E)x^2 + (-A+B-C+D)x + (-B-D+E)$$

Descomponiendo de acuerdo a las características del Caso iv

Se hallan las constantes por Sistema de Ecuaciones.

Para: x^4: $0 = A + E$
Para: x^3: $2 = -A + B$
Para: x^2: $3 = A - B + C + 2E$
Para: x: $1 = -A + B - C + D$
Para: 1: $2 = -B - D + E$

$\Rightarrow$ $A = -2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$, $E = 2$

Al resolver la Integral, la 1era Fracción se resuelve por P-8-9-b

$$\int\frac{2x^3+3x^2+x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}\,dx = \int\left[\frac{-2x}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{x-1}\right]dx$$

Queda pendiente la 2da Fracción, que se resuelve por Sustitución.

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = ? \qquad \text{Si: } u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$= \int\frac{du/2}{u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-1}{2u} = \frac{-1}{2(x^2+1)}$$

La 3era Fracción es de resolución inmediata.

$$\int\frac{2x^3+3x^2+x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}\,dx = -Ln|x^2+1| - \frac{1}{2(x^2+1)} + 2\,Ln|x-1| + c$$

8-30 Resolver la siguiente Integral de Fracción con Factores Reiterados:

$$\int\frac{16}{x^2(x^2+4)^2}\,dx$$

Descomponiendo de acuerdo a las características del Caso ii y también del Caso iv

$$\frac{16}{x^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{Ax(x^2+4)^2 + B(x^2+4)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+4) + (Ex+F)x^2}{x^2(x^2+4)^2}$$

Planteando la Ecuación Fundamental como la igualdad entre el numerador de la Fracción inicial y el de la suma de las Fracciones simples.

$$16 = Ax(x^2+4)^2 + B(x^2+4)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+4) + (Ex+F)x^2$$

$$16 = (A+C)x^5 + (B+D)x^4 + (8A+4C+E)x^3 + (8B+4D+F)x^2 + 16Ax + 16B$$

Para: x^5: $0 = A + C$
Para: x^4: $0 = B + D$
Para: x^3: $0 = 8A + 4C + E$
Para: x^2: $0 = 8B + 4D + F$
Para: x: $0 = 16A$
Para: 1: $16 = 16B$

$\Rightarrow$ $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 0$, $F = -4$

Para verificar la Integral de la 3era fracción Ver P-8-25-b

$$\int\frac{16}{x^2(x^2+4)^2}\,dx = \int\left[\frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2+4} + \frac{-4}{(x^2+4)^2}\right]dx$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}Arctan\frac{x}{2} - 4\left(\frac{1}{16}Arctan\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\,\frac{x}{x^2+4}\right) + c$$

8-31 Aplicando el Método de las Fracciones Parciales, integrar:

a) $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$

Factorizando el denominador.

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Queda una Fracción del Caso iii (Factores Cuadráticos)

$$= \frac{(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

Hallando las constantes por Sistema de Ecuaciones.

$$1 = (Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

$$1 = (A+C)x^3 + (-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)x^2 + (A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x + (B+D)$$

Para: x^3: $0 = A + C$

Para: x^2: $0 = -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D$

Para: x: $0 = A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D$

Para: 1: $1 = B + D$

$\Rightarrow$ $A = \sqrt{2}/4$, $B = 1/2$, $C = -\sqrt{2}/4$, $D = 1/2$

$$\int\frac{1}{x^4+1}\,dx = \int\left[\frac{(\sqrt{2}/4)x+1/2}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{(-\sqrt{2}/4)x+1/2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]dx = I_1 + I_2$$

Quedan dos Fracciones de denominadores cuadráticos.

Se resuelve la Primera Fracción (I_1). Usando el Método de Expresiones Cuadráticas (VIII-8).

$$I_1 = \int\frac{(\sqrt{2}/4)x+1/2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$$

Se divide y multiplica por 2, descomponiendo $2\sqrt{2}$. Aplicando las Fórmulas de ese Método.

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\int\left[\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right]dx$$

La Integral I_2 se resuelve por simple comparación, ya que es semejante a I_1

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \sqrt{2}\int\frac{1}{(x+\sqrt{2}/2)^2+(\sqrt{1/2})^2}\,dx\right]$$

Obteniendo así el resultado de toda la Integral.

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[Ln|x^2+\sqrt{2}x+1| + \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{1/2}}\,Arctan\,\frac{x+\sqrt{2}/2}{\sqrt{1/2}}\right]$$

Por las fórmulas de suma de Logaritmo y Arcotangente se simplifica el resultado.

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[Ln|x^2+\sqrt{2}x+1| + 2Arctan(\sqrt{2}x+1)\right]$$

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[Ln|x^2+\sqrt{2}x+1| + 2\,Arctan(\sqrt{2}x+1)\right] + \frac{\sqrt{2}}{8}\left[Ln|x^2-\sqrt{2}x+1| + 2\,Arctan(\sqrt{2}x-1)\right] + c$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[Ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}Arctan\,\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right] + c$$

b) $\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx$

Se deduce una Fórmula General de Integración para el caso de dos Factores Lineales en el denominador.

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

Note que se aplican las Técnicas del Caso i (FACTORES LINEALES)

$$1 = A(x-b) + B(x-a)$$

Si: $x = a \Rightarrow 1 = A(a-b) + 0 \Rightarrow A = 1/(a-b)$

Si: $x = b \Rightarrow 1 = 0 + B(b-a) \Rightarrow B = -1/(a-b)$

$$\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx = \int\left(\frac{1/(a-b)}{x-a} + \frac{-1/(a-b)}{x-b}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{a-b}\right)Ln|x-a| - \left(\frac{1}{a-b}\right)Ln|x-b| + c = \frac{1}{a-b}Ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + c$$

VIII-11 RACIONALES TRIGONOMÉTRICAS

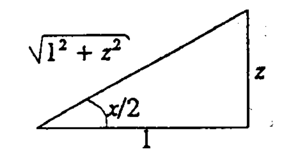
El Método de Integración de las Funciones Racionales Trigonométricas, se aplica sobre Fracciones Racionales Trigonométricas, mediante el Cambio de variable:



A partir de la Sustitución, se forma un Triángulo para obtener otras Funciones:

$$Sen\,\frac{x}{2} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$Cos\,\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$



Si: $z = Tan\,\frac{x}{2}$

$\Rightarrow\; Tan\,\frac{x}{2} = \frac{z}{1}$

Usando conocidas Fórmulas Trigonométricas, se obtienen las expresiones:

$$Sen\,x = 2\,Sen\,\frac{x}{2}\,Cos\,\frac{x}{2} = 2\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$Cos\,x = Cos^2\frac{x}{2} - Sen^2\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$z = Tan\,\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; x = 2\,Arctan\,z \;\Rightarrow\; dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

Ej 8-29 Por el Método de las Racionales Trigonométricas, se integra:

$$\int \frac{1}{5-4\,Cos\,x}\,dx$$

La Función es Racional Trigonométrica.

$$\int \frac{1}{5-4\,Cos\,x}\,dx = ? \qquad Si:\; z = Tan\,\frac{x}{2}$$

$$= \int \frac{1}{5-4\,\frac{1-z^2}{1+z^2}}\,\frac{2}{1+z^2}\,dz = \int \frac{2}{9z^2+1}\,dz = \frac{2}{9}\int \frac{1}{z^2+(1/3)^2}\,dz$$

Se reemplazan todos los Términos de la Sustitución. Simplificando.

$$= \frac{2}{9}\,\frac{1}{1/3}\,Arctan\frac{z}{1/3} + c = \frac{2}{3}\,Arctan\,3z + c = \frac{2}{3}\,Arctan(3\,Tan\,\frac{x}{2}) + c$$

Se aplican los Métodos de Integración: VIII-8

Luego se retorna a la Variable original.

8-32 Aplicando el Método de las Fracciones Racionales Trigonométricas, integrar:

$$\int \frac{1}{4\,Sen\,x + 3\,Cos\,x + 5}\,dx$$

Aplicando el Cambio de Variable de: $z = Tan\,x/2$

$$\int \frac{1}{4\,Sen\,x + 3\,Cos\,x + 5}\,dx = ? \quad Si:\; z = Tan\,\frac{x}{2}$$

Reemplazando las Funciones Trigonométricas.

$$= \int \frac{1}{4\,\frac{2z}{1+z^2} + 3\,\frac{1-z^2}{1+z^2} + 5}\,\frac{2}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{z^2+4z+4}\,dz$$

Simplificando e integrando por el Método de Sustitución.

$$= \int \frac{1}{(z+2)^2}\,dz = -\frac{1}{z+2} + c = -\frac{1}{Tan\,\frac{x}{2}+2} + c$$

Retornando a la variable original.

8-33 Aplicando el Método de Funciones Racionales Trigonométricas, integrar:

a) $\int \frac{Cos\,x + Sen\,x - 1}{Cos\,x + Sen\,x + 1}\,dx$

$$\int \frac{Cos\,x + Sen\,x - 1}{Cos\,x + Sen\,x + 1}\,dx = \int (1 + \frac{-2}{Cos\,x + Sen\,x + 1})\,dx$$

$$= x - 2\int \frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2} + \frac{2z}{1+z^2} + 1}\,\frac{2}{1+z^2}\,dz$$

$$= x - 2\int \frac{1}{2z+2}\,dz = x - \int \frac{1}{z+1}\,dz$$

$$= x - Ln|z+1| + c = x - Ln|Tan\frac{x}{2} + 1| + c$$

Previamente se divide la fracción, ya que tal operación es posible.

Luego se aplica la Sustitución del Método de Racionales Trigonométricas.

Simplificando e integrando.

Retornando a la variable original.

b) $\int \frac{1}{Sen\,x + Tan\,x}\,dx$

$$\int \frac{1}{Sen\,x + Tan\,x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{2z}{1-z^2}}\,\frac{2}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1-z^2}{2z}\,dz = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{z} - z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2}(Ln|z| - \frac{z^2}{2}) + c = \frac{1}{2}Ln|Tan\frac{x}{2}| - \frac{1}{4}Tan^2\frac{x}{2} + c$$

Al reemplazar se considera $Tan\,x = Sen\,x/Cos\,x$

c) $\int \frac{1}{4\,Cos\,x - 5\,Sen\,x + 5}\,dx$

$$\int \frac{1}{4\,Cos\,x - 5\,Sen\,x + 5}\,dx = \int \frac{1}{4\frac{1-z^2}{1+z^2} - 5\frac{2z}{1+z^2} + 5}\,\frac{2}{1+z^2}\,dz$$

$$= \int \frac{2}{z^2 - 10z + 9}\,dz = \int \frac{2}{(z-9)(z-1)}\,dz$$

$$= 2\,\frac{1}{9-1}\,Ln|\frac{z-9}{z-1}| + c = \frac{1}{4}\,Ln|\frac{Tan\frac{x}{2} - 9}{Tan\frac{x}{2} - 1}| + c$$

Se aplica la Sustitución y el resultado de P-8-31-b

Ya que la Integral resultante contiene dos Factores Lineales en su denominador.

Entonces debe aplicarse el Método de Fracciones Parciales Caso I

d) $\int \frac{1}{Sen^2x + 4\,Cos^2x}\,dx$

Si todas las Potencias son Pares, se aplica la Sustitución: $z = Tan\,x$

(Triángulo: hipotenusa $\sqrt{1^2 + z^2}$, cateto opuesto z, cateto adyacente 1, ángulo x)

$$z = Tan\,x \quad \Rightarrow \quad Tan\,x = \frac{z}{1} \qquad dx = \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

$$Sen\,x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \qquad Cos\,x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

A partir del gráfico del Triángulo se determina la sustitución.

$$\int \frac{1}{Sen^2x + 4\,Cos^2x}\,dx = \int \frac{1}{(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}})^2 + 4(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}})^2}\,\frac{1}{1+z^2}\,dz$$

$$= \int \frac{dz}{z^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\,Arctan\,\frac{z}{2} + c = \frac{1}{2}\,Arctan\,(\frac{Tan\,x}{2}) + c$$

Obteniendo otras Funciones trigonométricas a partir del triángulo.

VIII-12 MÉTODO DE SUSTITUCIÒ INVERSA

Algunos Tipos de Integrales para su evaluación requieren de sustituciones especiales a cada caso, entre estos se tiene:

LA SUSTITUCIÓN INVERSA

A partir de las siguientes relaciones generales (Algunas de las cuales ya han sido demostradas)

1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = Ln|u+\sqrt{a^2+u^2}|$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = Ln|u+\sqrt{u^2-a^2}|$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = Arcsen\,\frac{u}{a}$

4) $\int \frac{g}{\sqrt{g}}\,du = 2\sqrt{g}$

Mediante estas relaciones pueden resolverse Integrales de la forma:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \qquad \int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \ ; \ z = \frac{1}{mx+n}$$

La Segunda Integral es equivalente a la Primera, mediante la Sustitución indicada, llamada SUSTITUCIÓN INVERSA.

Ej 8-30 $\int \frac{3-x}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$

$$\int \frac{3-x}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{6-2x}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{4-2x}{\sqrt{5+4x-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{4-2x}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{3^2-(x-2)^2}}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5+4x-x^2} + 2\,Arcsen\,\frac{x-2}{3}\right] + c$$

$$= \sqrt{5+4x-x^2} + Arcsen\,\frac{x-2}{3} + c$$

Integral de la Forma 1.

Operando algebraicamente, se busca que la Derivada del subradical en el denominador se presente en el numerador.

En la segunda fracción se completa cuadrados dentro del radical.

Usando las Fórmulas anteriores. (4 y 3 respectivamente) en las dos Integrales en que se descompone la Integral original.

8-34 Usando la Sustitución Inversa, integrar:

$\int \frac{dx}{(3x-1)\sqrt{4x-9x^2}}$

$$\int \frac{dx}{(3x-1)\sqrt{4x-9x^2}} = ? \qquad z = \frac{1}{3x-1} \Rightarrow x = \frac{1+z}{3z} \Rightarrow dx = \frac{-dz}{3z^2}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{z}\sqrt{4(\frac{1+z}{3z}) - 9(\frac{1+z}{3z})^2}}\left(-\frac{1}{3z^2}\,dz\right) = -\int \frac{dz}{\sqrt{3z^2-6z-9}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-1)^2-2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,Ln|(z-1)+\sqrt{(z-1)^2-2^2}| + c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\,Ln\left|\left(\frac{1}{3x-1}-1\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{3x-1}-1\right)^2 - 2^2}\right| + c$$

Integral de la Forma 2. Usando el Cambio de variable aconsejado.

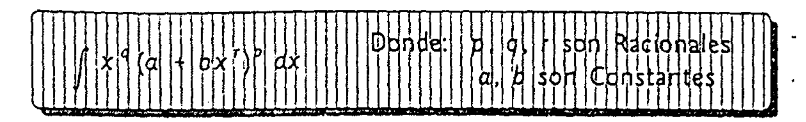
Despejando x y calculando su diferencial.

La Integral que queda se ordena para aplicar la Fórmula 2

Retornando a la variable original.

VIII-13 MÉTODO DE INTEGRALES BINOMIAS

Se llaman Integrales Binomias a aquellas que presentan la Forma General:



Estas Integrales pueden integrarse solo en caso de que se cumpla alguna de las siguientes condiciones:

i) Cuando: p es un Entero

ii) Cuando: $\dfrac{q+1}{r}$ es un Entero, se usa: $z^s = a + bx^r$ (s es divisor de p)

iii) Cuando: $\dfrac{q+1}{r} + p$ es un Entero, se usa: $z^s = ax^{-r} + b$ (s divisor de p)

Ej 8-31 $\int x^3(1 + 2x^2)^{-3/2} \, dx$

$$\int x^3(1 + 2x^2)^{-3/2} \, dx = ? \qquad p = -\frac{3}{2} \; ; \; q = 3 \; ; \; r = 2$$

$$z^2 = 1 + 2x^2 \Rightarrow 2z\,dz = 4x\,dx$$

$$= \int \left[\frac{z^2 - 1}{2}\right]^{3/2} (z^2)^{-3/2} \frac{2z\,dz}{4[(z^2-1)/2]^{1/2}} = \frac{1}{4}\int (1 - z^{-2}) \, dz$$

$$= \frac{1}{4}\left(z - \frac{z^{-1}}{-1}\right) + c = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1 + 2x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2}}\right) + c$$

Se cumple la condición: ii)

$\dfrac{q+1}{r} = 2$ (Es un Entero)

Entonces se debe realizar la Sustitución indicada para este caso.

Note que:

$$x = \left[\frac{z^2 - 1}{2}\right]^{1/2}$$

8-35 Aplicando el Método de las Integrales Binomias, calcular:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}}$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1 + x^2)^{-1/2} \, dx \qquad p = -\frac{1}{2} \; ; \; q = -4 \; ; \; r = 2$$

$$z^2 = 1 + x^{-2} \Rightarrow 2z\,dz = -2x^{-3}dx$$

$$= \int [(z^2 - 1)^{-1/2}]^{-4} \, [1 + [(z^2 - 1)^{-1/2}]^2]^{-1/2} \, (z^2 - 1)^{-3/2} \, z \, dz$$

$$= \int (1 - z^2) \, dz = z - \frac{z^3}{3} + c = (1 + x^{-2})^{1/2} - \frac{1}{3}(1 + x^{-2})^{3/2} + c$$

Se cumple la condición: iii

$\dfrac{q+1}{r} + 1 = -2$

Se efectúa la Sustitución del caso.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}} = \int x^{-3/2}(1 + x^{3/4})^{-1/3} \, dx \qquad p = -\frac{1}{3} \; ; \; q = -\frac{3}{2} \; ; \; r = \frac{3}{4}$$

$$z^3 = 1 + x^{-3/4} \Rightarrow 3z^2dz = \frac{-3x^{-7/4}dx}{4}$$

$$= \int [(z^3 - 1)^{-4/3}]^{-3/2} \, [1 + [(z^3 - 1)^{-4/3}]^{3/4}]^{-1/3} \, [-4z^2(z^3 - 1)^{-7/3} \, dz]$$

$$= -\int 4z \, dz = -2z^2 + c = -2(1 + x^{-3/4})^{2/3} + c$$

Se cumple la iii) Condición, se efectúa la Sustitución del caso.

Tras simplificar se integra directamente.

Note que las Integrales Binomias al obedecer a una característica de las inicialmente requeridas se reducen a Integrales Algebraicas simples.

INTEGRALES DIVERSAS

Las siguientes Integrales, se resuelven usando cualquiera de los distintos Métodos de Integración, en algunos casos se requiere de dos o mas Métodos.

8-36 Aplicando el Método de Integración que corresponde, integrar:

a) $$\int \frac{x^4}{x+1}\,dx$$

$$\int \frac{x^4}{x+1}\,dx = \int (x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x+1})\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + Ln|x+1| + c$$

Se trata de una Fracción no propia, donde la división es posible, necesariamente ésta debe efectuarse antes de integrar.

Luego se integra Término a Término.

b) $$\int \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^{1/5} + x^{1/3}}{x^{1/2}}\,dx = \int (x^{-3/10} + x^{-1/6})\,dx$$

$$= \frac{x^{7/10}}{7/10} + \frac{x^{5/6}}{5/6} + c = \frac{10}{7}\sqrt[10]{x^7} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + c$$

Se usa la Notación Potencial para luego simplificar, o realizar la división algebraica.

Antes de integrar se debe siempre dividir, si esta operación es posible.

c) $$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\,dx = Arcsen\,x - \sqrt{1-x^2} + c$$

Se racionaliza el denominador

Descomponiendo en dos fracciones. Se usan los resultados del Ej 8-23, La 2[da] Integral se resuelve por Sustitución.

d) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = ? \qquad \text{Si: } z^6 = x \Rightarrow 6z^5\,dz = dx$$

$$= \int \frac{6z^5\,dz}{\sqrt{z^6} + \sqrt[3]{z^6}} = \int \frac{6z^5}{z^3 + z^2}\,dz = 6\int \frac{z^3}{z+1}\,dz$$

$$= 6\int (z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1})\,dz = 6(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z - Ln|z+1|) + c$$

$$= 2z^3 - 3z^2 + 6z - 6\,Ln|z+1| + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,Ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c$$

Cambio de variable.

Dividiendo, para luego integrar término a término.

Finalmente se retorna a la variable original.

e) $$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = ? \qquad \text{Si: } z^2 = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow 2z\,dz = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 4z(z^2 - 1)\,dz$$

$$= \int \frac{4z(z^2-1)\,dz}{\sqrt{z^2}} = 4\int (z^2 - 1)dz = 4(\frac{1}{3}z^3 - z) + c$$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt{x} + 1)^{3/2} - 4(\sqrt{x} + 1)^{1/2} + c = \frac{4}{3}\left[\sqrt{\sqrt{x}+1}\right]^3 - 4\sqrt{\sqrt{x}+1} + c$$

Para el Diferencial, se despeja x del Cambio de variable.

Reemplazando, simplificando e integrando.

8-37 Aplicando el Método de Integración correspondiente integrar:

a) $\int \frac{x^8}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

Aplicando el Método de sustitución.

Si: $u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2\,dx$

Efectuando un Cambio de variable con la expresión subradical.

$$\int \frac{x^8}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \int \frac{(x^3)^2}{\sqrt{1+x^3}}\,x^2\,dx = \int \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{3}$$

Reordenando la Función a integrar, de manera que se pueda pasar a la nueva variable u.

$$= \frac{1}{3}\int \frac{u^2 - 2u + 1}{u^{1/2}}\,du = \frac{1}{3}\int (u^{3/2} - 2u^{1/2} + u^{-1/2})\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} - 2\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + \frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + c = \frac{2}{15}\sqrt{u^5} - \frac{4}{9}\sqrt{u^3} + \frac{2}{3}\sqrt{u} + c$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{(1+x^3)^5} - \frac{4}{9}\sqrt{(1+x^3)^3} + \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + c$$

Desarrollando, integrando y retornando a la variable original.

b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Integrando por el Método de Sustitución

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$ Si: $z = \sqrt{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

El Cambio de variable es con el exponente.

$$= \int e^z\,2\,dz = 2\int e^z\,dz = 2\,e^z + c = 2\,e^{\sqrt{x}} + c$$

b) $\int \frac{Arctan\,x}{x^2+1}\,dx$

Resolviendo por Sustitución.

$\int \frac{Arctan\,x}{x^2+1}\,dx = ?$ Si: $z = Arctan\,x \Rightarrow dz = \frac{1}{x^2+1}\,dx$

El Cambio de variable es con el denominador.

$$= \int z\,dz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{2}Arctan^2 x + c$$

c) $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

Resolviendo por Sustitución.

$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = ?$ Si: $z = x^2 \Rightarrow dz = 2x\,dx$

$$= \int \frac{dz/2}{z^2+1} = \frac{1}{2}\,Arctan\,z + c = \frac{1}{2}\,Arctan(x^2) + c$$

El Cambio de variable luego permite el uso de la Fórmula de $Arctan\,x$

d) $\int x^7\,Ln\,x\,dx$

Resolviendo Por Partes

$\int x^7\,Ln\,x\,dx = \int [Ln\,x]\,[x^7\,dx]$ Si: $u = Ln\,x$ $\quad dv = x^7\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$ $\quad v = \frac{x^8}{8}$

Conviene previamente cambiar el orden de factores.

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Reemplazando las partes.

$$\int x^7\,Ln\,x\,dx = Ln\,x\,\frac{x^8}{8} - \int \frac{x^8}{8}\,\frac{1}{x}\,dx$$

Simplificando y terminando de integrar.

$$= \frac{x^8}{8}\,Ln\,x - \frac{1}{8}\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8}\,Ln\,x - \frac{1}{8}\,\frac{x^8}{8} + c$$

$$= \frac{x^8}{8}\,Ln\,x - \frac{x^8}{64} + c$$

8-38 Aplicando el Método de Integración correspondiente integrar:

a) $\int Arcsen\,x\;dx$

$\int [Arcsen\,x]\;[dx] = ?$

$u = Arcsen\,x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \;;\; v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int Arcsen\,x\;dx = Arcsen\,x\;x - \int x\,\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

$= x\;Arcsen\,x + \sqrt{1 - x^2} + c$

Aplicando Por Partes

Usando luego el Método de Sustitución, para la integral restante.

Tomando: $z = 1 + x^2$ puede terminar de resolverse la Integral.

b) $\int Sec^n x\;dx$

$\int Sec^{n-2} x\;Sec^2 x\;dx$

$u = Sec^{n-2} x \qquad dv = Sec^2 x\;dx$

$du = (n-2) Sec^{n-3} x\;Sec\,x\;Tan\,x\;dx \qquad v = Tan\,x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Debe deducirse una Formula de Recurrencia, ya que es grado n.

$I = \int Sec^n x\;dx = Sec^{n-2} x\;Tan\,x - \int Tan\,x\;(n-2) Sec^{n-3} x\;Sec\,x\;Tan\,x\;dx$

$I = Sec^{n-2} x\;Tan\,x - (n-2)\int (Sec^2 x - 1) Sec^{n-2} x\;dx$

$I = Sec^{n-2} x\;Tan\,x - (n-2)\int Sec^n x\;dx + (n-2)\int Sec^{n-2} x\;dx$

$I = Sec^{n-2} x\;Tan\,x - (n-2) I + (n-2)\int Sec^{n-2} x\;dx$

$I = \frac{Sec^{n-2} x\;Tan\,x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int Sec^{n-2} x\;dx$

Reordenando la potencia e Integrando Por Partes.

Llamando I a la Integral original.

Ordenando y despejando la Integral I.

c) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x +\;\;)(x +\;\;)}$

$= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1^2}$

$= \frac{1}{1}\,Arctan\,\frac{x + 2}{1} + c = Arctan(x + 2) + c$

Fracción Racional, como primer paso se debe probar de factorizar el denominador

Al verificar que no es posible la factorización, se deberá aplicar el Método de Expresiones Cuadráticas. Para ello se completa cuadrados en el denominador.

d) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \int \frac{dx}{(x + 1)(x + 3)}$

$= \frac{1}{-1 - (-3)}\,Ln\left|\frac{x + 1}{x + 3}\right| + c = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{x + 1}{x + 3}\right| + c$

$= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 - 1^2}$

Fracción Racional, probando de factorizar el denominador

La factorización es posible por tanto debe aplicarse el Método de Fracciones Parciales. (Ver P-8-31-b)

Note que si se habría completado cuadrados en el denominador se obtendria una diferencia de cuadrados, donde no es aplicable el Método de las Expresiones cuadráticas

8-39 Aplicando el correspondiente Método de Integración, calcular:

a) $\int \frac{Cos\,x}{Sen^2 x + 6 Sen\,x + 34}\,dx$

Previamente aplicando el Método de Sustitución

$u = Sen\,x \Rightarrow du = Cos\,x\,dx$

$$\int \frac{Cos\,x\,dx}{Sen^2 x + 6 Sen\,x + 34} = \int \frac{du}{u^2 + 6u + 34}$$

Se obtiene una Fracción racional de variable u, se aplica luego el Método de Expresiones cuadráticas.

$$= \int \frac{du}{(u+3)^2 + 5^2} = \frac{1}{5} Arctan \frac{u+3}{5} + c$$

No se usa el Método de Fracciones Parciales porque no es posible la factorización.

$$= Arctan \frac{Sen\,x + 3}{5} + c$$

Completando cuadrados, integrando y retornando a la variable original

b) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = ?$ Si: $x = a\,Sen\,\theta \Rightarrow dx = a\,Cos\,\theta\,d\theta$

$$= \int \sqrt{a^2 - (a\,Sen\,\theta)^2}\,a\,Cos\,\theta\,d\theta = \int \sqrt{a^2(1 - Sen^2\theta)}\,a\,Cos\,\theta\,d\theta$$

$$= \int (a\,Cos\,\theta) a\,Cos\,\theta\,d\theta = a^2 \int Cos^2\theta\,d\theta = a^2 \int \frac{1 + Cos\,2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2} a^2 (\theta + \frac{Sen\,2\theta}{2}) + c = \frac{1}{2} a^2 (\theta + Sen\,\theta\,Cos\,\theta) + c$$

Si: $x = a\,Sen\,\theta$

$\Rightarrow Sen\,\theta = \frac{x}{a}$

(Triángulo: hipotenusa a, cateto opuesto x, cateto adyacente $\sqrt{a^2 - x^2}$, ángulo θ)

Se usa el Método de Sustitución Trigonométrica.

Luego del Cambio de variable se conforma el Triángulo para retornar a la variable original.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2} a^2 (Arcsen \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}) + c = \frac{a^2}{2} Arcsen \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

c) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x + \sqrt{x^2+1})}$

Resolviendo por una Sustitución Trigonométrica. Por la forma del radical se emplea la *Tan x*

$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x + \sqrt{x^2+1})} = ?$ Si: $x = Tan\,\theta \Rightarrow dx = Sec^2\theta$

$$= \int \frac{Sec^2\theta\,d\theta}{(Tan^2\theta + 1)(Tan\,\theta + \sqrt{Tan^2\theta + 1})}$$

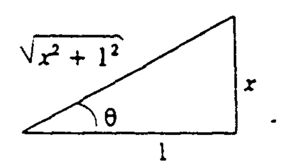
Llevando a Sen, Cos Luego aplicando una Fórmula del Método de Cuadráticas.

$$= \int \frac{Sec^2\theta\,d\theta}{Sec^2\theta(Tan\,\theta + Sec\,\theta)} = \int \frac{d\theta}{Tan\,\theta + Sec\,\theta}$$

Por la Sustitución.

Si: $x = Tan\theta \Rightarrow Tan\theta = \frac{x}{1}$

$$= \int \frac{Cos\,\theta}{Sen\,\theta + 1}\,d\theta = Ln|Sen\,\theta + 1| + c$$



$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x + \sqrt{x^2+1})} = Ln\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \right| + c$$

8-40 Aplicando el correspondiente Método de Integración, calcular:

a) $\int \sqrt{e^x + 1}\, dx$

Se integra por el Método de Sustitución

$$\int \sqrt{e^x+1}\, dx = ? \quad \text{Si:} \quad z^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2z\, dz = e^x\, dx = (z^2 - 1)\, dx$$

Se usa el P-8-31-b

$$= \int \sqrt{z^2}\, \frac{2z\, dz}{z^2 - 1} = 2\int \frac{z^2\, dz}{z^2 - 1} = 2\int \left(1 + \frac{1}{z^2 - 1}\right) dz$$

$$= 2\left(z + \frac{1}{1-(-1)} Ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right) + c = 2\sqrt{e^x + 1} + Ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1} - 1}{\sqrt{e^x+1} + 1}\right| + c$$

Dividiendo y usando directamente una Fórmula deducida en el método de Fracciones Parciales.

b) $\int \frac{4^x + 1}{2^x + 1}\, dx$

$$\int \frac{4^x+1}{2^x+1}\, dx = \int \frac{2^{2x}+1}{2^x+1}\, dx = \int \left(2^x - 1 + \frac{2}{2^x+1}\right) dx = \frac{2^x}{Ln\, 2} - x + \int \frac{2^{-x}}{2^{-x}}\, \frac{2}{2^x+1}\, dx$$

$$= \frac{2^x}{Ln\, 2} - x + 2\int \frac{2^{-x}}{1 + 2^{-x}}\, dx = \frac{2^x}{Ln\, 2} - x + \frac{2}{-Ln\, 2}\int \frac{-2^{-x} Ln\, 2}{1 + 2^{-x}}\, dx$$

$$= \frac{2^x}{Ln\, 2} - x - \frac{2}{Ln\, 2} Ln\left|1 + 2^{-x}\right| + c$$

Previamente se divide la Fracción. Para integrar la fracción se multiplica y divide por 2^{-x}

c) $\int \frac{x^2\, dx}{(x\, Cos\, x - Sen\, x)^2}$

Para resolver se multiplica y divide por: $Sen\, x$

$$\int \frac{x^2\, dx}{(x\, Cos\, x - Sen\, x)^2} = \int \frac{x}{Sen\, x}\, \frac{x\, Sen\, x\, dx}{(x\, Cos\, x - Sen\, x)^2}$$

Luego se integra Por Partes

$$u = \frac{x}{Sen\, x} \Rightarrow du = \frac{Sen\, x - x\, Cos\, x}{Sen^2 x}\, dx$$

Por la complejidad del cálculo de: v, se resuelve separadamente por el Método de Sustitución.

$$v = \int dv = \int \frac{x\, Sen\, x\, dx}{(x\, Cos\, x - Sen\, x)^2} \; ; \quad \text{Si:} \; z = x\, Cos\, x - Sen\, x \Rightarrow dz = -x\, Sen\, x\, dx$$

Luego de reemplazar en la Fórmula de Por Partes se simplifica.

$$= \int \frac{-dz}{z^2} = -\int z^{-2}\, dz = -\frac{z^{-1}}{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x\, Cos\, x - Sen\, x}$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{(x\, Cos\, x - Sen\, x)^2} = \frac{x}{Sen\, x}\, \frac{1}{x\, Cos\, x - Sen\, x} - \int \frac{1}{x\, Cos\, x - Sen\, x}\, \frac{Sen\, x - x\, Cos\, x}{Sen^2 x}\, dx$$

$$= \frac{x}{(Sen\, x)(x\, Cos\, x - Sen\, x)} + \int Csc^2 x\, dx$$

$$= \frac{x}{(Sen\, x)(x\, Cos\, x - Sen\, x)} - Cot\, x + c = \frac{x\, Sen\, x + Cos\, x}{x\, Cos\, x - Sen\, x} + c$$

d) $\int e^{5\, Ln\, x}\, dx$

Se usa la siguiente Propiedad de las Funciones Exponenciales:

$$e^{Ln\, f} = f$$

$$\int e^{5\, Ln\, x}\, dx = \int e^{Ln(x^5)}\, dx$$

$$= \int (x^5)\, dx = \frac{x^6}{6} + c$$

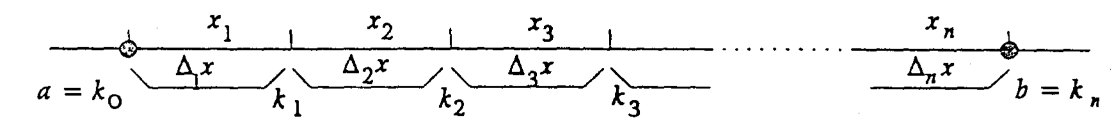
Luego de ordenar el exponente, para aplicar la propiedad, la integración es inmediata.

VIII-14 INTEGRALES DEFINIDAS

Si: $f_{(x)}$ es una Función Continua en el Intervalo: $a \le x \le b$, este Intervalo se divide en: n subintervalos comprendidos entre: $a = k_0 < k_1 < k_2 < \dots\dots < k_n = b$

La Longitud de cada Subintervalo será: $\Delta_i x = k_i - k_{i-1}$

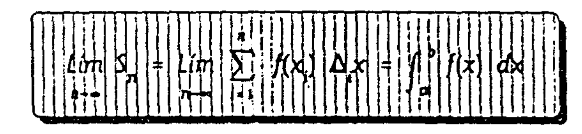
Dentro de cada Subintervalo se toma: x_i $(x_1, x_2, \dots)$. No necesariamente en forma simétrica. Lo anterior se muestra en la gráfica:



Conformando la Suma:

$$S_n = f_{(x_1)}\Delta_1 x + f_{(x_2)}\Delta_2 x + \dots + f_{(x_n)}\Delta_n x = \sum_{i=1}^{n} f_{(x_i)}\,\Delta_i x$$

Existen n Subintervalos, por tanto se tienen n Términos, a medida que aumenta n disminuye la Longitud $\Delta_i x$ de cada Subintervalo. En el Límite:



$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Así se obtiene la Integral Definida de: $f_{(x)}$ entre los Extremos desde: a hasta: b

TEOREMAS

Si $f_{(x)}$, $g_{(x)}$ son Funciones Continuas, entonces se cumplen los Teoremas:

T8-6) $\int_a^a f_{(x)}\,dx = 0$ — Los extremos de la integral Definida son iguales, determinan un resultado de cero

T8-7) $\int_a^b c\,f_{(x)}\,dx = c\int_a^b f_{(x)}\,dx$ — Una constante puede salir de la Integral

T8-8) $\int_a^b f_{(x)}\,dx = -\int_b^a f_{(x)}\,dx$ — Al cambiar el orden de los extremos, cambia el signo de la Integral.

T8-9) $\int_a^b [f_{(x)} + g_{(x)}]\,dx = \int_a^b f_{(x)}\,dx + \int_a^b g_{(x)}\,dx$ — La Integral de una suma es la suma de las integrales

T8-10) $\int_a^b f_{(x)}\,dx = \int_a^c f_{(x)}\,dx + \int_c^b f_{(x)}\,dx$; Si: $a < c < b$ — División del Intervalo de integración.

T8-11) $\int_a^b f_{(x)}\,dx = (b-a)\,f_{(x_0)}$ Si: $a \le x_0 \le b$ — Teorema del Valor Medio.

T8-12) $F_{(u)} = \int_a^u f_{(x)}\,dx \Rightarrow \dfrac{d}{du}F_{(u)} = f_{(u)}$

T8-13) $\int_a^b f_{(x)}\,dx = F_{(x)}\Big|_a^b = F_{(b)} - F_{(a)}$ Si: $F'_{(x)} = f_{(x)}$

Teorema Fundamental del Cálculo o Regla de Barrow.

Usando la definición de la Integral Definida, como Límite de una sumatoria, se demuestran las anteriores Propiedades, como se realizará en P-8-40, P-8-41, donde se suponen implícitas las condiciones de existencia de los Límites.

En cuanto a las condiciones que se deben cumplir, para que se pueda integrar en forma Definida a una Función se tiene el Teorema que expresa: "Una Función es Integrable en: $a \le x \le b$, si es Continua en ese intervalo"

Ej 8-32 Por la definición respectiva, se calcula la siguiente Integral Definida:

$\int_1^5 6x\, dx$ — La Integral es Definida, donde se tiene: $f_{(x)} = 6x$; $a = 1$; $b = 5$

$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta_i x$ — Usando la definición de la Integral Definida.

1, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, 5; $a = k_0$, $\Delta_1 x$, k_1, $\Delta_2 x$, k_2, $\Delta_3 x$, k_3, $\Delta_n x$, $b = k_n$

El Intervalo entre a; b se divide en n subintervalos, de longitud Δx

Se toman idénticos Δx

$\Delta_1 x = \Delta_2 x = \dots = \Delta_i x \dots = \Delta_n x = \Delta x \quad ; \quad \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ — Se elige el punto de x_i exactamente a la mitad de cada subintervalo.

$x_1 = a + \frac{1}{2}\Delta x \ ; \ x_2 = a + \frac{3}{2}\Delta x \ ; \dots ; \ x_i = a + \frac{2i-1}{2}\Delta x$ — Se calculan los valores de x_i

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} 6x_i\, \Delta x = \sum_{i=1}^{n} 6(a + \frac{2i-1}{2}\Delta x)\Delta x$ — Se conforma la sumatoria

$= \sum_{i=1}^{n} [6\Delta x(a - \frac{1}{2}\Delta x) + 6\Delta^2 x\ i]$ — Ordenando la Sumatoria en términos de: i (Variable de la sumatoria)

$= 6\Delta x(a - \frac{1}{2}\Delta x)\sum_{i=1}^{n} 1 + 6\Delta^2 x \sum_{i=1}^{n} i$ — Se usan los resultados de las sumatorias para cada caso (Apéndice A)

$= 6\Delta x(a - \frac{1}{2}\Delta x)n + 6\Delta^2 x \dfrac{n(n+1)}{2}$ — Reemplazando Δx por su expresión inicial.

$= 6\dfrac{b-a}{n}(a - \dfrac{1}{2}\dfrac{b-a}{n})n + 6(\dfrac{b-a}{n})^2 \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\int_1^5 6x\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta_i x$ — Integral dada por definición

$= \lim_{n\to\infty}\left[6\dfrac{b-a}{n}(a - \dfrac{1}{2}\dfrac{b-a}{n})n + 6(\dfrac{b-a}{n})^2 \dfrac{n(n-1)}{2}\right]$ — Reemplazando el valor de la Sumatoria y el de Δx

$= 6(\dfrac{b^2-a^2}{2}) = 6(\dfrac{5^2-1^2}{2}) = 72$ — Resultado final, para comprobar ver Ej-8-34

8-41 Demostrar los siguientes Teoremas de las Integrales Definidas

T8-6 $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ — Si: $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta_i x$ — Si: $b = a \Rightarrow \Delta = 0$. Por tanto la Sumatoria y la Integral son 0

T8-7 $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$ — Si: $\Delta = k_i - k_{i-1} \Rightarrow -\Delta = k_{i-1} - k_i$

Tomando así los Intervalos: $\sum f(x_i)[-\Delta_i x] = -\sum f(x_i)\Delta_i x$

T8-8 $\int_a^b c\, f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$ — Por Propiedad de Sumatorias: $\sum c\, f(x_i)\,\Delta_i x = c\sum f(x_i)\,\Delta_i x$

T8-9 $\int_a^b [f + g]\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx$ — $\sum [f + g]\Delta_i x = \sum f\,\Delta_i x + \sum g\,\Delta_i x$

Al definirse la Integral Definida como el Límite de una Sumatoria, las Propiedades de Sumatorias y Límites, determinan a su vez Propiedades de las Integrales.

8-42 Demostrar los siguientes Teoremas de las Integrales Definidas:

T8-10 $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$ Un punto que subdivide el Intervalo es: c

$$a < c < b$$

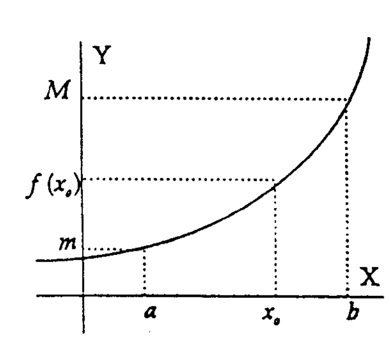
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,\Delta_i x = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{c} f\,\Delta_i x + \lim_{x\to\infty} \sum_{i=c}^{n} f\,\Delta_i x$$

La Propiedad de Límites y las Sumatorias permite la Propiedad de las Integrales.

T8-11 $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_o)$

$$a \le x_o \le b$$

Si M, m son el Máximo y Mínimo Absolutos de $f(x)$ en el Intervalo: $a \le x \le b$. Operando algebraicamente:



$$m < f_{(x)} < M$$

$$m\,\Delta_i x < f_{(x)}\,\Delta_i x < M\,\Delta_i x$$

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f_{(x)}\,dx < \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) < \int_a^b f_{(x)}\,dx < M(b-a)$$

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f_{(x)}\,dx < M$$

$$\Rightarrow f_{(x_o)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f_{(x)}\,dx$$

T8-12 $F_{(u)} = \int_a^u f_{(x)}\,dx \Rightarrow \frac{d}{du}F_{(u)} = f_{(u)}$

Teorema del Valor Medio de las Integrales.

A partir de $F(u)$ se determina $F(u + \Delta u)$

$$F_{(u+\Delta u)} - F_{(u)} = \int_a^{u+\Delta u} f_{(x)}\,dx - \int_a^u f_{(x)}\,dx$$

Se efectúa la diferencia, ordenando los extremos, por Propiedades ya demostradas.

$$= \int_u^a f_{(x)}\,dx + \int_a^{u+\Delta u} f_{(x)}\,dx$$

Por el Teorema: T8-6 donde: $u < u_o < u + \Delta u$

$$= \int_u^{u+\Delta u} f_{(x)}\,dx = f_{(u_o)}\Delta u$$

$$\frac{F_{(u+\Delta u)} - f_{(u)}}{\Delta u} = f_{(u_o)}$$

Aplicando luego la definición de la Derivada.

$$\Rightarrow \frac{dF}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{F_{(u+\Delta u)} - F_{(u)}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} f_{(u_o)} = f_{(u)}$$

Si: $F_{(x)} = \int_a^x f_{(x)}\,dx \Rightarrow F'_{(x)} = f_{(x)}$

T8-13 $\int_a^b f_{(x)}\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$

Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Por el Teorema T8-12

$$\int_a^x f_{(x)}\,dx = F_{(x)} + C$$

Tomando: $x = a$ (En el Extremo superior)

$$\int_a^a f_{(x)}\,dx = 0 = F_{(a)} + C \quad \Rightarrow \quad C = -F_{(a)}$$

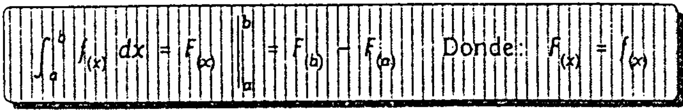
Tomando: $x = b$

$$\int_a^b f_{(x)}\,dx = F_{(b)} + C = F_{(b)} - F_{(c)}$$

Se aprecia que las demostraciones se basan en los Teoremas y Propiedades conocidas de las sumatorias y de los Límites.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL O REGLA DE BARROW

Como consecuencia de los anteriores Teoremas de las Integrales Definidas, se obtiene la llamada Regla de Barrow que dice:


$$\int_a^b f_{(x)}\,dx = F_{(x)}\Big|_a^b = F_{(b)} - F_{(a)} \qquad \text{Donde: } F'_{(x)} = f_{(x)}$$

La Regla de Barrow indica que una Integral Definida se puede calcular, mediante procedimientos de las Integrales Indefinidas, para luego reemplazar en el resultado los Extremos (Previamente el Superior después el Inferior). Luego se restan entre si tales reemplazos.

Ej 8-33 $\int_1^4 x^2\,dx$

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4$$

$$= (\frac{4^3}{3}) - (\frac{1^3}{3}) = \frac{63}{3} = 21$$

Integral Definida, donde la Función es: $f_{(x)} = x^2$; El Extremo Superior es: $b = 4$; el Inferior es: $a = 1$. Se integra la Función por Reglas conocidas, vistas anteriormente en las Integrales Indefinidas.

Reemplazando en el Resultado los Extremos (Primero el Superior luego el Inferior). El Resultado final es una constante.

Ej 8-34 $\int_1^6 6x\,dx$

$$\int_1^6 6x\,dx = 6\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^5 = 3x^2\Big|_1^5$$

$$= 3(5)^2 - 3(1)^2 = 72$$

Integral Definida, que se calculó en el Ej 8-33 usando la definición como Límite de una Sumatoria.

Integrando por Reglas conocidas, reemplazando Extremos. Resultado final, idéntico al obtenido anteriormente en el Ej 8-32

8-43 Calcular las siguientes Integrales Definidas.

a) $\int_0^3 (x^4 - 1)dx$

$$\int_0^3 (x^4 - 1)dx = (\frac{x^5}{5} - x)\Big|_0^3 = (\frac{3^5}{5} - 3) - (\frac{0^5}{5} - 0) = \frac{228}{5}$$

Se aplica el Teorema Fundamental. O Regla de Barrow.

b) $\int_0^1 (e^x - x)\,dx$

$$\int_0^1 (e^x - x)\,dx = (e^x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = (e^1 - \frac{1^2}{2}) - (e^0 - \frac{0^2}{2}) = e - \frac{3}{2}$$

Integrando por Reglas conocidas

c) $\int_0^{\pi/2} Cos\ x\,dx$

$$\int_0^{\pi/2} Cos\ x\,dx = (Sen\ x)\Big|_0^{\pi/2} = (Sen\ \frac{\pi}{2}) - (Sen\ 0) = 1 - 0 = 1$$

Integrando por Reglas conocidas.

d) $\int_3^4 (2x - 1)^5\,dx = ?$ Si: $u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2\,dx$

$$\int_3^4 (2x - 1)^5\,dx = \int u^5\,\frac{du}{2} = \frac{u^6}{12}$$

$$= \frac{(2x - 1)^6}{12}\Big|_3^4 = \frac{(2\cdot 4 - 1)}{12} - \frac{(2\cdot 3 - 1)^6}{12} = 8502$$

$$\int_3^4 (2x - 1)^5\,dx = \int_5^7 u^5\,\frac{du}{2} \qquad Si:\ u = 2x - 1 \qquad \begin{matrix} x = 3 \Rightarrow u = 5 \\ x = 4 \Rightarrow u = 7 \end{matrix}$$

$$= \frac{u^6}{6}\Big|_5^7 = \frac{7^6}{6} - \frac{5^6}{6} = 8502$$

Para integrar se usa el Método de Sustitución.

Retornando a variable original, se reemplazan sus Extremos.

Otro modo es cambiar los Extremos de integración, de acuerdo al Cambio de variable.

Reemplazando esos nuevos extremos para la variable u.

VIII.- PROBLEMAS PROPUESTOS

8-1 Calcular las siguientes Integrales Inmediatas:

a) $\int 6(x^5 + 5^x + 5x + 5)dx$

b) $\int 60(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{x^5} + \frac{5}{x} + \frac{x}{5})dx$

$x^6 + 6 \cdot 5^x/Ln\,5 + 15x^2 + 30x$

$50\sqrt[5]{x^6} - 15x^{-4} + 300Ln\,x + 6x^2$

c) $\int \frac{1 - x^4}{1 + x^2}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x}\,dx$

$9x + 3x^3$; $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$

e) $\int \frac{6x^3}{x - 1}\,dx$

f) $\int (e^x\, 3^x)\,dx$

$2x^3 + 3x^2 + 6x + 6Ln|x - 1|$; $\frac{e^x\, 3^x}{Ln\,3 + 1}$

g) $\int \sqrt{ax}\,dx$

h) $\int x^{(1-n)/n}\,dx$

$\frac{2}{3}\sqrt{ax^3}$; $n\sqrt[n]{x}$

8-2 Aplicando el Método de Sustitución, calcular las siguientes Integrales:

a) $\int (x - 5)^7\,dx$

b) $\int x^4(1 + x^5)^8 dx$

$\frac{1}{8}(x - 5)^8$; $\frac{1}{45}(1 + x^5)^9$

c) $\int \frac{10x}{\sqrt{3 + 5x^2}}\,dx$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}}\,dx$

$2\sqrt{3 + 5x^2}$; $\sqrt{3 + x^2}$

e) $\int e^{Sen\,x} Cos\,x\,dx$

f) $\int \frac{Ln\,x}{x}\,dx$

$e^{Sen\,x}$; $\frac{Ln^2 x}{2}$

g) $\int x\,e^{x^2 - 1}\,dx$

h) $\int \frac{6\,Sen\,x}{5 - 2\,Cos\,x}\,dx$

$\frac{1}{2}e^{x^2-1}$; $3\,Ln|5 - 2\,Cos\,x|$

i) $\int \frac{Cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

j) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}\,dx$

$2\,Sen\sqrt{x}$; $\frac{2}{3}(e^x + 1)^{3/2} - 2(e^x + 1)^{1/2}$

k) $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\,dx$

l) $\int Tan\,x\;Ln(Cos\,x)\,dx$

$x + 2\,Ln|1 - e^{-x}|$; $-\frac{Ln^2|Cos\,x|}{2}$

m) $\int \frac{4x^3}{1 + x^8}\,dx$

n) $\int \frac{Sen\,x}{1 + Cos^2 x}\,dx$

$Arctan\,x^4$; $-Arctan(Cos\,x)$

o) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}}\,dx$

p) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}$

$2\sqrt{x + 1} - 2\,Ln|\sqrt{x + 1} + 1|$;

$\frac{(x + 1)^{3/2} + (x - 1)^{3/2}}{3}$

8-3 Aplicando el Método de Integración de Por Partes, calcular:

a) $\int x\,Cos\,x\,dx$

b) $\int Ln\,x\,x^7\,dx$

$x\,Sen\,x + Cos\,x$; $\frac{1}{8}x^8 Ln\,x - \frac{1}{64}x^8$

c) $\int x\,e^{5x}\,dx$

d) $\int x\,Sec^2 x\,dx$

$\frac{x}{5}e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x}$; $x\,Tan\,x + Ln|Cos\,x|$

e) $\int x^2 Sen\,x\,dx$

f) $\int x^3 e^x\,dx$

$-x^2 Cos\,x + 2x Sen\,x + 2\,Cos\,x$; $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$

g) $\int x\,Arctan\,x\,dx$

h) $\int e^{2x} Cos\,3x\,dx$

$\frac{x^2}{2}Arctan\,x - \frac{x - Arctan\,x}{2}$; $\frac{e^{2x}(3\,Sen\,3x + 2\,Cos\,3x)}{13}$

i) $\int Cos^m x\,dx$

j) $\int x^m Sen\,x\,dx$

$\frac{Cos^{m-1}x\,Sen\,x}{m} + \frac{m - 1}{m}\int Cos^{m-2}x\,dx$

$-x^m Cos\,x + mx^{m-1}Sen\,x - m(m - 1)\int x^{m-2}Sen\,x\,dx$

k) $\int 2x^3 e^{x^2}\,dx$

l) $\int x^2 e^x Sen\,x\,dx$

$e^{x^2}(x^2 - 1)$; $\frac{1}{2}e^x[(x^2 - 1)Sen\,x - (x - 1)^2 Cos\,x]$

8-4 Aplicando el Método de Expresiones Cuadráticas, integrar:

a) $\int \frac{4x^3\,dx}{x^4+1}$ b) $\int \frac{9x^8\,dx}{x^9-1}$ $Ln|x^4+1|\;;\;Ln|x^9-1|$

c) $\int \frac{x^5\,dx}{x^6+1}$ d) $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+6x+1}$ $\frac{1}{6}Ln|x^6+1|\;;\;\frac{1}{2}Ln|x^2+6x+1|$

e) $\int \frac{dx}{x^2+5^2}$ f) $\int \frac{7\,dx}{3x^2+15}$ $\frac{1}{5}Arctan\frac{x}{5}\;;\;\frac{7}{3\sqrt{5}}Arctan\frac{x}{\sqrt{5}}$

g) $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$ h) $\int \frac{dx}{x^2-6x+34}$ $\frac{1}{4}Arctan\frac{x+2}{4}\;;\;\frac{1}{5}Arctan\frac{x-3}{5}$

i) $\int \frac{x\,dx}{x^2+6x+58}$ j) $\int \frac{(5x^2+12x+26)dx}{x^2+6x+34}$ $\frac{1}{2}Ln|x^2+6x+58|-\frac{3}{7}Arctan\frac{x+3}{7}\;;$ $5x-9\,Ln|x^2+6x+34|-18Arctan\frac{x+3}{5}$

k) $\int \frac{2^x\,dx}{1+4^x}$ l) $\int \frac{Cos\,x\,dx}{1+Sen^2x}$ $\frac{1}{Ln\,2}Arctan(2^x)\;;\;Arctan(Sen\,x)$

8-5 Aplicando el Método de las Integrales Trigonométricas, calcular:

a) $\int Sen^6x\,Cos\,x\,dx$ b) $\int Sen^4x\,Cos^3x\,dx$ $\frac{Sen^7x}{7}\;;\;\frac{Sen^5x}{5}-\frac{Sen^7x}{7}$

c) $\int Sen^3x\,Cos^2x\,dx$ d) $\int Sen^5x\,Cos^3x\,dx$ $\frac{Cos^5x}{5}-\frac{Cos^3x}{3}\;;\;\frac{Sen^6x}{6}-\frac{Sen^8x}{8}$

e) $\int Sen^4x\,Cos^2x\,dx$ f) $\int Cos^4x\,dx$ $\frac{x}{16}-\frac{Sen^32x}{48}-\frac{Sen\,4x}{64}\;;\;\frac{3x}{8}+\frac{Sen\,2x}{4}+\frac{Sen4x}{32}$

g) $\int Sen\,3x\,Cos\,5x\,dx$ h) $\int Sen\frac{x}{3}\,Cos\frac{2x}{3}\,dx$ $\frac{Cos\,2x}{4}-\frac{Cos\,8x}{16}\;;\;\frac{3}{2}Cos\frac{x}{3}-\frac{Cos\,x}{2}$

i) $\int Cos\,x\,Cos^22x\,dx$ j) $\int \frac{Sen^3x}{Cos^{4/3}x}\,dx$ $\frac{Sen\,x}{2}+\frac{Sen\,3x}{12}+\frac{Sen\,5x}{20}\;;\;3\,Cos^{-1/3}x+\frac{3}{5}Cos^{5/3}x$

k) $\int Tan\,x\,Sec^2x\,dx$ l) $\int Tan^2x\,Sec^4x\,dx$ $\frac{Tan^2x}{2}\;;\;\frac{Tan^5x}{5}+\frac{Tan^3x}{3}$

m) $\int Cot^6x\,dx$ n) $\int Sec\,x\,Csc^3x\,dx$ $-\frac{Cot^5x}{5}+\frac{Cot^3x}{3}-Cot\,x-x\;;\;Ln|Tan\,x|-\frac{Csc^2x}{2}$

o) $\int Tan^3x\,dx$ p) $\int Sec^5x\,dx$ $\frac{Tan^2x}{2}+Ln|Cos\,x|\;;\;\frac{Sec^3x\,Tan\,x}{4}+\frac{3\,Sec\,x\,Tan\,x}{8}+\frac{3\,Ln|Sec\,x+Tan\,x|}{8}$

8-6 Por el Método de Sustitución Trigonométrica, integrar:

a) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2^2-x^2}}$ b) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $-\frac{\sqrt{2^2-x^2}}{4x}\;;\;\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}$

c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2^2+x^2}}$ d) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ $-\frac{\sqrt{2^2+x^2}}{4x}\;;\;\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}Ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|$

e) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ f) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\sqrt{x^2-1}-Arccos\frac{1}{x}\;;\;\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}Ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ h) $\int \frac{54\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$ $Arcsen\frac{x-2}{2}\;;\;Arctan\frac{x+2}{3}+\frac{3x+6}{x^2+4x+13}$

8-7 Aplicando el Método de las Fracciones Parciales, integrar:

a) $\int \frac{3x-9}{x^2-5x+4}\,dx$ b) $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2-4}$

c) $\int \frac{x^2}{x^2-3x+2}\,dx$ d) $\int \frac{(x^2+2)dx}{x^3+4x^2+x-6}$

e) $\int \frac{(2x^2+41x-91)dx}{x^3-2x^2-11x+12}$ f) $\int \frac{(x^2+3x-3)dx}{x^3-x^2}$

g) $\int \frac{(5x^2+6x+2)dx}{x^3+2x^2+x}$ h) $\int \frac{(3x^2+x-1)dx}{x^3-4x^2+x-4}$

i) $\int \frac{(4x^2+7x+30)dx}{(x+3)(x^2+4x+8)}$ j) $\int \frac{(2x^2+3x+8)dx}{x^3+4x}$

k) $\int \frac{(3x^4+5x^3-2x+2)dx}{(x^2+1)^2(x-1)}$ l) $\int \frac{(x^2+10)dx}{x^4+18x^2+81}$

m) $\int \frac{(3x^2+x+3)dx}{x^4+2x^2+1}$ n) $\int \frac{x^4\,dx}{x^4-1}$

o) $\int \frac{1}{x^6+1}\,dx$

$Ln|(x-1)^2(x-4)|$; $Ln|(x+2)^2(x-2)^3|$

$x + Ln|\frac{(x-2)^4}{x-1}|$; $Ln|\frac{(x-1)^{1/4}(x+3)^{11/4}}{(x+2)^2}|$

$Ln|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}|$; $-\frac{3}{x} + Ln|x-1|$

$Ln|x^2(x+1)^3| + \frac{1}{x+1}$; $Ln|(x-4)^3| + Arctan\,x$

$Ln\frac{|x+3|^9}{|x^2+4x+8|^{5/2}} - 2Arctan\,\frac{x+2}{2}$

$\frac{3}{2}Arctan\frac{x}{2} + 2\,Ln|x|$

$-\frac{1+6x}{2(x^2+1)} + 3Arctanx + \frac{1}{2}Ln|(x^2+1)(x-1)^4|$

$\frac{19}{54}Arctan\,\frac{x}{3} + \frac{1}{18}\frac{x}{x^2+3^3}$

$3\,Arctan\,x - \frac{1}{2(x^2+1)}$; $x + \frac{1}{4}Ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2}Arctan\,x$

$\frac{1}{3}Arctanx + \frac{1}{4\sqrt{3}}Ln|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}| + \frac{1}{6}Arctan\frac{x}{1-x^2}$

8-8 Aplicando el Método de las Racionales Trigonométricas, integrar:

a) $\int \frac{dx}{2+3\,Cos\,x}$ b) $\int \frac{2-Sen\,x}{2+Cos\,x}\,dx$

c) $\int \frac{dx}{2-Sen\,x}$ d) $\int \frac{dx}{4\,Cos\,x+3\,Sen\,x+5}$

e) $\int \frac{1+Cot\,x}{1-Cot\,x}\,dx$ f) $\int \frac{dx}{3-2\,Sen\,x+Cos\,x}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}Ln|(Tan\frac{x}{2}+\sqrt{5})/(Tan\frac{x}{2}-\sqrt{5})|$

$Ln|2+Cos\,x| + \frac{4}{\sqrt{3}}Arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\,Tan\frac{x}{2})$

$\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan[(2Tan\frac{x}{2}-1)/\sqrt{3}]$; $-2/(Tan\frac{x}{2}+3)$

$Ln|Sen\,x - Cos\,x|$; $Arctan(Tan\frac{x}{2}-1)$

8-9 Por la Sustitución Inversa y otras Sustituciones, integrar:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{8x-x^2}}\,dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$ d) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$

e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$ f) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$Arcsen(\frac{x-4}{4})$; $Arcsen(\frac{x+2}{\sqrt{5}})$

$-Arcsen(\frac{x+1}{\sqrt{2}\,x})$; $\sqrt{x^2-6x+1}$

$-Ln|\frac{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}}{x}|$; $\frac{8+4x^2+3x^4}{-15}\sqrt{1-x^2}$

8-10 Aplicando el Método de las Integrales Binomias, calcular:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$ b) $\int \frac{dx}{x^3\,\sqrt[3]{2-x^3}}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\,\sqrt{1+x^2}}$ d) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$\frac{-1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}$; $\frac{-(2-x^3)^{2/3}}{4x^2}$

$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3$; $\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$

8-11 Aplicando alguno de los Métodos de Integración, calcular:

a) $\int x^7\sqrt{1+x^4}\,dx$ b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3x}}$ $\frac{(1+x^4)^{5/2}}{10}-\frac{(1+x^4)^{3/2}}{6}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}Ln\left|\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2}}\right|$

c) $\int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{x^2-1}}$ d) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$ $x+\sqrt{x^2-1}-Arccos\frac{1}{x}$; $-\frac{1}{x}-Arctan\,x$

e) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ f) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$ $Arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}-\sqrt{x(1-x)}$; $x+3\,Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$

g) $\int e^{3x}(x^3-2x^2+5)dx$ h) $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ $e^{3x}(\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{2x}{3}+\frac{13}{9})$; $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)$

i) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4e^x-5}$ j) $\int e^{Arcsen\,x}\,dx$ $\frac{1}{6}Ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+5}\right|$; $\frac{e^{Arcsen\,x}}{2}(x+\sqrt{1-x^2})$

k) $\int \frac{Ln\,x-1}{Ln^2x}\,dx$ l) $\int \frac{Ln\,x}{x^3}\,dx$ $\frac{x}{Ln\,x}$; $\frac{-(2\,Ln\,x+1)}{4x^2}$

m) $\int \frac{Arcsen\,x}{x^2}\,dx$ n) $\int Sen\sqrt{x}\,dx$ $Ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{Arcsen\,x}{x}$; $2(Sen\sqrt{x}-\sqrt{x}Cos\sqrt{x})$

o) $\int \frac{x+Sen\,x}{1+Cos\,x}\,dx$ p) $\int \frac{dx}{1+Tan\,x}$ $x\,Tan\frac{x}{2}$; $\frac{x+Ln|Sen\,x+Cos\,x|}{2}$

q) $\int \frac{dx}{1+Senx+Cosx}$ r) $\int \frac{dx}{1+Cos^2x}$ $Ln\left|1+Tan\frac{x}{2}\right|$; $\frac{1}{\sqrt{2}}Arctan(\frac{Tan\,x}{\sqrt{2}})$

s) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$ t) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$ $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$; $\sqrt{\frac{x}{x+2}}$

u) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$ v) $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$ $\frac{1}{3}Ln\left|\frac{(\sqrt{1+x^3}-1)^2}{x^3}\right|$; $\frac{-(4+3x^3)}{8x(2+x^3)^{2/3}}$

w) $\int \sqrt{Tan\,x}\,dx$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln\left|\frac{Tan\,x-\sqrt{2\,Tan\,x}+1}{Tan\,x+\sqrt{2\,Tan\,x}+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}Arctan\frac{\sqrt{2\,Tan\,x}}{1-Tan\,x}$

8-12 Usando la definición de la Integral Definida, calcular:

a) $\int_1^3 8x\,dx$ b) $\int_0^5 6x^2\,dx$ 32 ; 250

8-13 Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow) integrar:

a) $\int_0^2 9x^3\,dx$ b) $\int_2^5 (6x+3)dx$ 36 ; 72

c) $\int_1^3 (6x^2-2x+1)dx$ d) $\int_0^{\pi/3} Tan\,x\,dx$ 46 ; $Ln\,2$

e) $\int_0^1 x\,e^x\,dx$ f) $\int_0^2 \frac{(-x+1)dx}{x^2+3x-2}$ 1 ; $Ln\frac{9}{8}$

g) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$ h) $\int_1^e x^2\,Ln\,x\,dx$ $\frac{2^{3/2}-1}{3}$; $\frac{2e^3+1}{9}$



IX-1 APLICACIONES DE INDEFINIDAS

Una aplicación básica de las Integrales Indefinidas, se presenta en las Ecuaciones Diferenciales, que poseen la siguiente Forma general:

$$\frac{dy}{dx} = f_{(x)} \quad \Rightarrow \quad y = F_{(x)} + c$$

Donde: $F_{(x)}$ es la Integral Indefinida o Función Primitiva de $f_{(x)}$; c es una constante que se puede calcular, usando las condiciones iniciales dadas. La Ecuación Diferencial es de Primer Orden, Primer Grado.

Ej 9-1 $\frac{dy}{dx} = 6x^2$ Donde: $x = 1 \Rightarrow y = 6$

Ecuación Diferencial, con una condición dada (Expresada por $x = 1$ entonces: $y = 6$)

$dy = 6x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int 6x^2\,dx$

Despejando el Diferencial dy e integrando ambos miembros de la igualdad.

$y = 2x^3 + C \ ; \ 6 = 2\cdot 1^3 + C \quad \Rightarrow \quad C = 4$

$y = 2x^3 + 4$

El resultado contiene a una constante C, para calcularla se remplaza la condición dada.

Las Ecuaciones Diferenciales pueden presentarse como modelos matemáticos de situaciones particulares de: Geometría, Física, Economía, etc.

Ej 9-2 Se busca la Ecuación de una curva, de pendiente: $m = 6x^2$; si tal curva pasa por el punto (1,6)

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 = m$

La Interpretación geométrica de una Derivada, expresa de que ésta es igual a una pendiente.

$y = 2x^3 + C$

$y = 2x^3 + 4$

Resolviendo la Ecuación Diferencial (Ver Ej 9-1) ; se obtiene la Ecuación de la curva requerida.

9-1 Usando los conceptos de Integral Indefinida, resolver los Problemas:

a) La pendiente de una curva es: $m = (-x/\sqrt{a^2 - x^2})$ pasa por el punto: $(a,0)$

$m = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$

Por concepto de pendiente que es igual a la Derivada. Luego despejando el Diferencial: dy

$\int dy = \int \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} + C$

Integrando ambos miembros

$0 = \sqrt{a^2 - a^2} + C \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Reemplazando la condición dada, para calcular la constante C.

b) Un Móvil tiene aceleración: $a_{(t)} = 8t$; Hallar su Velocidad si: $v_{(0)} = 3$

$a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = 8t \quad \Rightarrow \quad dv = 8t\,dt$

La Aceleración se define como la Derivada de la Velocidad, despejando e integrando.

$\int dv = \int 8t\,dt \quad \Rightarrow \quad v_{(t)} = 4t^2 + C \ , \quad v_{(0)} = 3$

$\Rightarrow \quad 3 = 4\cdot 0^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = 3 \quad \Rightarrow \quad v_{(t)} = \underline{\underline{4t^2 + 3}}$

Reemplazando la condición dada. Solución completa de la expresión de Velocidad.

IX-2 CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRACIÓN

Las Integrales Definidas se usan para calcular el Área que se encuentra debajo de la curva de: $f_{(x)}$; por encima del Eje de abscisas, limitada lateralmente por los valores de: $x = a$; $x = b$ (Tal como se muestra en la gráfica)

Dividiendo el Intervalo: $a \leq x \leq b$, en 4 Subintervalos (De Longitud Δx)

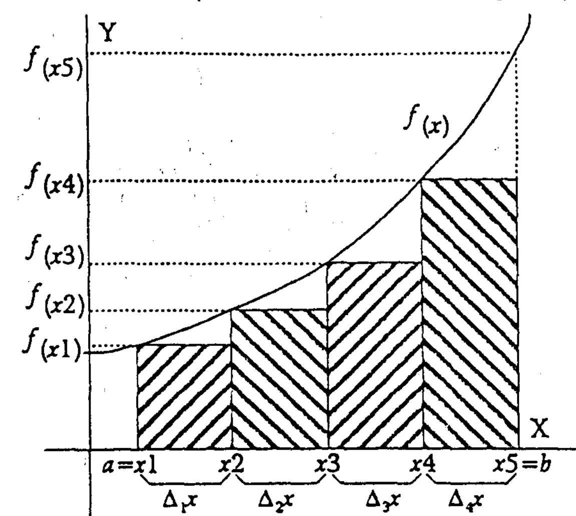
Tomando: x_1, x_2, x_3, x_4 en los extremos inferiores de cada Intervalo.

En la Función $f_{(x)}$ se determinan:
$f_{(x1)}, f_{(x2)}, f_{(x3)}, f_{(x4)}, f_{(x5)}$: $f_{(x)} > 0$

Conformando 4 rectángulos, cada uno de base $\Delta_i x$, altura $f_{(xi)}$

El Área de cada rectángulo será el producto de su base por su altura.

La suma de las Áreas de los 4 rectángulos, es aproximadamente igual al Área debajo de la curva de: $f_{(x)}$



$$S_4 = f(x_1)\,\Delta_1 x + f(x_2)\,\Delta_2 x + f(x_3)\,\Delta_3 x + f(x_4)\,\Delta_4 x = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\,\Delta_i x \approx A$$

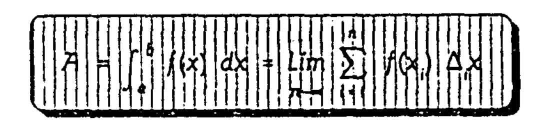
Similarmente puede conformarse otra Suma para más rectángulos (n Rectángulos)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x \approx A \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Al tomar más rectángulos, el Intervalo: $a \leq x \leq b$; se dividirá en más Subintervalos, los que a su vez disminuirán en longitud. La mayor cantidad de rectángulos da un cálculo más correcto del Área debajo de la curva. En el Límite cuando n tienda a infinito se tendrá el Área exacta (Cada Subintervalo tenderá a longitud cero).

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x = A$$

El Límite anterior es a su vez la definición de la Integral Definida, por tanto:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x$$

Interpretando geométricamente a una Integral Definida, se puede concluir, que esta representa al Área encerrada por la curva de $f_{(x)}$; por el Eje de abscisas y lateralmente limitada por los Extremos: a, b

Anteriormente se tomó a x_i como el Extremo Inferior de cada Subintervalo, se puede tomarlo en cualquier otra posición, siempre dentro de un Subintervalo, de todas maneras se llegará a las mismas conclusiones.

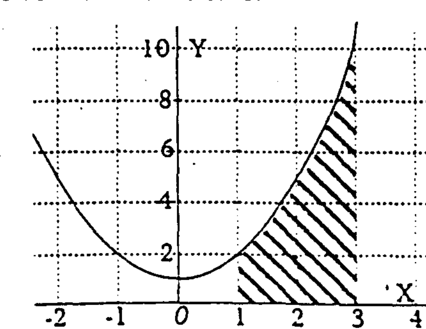
Ej 9-3 Se calcula el Área encerrada por la curva de la Función, dentro del Intervalo indicado:

$f_{(x)} = x^2 + 1$; $1 \leq x \leq 3$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 + 1)\,dx$$

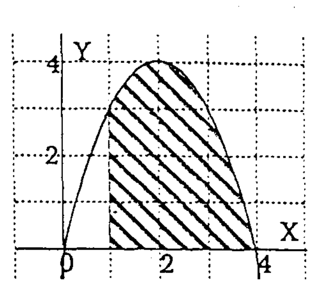
$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{32}{3}$$ (Unidades Cuadradas)



9-2 En los Intervalos indicados, calcular las Áreas de:

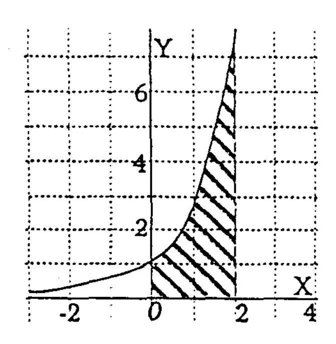
a) $f_{(x)} = 4x - x^2 \;;\; 1 \le x \le 4$



$$A = \int_a^b f_{(x)}\,dx = \int_1^4 (4x - x^2)dx = (4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_1^4$$ Por definición de Área

$$= (4\frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3}) - (4\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}) = \frac{9}{2}$$

b) $f_{(x)} = e^x \;;\; 0 \le x \le 2$



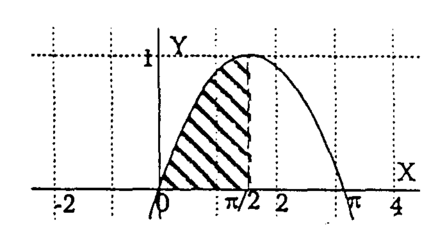
$$A = \int_a^b f_{(x)}\,dx = \int_0^2 e^x\,dx = e^x\Big|_0^2$$

Se calcula la integral, entre los extremos indicados por el Intervalo.

$$= e^2 - e^0 = 6.39$$

El Área está comprendido entre la curva de la Función, sobre el eje X, lateralmente se limita por el Intervalo sobre el eje X.

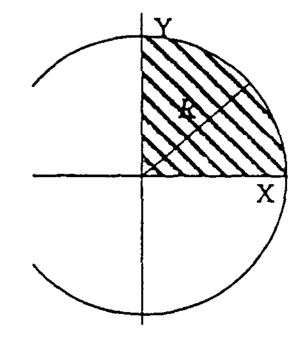
c) $f_{(x)} = Sen\,x \;;\; 0 \le x \le \pi/2$



$$A = \int_a^b f_{(x)}\,dx = \int_0^{\pi/2} Sen\,x\,dx = (-Cos\,x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= (-Cos\frac{\pi}{2}) - (-Cos\,0) = 1$$

d) $x^2 + y^2 = R^2$ (Área de un Círculo de Radio R)



Despejando: $f_{(x)} = y = \sqrt{R^2 - x^2}$

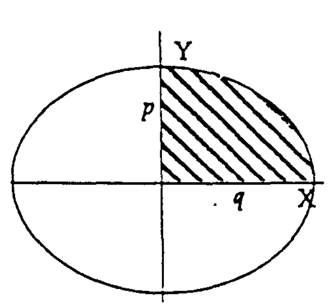
Tomando en cuenta la simetría de la figura, bastará calcular el Área del 1er Cuadrante, para luego multiplicar por 4

$$A = \int_a^b f_{(x)}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 4[\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}Arcsen\frac{x}{R}]\Big|_0^R$$

$$= 4\left[(\frac{1}{2}R\sqrt{R^2 - R^2} + \frac{1}{2}R^2 Arcsen\frac{R}{R}) - (\frac{1}{2}0\sqrt{R^2 - 0^2} + \frac{1}{2}0^2 Arcsen\frac{0}{R})\right]$$

$$= 4[(0 + \frac{1}{2}R^2\frac{\pi}{2}) - (0 + 0)] = \pi R^2$$

e) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ (Área de Elipse de Semiejes p, q)



Despejando: $f_{(x)} = y = \frac{p}{q}\sqrt{p^2 - x^2}$

Por la simetría de la figura, se calcula solo en el 1er Cuadrante y se multiplica por 4.

$$A = \int_a^b f_{(x)}\,dx = 4\int_0^p \frac{p}{q}\sqrt{p^2 - x^2}\,dx$$

$$= 4\frac{p}{q}(\frac{1}{2}x\sqrt{p^2 - x^2} + \frac{1}{2}p^2 Arcsen\frac{x}{q})\Big|_0^p$$

$$= 4\frac{p}{q}\left[(\frac{1}{2}p\sqrt{p^2 - p^2} + \frac{1}{2}p^2 Arcsen\frac{p}{p}) - (\frac{1}{2}0\sqrt{p^2 - 0^2} + \frac{1}{2}p^2 Arcsen\frac{0}{p})\right] = \pi pq$$

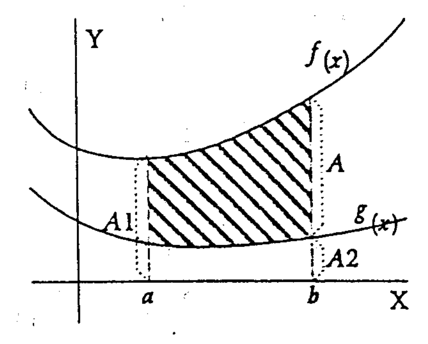
ÁREA ENTRE CURVAS

El Área encerrada entre dos curvas (Determinadas por $f_{(x)}$, $g_{(x)}$) se calcula mediante la relación:



Calculando: A_1, A_2 de la gráfica adjunta, por IX-2

$$A_1 = \int_a^b f_{(x)}\, dx \quad ; \quad A_2 = \int_a^b g_{(x)}\, dx$$



El Área que se desea calcular es: A (Es el Área encerrada entre las curvas de $f_{(x)}$, $g_{(x)}$)

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f_{(x)}\, dx - \int_a^b g_{(x)}\, dx$$

$$= \int_a^b (f_{(x)} - g_{(x)})\, dx$$

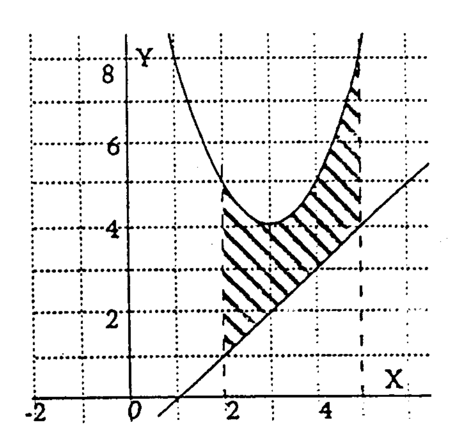
Ej 9-4 Si: $f_{(x)} = x^2 - 6x + 13$; $g_{(x)} = x - 1$

En el Intervalo: $2 \le x \le 5$

$$A = \int_a^b (f_{(x)} - g_{(x)})\, dx = \int_a^b [(x^2 - 6x + 13) - (x - 1)]\, dx$$

$$= \int_2^5 (x^2 - 7x + 14)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + 14x\right)\Big|_2^5$$

$$= \left(\frac{5^3}{3} - 7\frac{5^2}{2} + 14\cdot 5\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 7\frac{2^2}{2} + 14\cdot 2\right) = \frac{15}{2}$$



9-3 Hallar el Área encerrada entre las curvas (En los Intervalos indicados, o entre sus Puntos de Intersección)

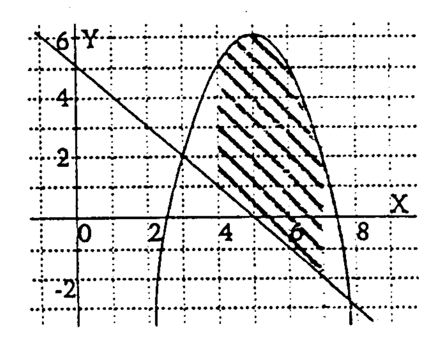
a) $f_{(x)} = -x^2 + 10x - 19$; $g_{(x)} = 5 - x$

En el Intervalo: $4 \le x \le 7$

$$A = \int_a^b [f_{(x)} - g_{(x)}]\, dx = \int_4^7 [(-x^2 + 10x - 19) - (5 - x)]dx$$

$$= \int_4^7 (-x^2 + 11x - 24)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 11\frac{x^2}{2} - 24x\right)\Big|_4^7$$

$$= \left(-\frac{7^3}{3} + 11\frac{7^2}{2} - 24\cdot 7\right) - \left(-\frac{4^3}{3} + 11\frac{4^2}{2} - 24\cdot 4\right) = \frac{32}{2}$$



b) $f_{(x)} = x + 4$; $g_{(x)} = x^2 - 6x + 10$

$y = x + 4$; $y = x^2 - 6x + 10$ $\Rightarrow$ $x = 1 \Rightarrow y = 5$; $x = 6 \Rightarrow y = 10$

Para hallar los Puntos de Intersección, se resuelve el Sistema constituido por las dos ecuaciones:

$$A = \int_a^b [f_{(x)} - g_{(x)}]\, dx = \int_1^6 [(x + 4) - (x^2 - 6x + 10)]\, dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} - 6x\right)\Big|_1^6 = \frac{125}{6}$$

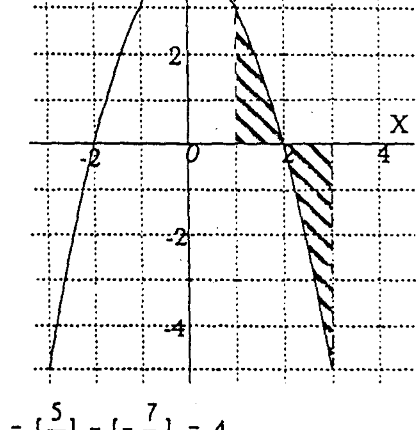
10 Y
8
6
4
2
X
0 2 4 6

ÁREAS NEGATIVAS

Para calcular correctamente un Área, que contenga sectores negativos, donde no se cumple necesariamente que: $f_{(x)} > 0$, el Área debe calcularse por:



Esta expresión toma como positiva el Área positiva, y convierte a positiva un Área negativa (La que se encuentra debajo del Eje de Abscisas)



Ej 9-5 $f_{(x)} = 4 - x^2 \quad ; \quad 1 \le x \le 3$

En la gráfica se observa que parte del Área a calcular es negativa.

$$A = \int_a^b |f_{(x)}|\, dx = \int_1^4 |4 - x^2|\, dx$$

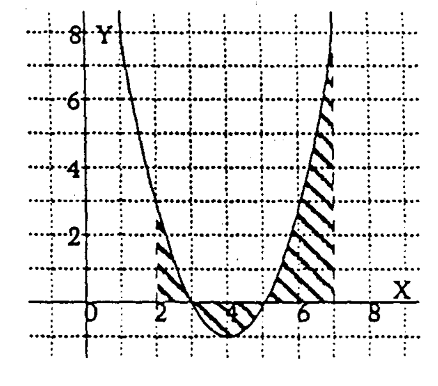
Desarrollando el Valor Absoluto, en el Intervalo de Integración, de acuerdo a si la Función es positiva o negativa.

$$A = \int_1^3 |4 - x^2| dx = \int_1^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 -(4 - x^2) dx$$

$$= (4x - \frac{x^3}{3})\Big|_1^2 - (4x - \frac{x^3}{3})\Big|_2^3$$

$$= [(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - (4\cdot 1 - \frac{1^3}{3})] - [(4\cdot 3 - \frac{3^3}{3}) - (4\cdot 2 - \frac{2^3}{3})] = [\frac{5}{3}] - [-\frac{7}{3}] = 4$$

9-4 Hallar las Áreas de las siguientes Funciones, en los Intervalos indicados:



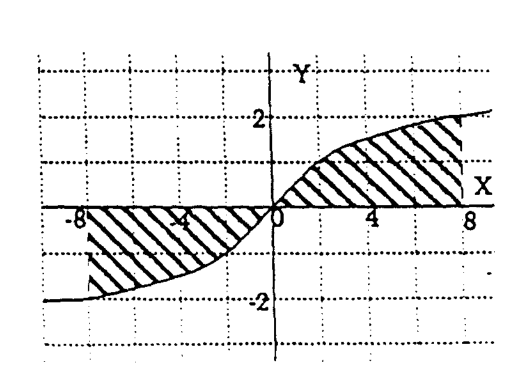
a) $f_{(x)} = x^2 - 8x + 15 \quad ; \quad 2 \le x \le 7$

En la gráfica se observa que el Área es positiva, luego negativa y otra vez positiva, desarrollando el Valor Absoluto:

$$A = \int_a^b |f_{(x)}|\, dx = \int_2^7 |x^2 - 8x + 15|\, dx$$

$$= \int_2^3 (x^2 - 8x + 15) dx + \int_3^5 -(x^2 - 8x + 15) dx + \int_5^7 (x^2 - 8x + 15) dx$$

$$= (\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 15x)\Big|_2^3 - (\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 15x)\Big|_3^5 + (\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 15x)\Big|_5^7 = \frac{28}{3}$$



b) $f_{(x)} = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad -8 \le x \le 8$

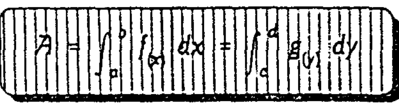
Si bien se tiene un Área negativa, se calcula solo el Área positiva, para luego aprovechar su simetría, duplicando lo calculado. (El Área positiva es igual al Área negativa)

$$A = \int_a^b |f_{(x)}|\, dx = \int_{-8}^8 |\sqrt[3]{x}|\, dx = 2\int_0^8 \sqrt[3]{x}\, dx$$

$$= 2(\frac{x^{4/3}}{4/3})\Big|_0^8 = 2(\frac{8^{4/3}}{4/3} - \frac{0^{4/3}}{4/3}) = 24$$

ÁREAS SOBRE EL EJE Y

Para el adecuado cálculo de Áreas, en algunos casos es conveniente plantear las Integrales en términos de: y (La Variable independiente será: y)

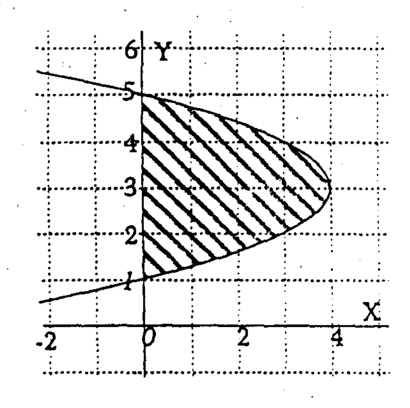


$$A = \int_a^b f_{(x)}\,dx = \int_c^d g_{(y)}\,dy$$

La justificación de esta relación se basa en que es posible conformar Rectángulos horizontales, para aproximar el Área de una Región. (Originalmente en la definición se plantearon Rectángulos verticales, para en el Límite determinar el Área)

Ej 9-6 Si: $y = 3 + \sqrt{4 - x}$; $0 \le x \le 4$

La Integral es dificultosa en términos de x, por ello se planteará en términos de y.



$y = 3 + \sqrt{4 - x} \Rightarrow x = g_{(y)} = -y^2 + 6y - 5$

$0 \le x \le 4 \Rightarrow 1 \le y \le 5$

$A = \int_c^d g_{(y)}\,dy = \int_1^5 (-y^2 + 6y - 5)dy$

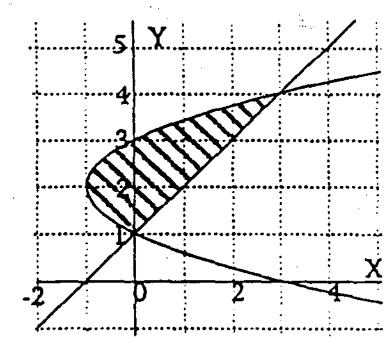
$= (-\frac{y^3}{3} + 6\frac{y^2}{2} - 5y)\Big|_1^5 = \frac{32}{3}$

Despejando x, que se constituye en la Función a integrar.

Se determinan los nuevos extremos para y, de acuerdo a los iniciales extremos de x

9-5 Mediante el adecuado planteo de las Integrales, hallar las Áreas indicadas:

a) *Si:* $y = x + 1$; $y = 2 + \sqrt{x + 1}$



$A = \int_c^d [f_{(y)} - g_{(y)}]\,dy$ $\qquad$ $\begin{matrix} y = x + 1 \\ y = 2 + \sqrt{x+1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4 \end{matrix}$

$A = \int_c^d (f - g)dy = \int_1^4 [(y - 1) - (y^2 - 4y + 3)]dy$

$= \int_1^4 (y^2 + 5y - 4)\,dy = (-\frac{y^3}{3} - 5\frac{y^2}{2} - 4y)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}$

Se trata de Área entre curvas, su planteo se efectuará considerando que $f_{(y)}$; $g_{(y)}$ son Funciones de y. A su vez c ,d son los valores de y en las Intersecciones entre las Funciones.

b) $y = 4x$; $4y = x$; $xy = 16$ (1er Cuadrante)

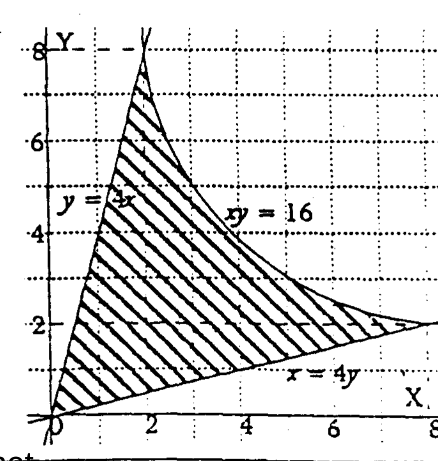
Intersectando de dos en dos las curvas $\quad \begin{matrix} xy = 16 \\ y = 4x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 8 \end{matrix}$

$\begin{matrix} x = 4y \\ xy = 16 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 8 \\ y = 2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = 4x \\ x = 4y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

Todos los puntos están en el 1er Cuadrante, como la dificultad en el planteo es igual tanto en términos de y como de x, se calculará en términos de x

$A = \int_a^b [f_{(x)} - g_{(x)}]\,dx$

$= \int_0^2 (4x - \frac{x}{4})dx + \int_2^8 (\frac{16}{x} - \frac{x}{4})dx = 32\,Ln\,2$



IX-3 VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN

El Volumen de Revolución generado por: $y = f_{(x)}$ en: $a \le x \le b$; por Rotación sobre los Ejes X, Y respectivamente se calculan por:



$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx \qquad V = 2\pi \int_a^b xy\,dx$$

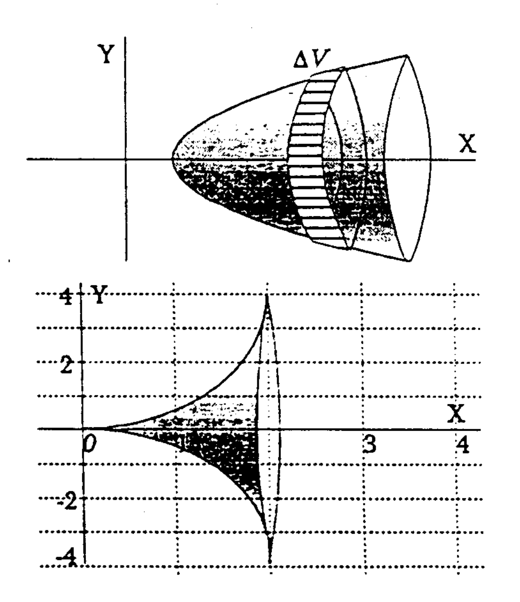
ROTACIÓN SOBRE EL EJE X

Si: $y = f_{(x)}$ en: $a \le x \le b$ rota sobre el Eje X; Un elemento de Volumen (Un disco) de espesor: Δx , tendrá el Volumen de un Cilindro:

$$\Delta V = \pi y^2 \Delta x$$

El Volumen total en el Límite es:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y^2 \Delta_i x = \int_a^b \pi y^2\,dx$$



Ej 9-7 Si: $y = x^2$; $0 \le x \le 2$

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^2 (x^2)^2\,dx = \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

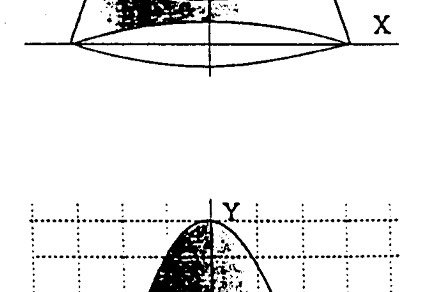
ROTACIÓN SOBRE EL EJE Y

Si: $y = f_{(x)}$ en: $a \le x \le b$ rota sobre el Eje Y; Un elemento de Volumen (Un disco) de espesor: Δy , tendrá el Volumen de un Cilindro:

$$\Delta V = \pi x^2 \Delta y$$

El Volumen total en el Límite es:

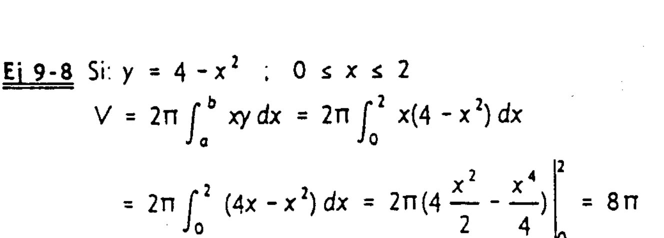
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi x^2 \Delta_i y = \int_c^d \pi x^2\,dy$$



Usando el Teorema de Bliss, se obtiene la Fórmula:

$$V = \pi \int_c^d x^2\,dy = 2\pi \int_a^b xy\,dx$$

Ej 9-8 Si: $y = 4 - x^2$; $0 \le x \le 2$



$$V = 2\pi \int_a^b xy\,dx = 2\pi \int_0^2 x(4 - x^2)\,dx$$

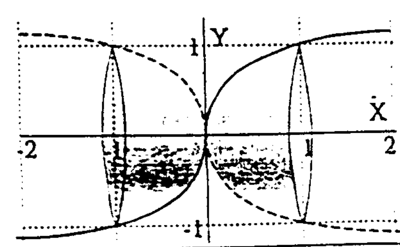
$$= 2\pi \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 2\pi\left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 8\pi$$

9-6 Hallar el Volumen generado por: $y = \sqrt[3]{x}$; en: $-1 \le x \le 1$; rotando sobre el Eje X

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = 2\left[\pi \int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2\,dx\right]$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^{2/3}\,dx = 2\pi \left.\frac{x^{5/3}}{5/3}\right|_0^1 = \frac{6\pi}{5}$$

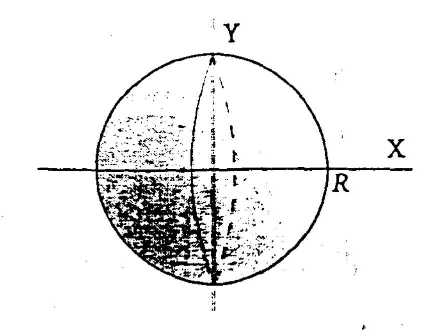
Usando la fórmula respectiva y por la simetría de la figura:



Note que la rotación genera dos cuerpos.

9-7 Hallar los Volúmenes de Revolución, generados por las siguientes Funciones:

a) $x^2 + y^2 = R^2$ (Circunferencia sobre el Eje X)



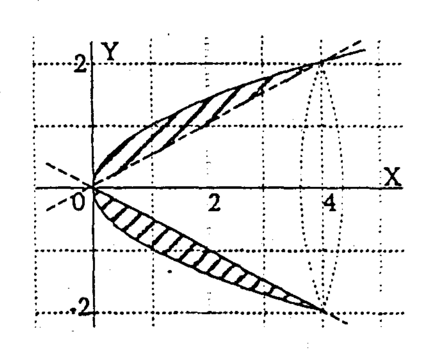
Al rotar una Circunferencia, genera una Esfera. Usando la fórmula respectiva y la simetría de la figura:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = 2[\pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2\,dx]$$

$$= 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = 2\pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Note que rotando la Circunferencia sobre el Eje Y, el Volumen será el mismo.

b) $y = \sqrt{x}\ ;\ y = \dfrac{x}{2}\ ;\ 0 \le x \le 4$ Sobre el Eje X



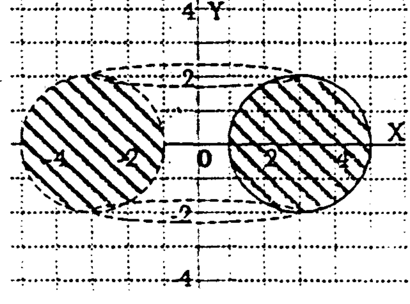
Generalizando la fórmula respectiva, para el caso de rotación de un Área entre curvas.

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b (f^2_{(x)} - g^2_{(x)})\,dx$$

$$= \pi \int_0^4 [(\sqrt{x})^2 - (\frac{x}{2})^2]\,dx = \pi \int_0^4 (x - \frac{x^2}{4})\,dx$$

$$= \pi(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = \frac{8\pi}{3}$$

c) $(x - 3)^2 + y^2 = 2^2$; Sobre el Eje Y



El cuerpo que se genera es un Toroide; usando la fórmula respectiva y su simetría.

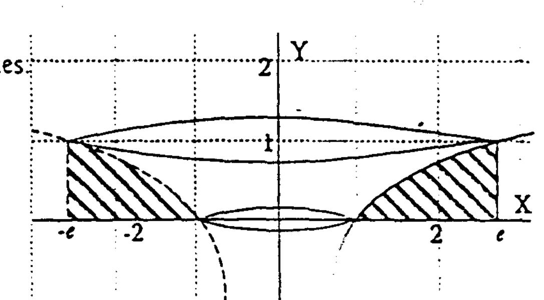
$$V = 2\pi \int_a^b xy\,dx = 2[2\pi \int_1^5 x\sqrt{2^2 - (x-3)^2}\,dx]$$

Para resolver la Integral: $z = x - 3 \Rightarrow dz = dx$, usando los resultados de P-8-10-e

$$V = 4\pi \int_{-2}^{2} (z + 3)\sqrt{2^2 - z^2}\,dz$$

$$= 4\pi[\frac{(\sqrt{4 - z^2})^3}{-3} + 3(\frac{z}{2}\sqrt{4 - z^2} + \frac{4}{2}\,Arcsen\,\frac{z}{2})]\Big|_{-2}^{2} = 4\pi(6\pi) = 24\pi^2$$

d) $y = Ln\,x\ :\ 1 \le x \le e$; Sobre el Eje Y



Utilizando la fórmula respectiva e integrando Por Partes:

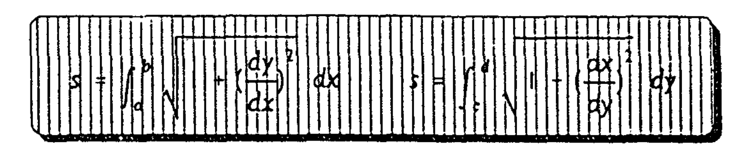
$$V = 2\pi \int_a^b xy\,dx = 2\pi \int_1^e x\,Ln\,x\,dx$$

$$= 2\pi(\frac{x^2}{2} Ln\,x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2})\Big|_1^e = 2\pi(\frac{e^2 + 1}{4})$$

Note que las Regiones de los anteriores incisos c), d) no incluyen al Origen de Coordenadas.

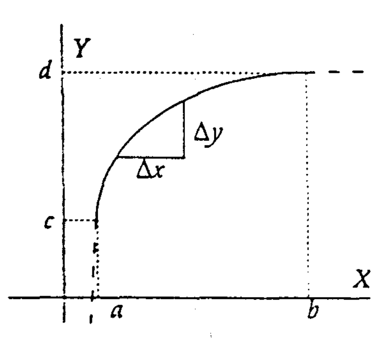
IX-4 LONGITUDES DE CURVA

La Longitud de curva de: $y = f_{(x)}$ en: $a \le x \le b$; puede calcularse por las Expresiones:



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Un elemento de Longitud, en términos de: Δx, Δy es:



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{(Por Pitágoras)}$$

La suma de estos elementos en el Límite, será la Longitud total de la curva.

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\, \Delta_i x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

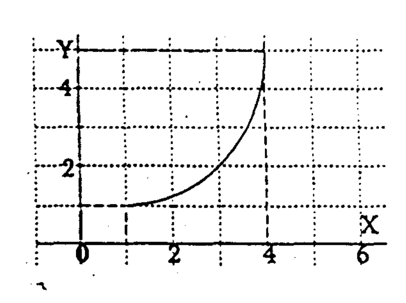
Similarmente pueden obtenerse otras expresiones de s ; Si la curva está dada en Forma Paramétrica, su Longitud es:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \begin{matrix} x = x_{(t)} \\ y = y_{(t)} \end{matrix}$$

<u>Ej 9-9</u> Longitud de: $y = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$; $1 \le x \le 4$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + (\sqrt{x-1})^2}\, dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^4 = \frac{14}{3} \quad (1^{era} \text{ Forma})$$



9-8 Hallar las Longitudes de las siguientes curvas, aplicando la respectiva Forma:

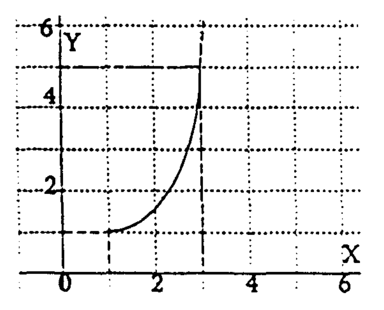
a) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$; $1 \le x \le 3$

Aplicando la 1^{era} Fórmula

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_1^3 \sqrt{1 + (x)^2}\, dx$$

$$= \left(\frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} Ln|x + \sqrt{1 + x^2}|\right)\Big|_1^3 = 4.5$$

Integrando luego por la Integral Nº 32 de la Tabla.



b) $y^2 = x$; $-1 \le y \le 2$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (x')^2}\, dy = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (2y)^2}\, dy$$

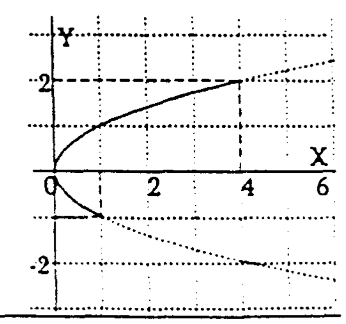
Aplicando la 2^{da} Fórmula de Longitud.

$$= 2\int_{-1}^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2}\, dy$$

Reordenando para integrar.

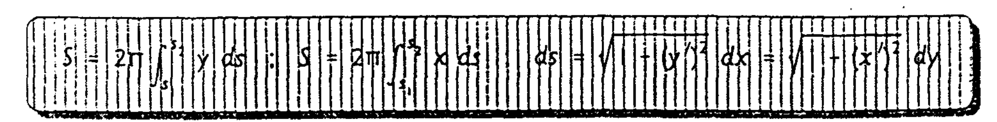
$$= 2\left[\frac{y}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 Ln|y + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2}|\right]\Bigg|_{-1}^2 = 6.13$$

Por la Integral Nº 32 de la Tabla.



IX-5 ÁREA DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Las Áreas de las Superficies de Revolución, generada por: $y = f_{(x)}$ en: $a \le x \le b$; Por rotación sobre los Ejes X, Y; respectivamente se determinan por:



$$S = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} y\, ds \quad ; \quad S = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} x\, ds \qquad ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + (x')^2}\, dy$$

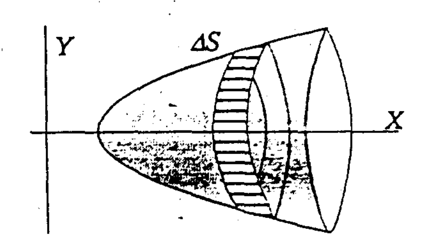
ROTACIÓN SOBRE EL EJE X

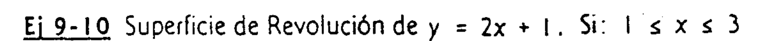
Un elemento de Superficie lateral de espesor: Δs

$\Delta S = 2\pi y \Delta s$ (Área lateral de Cilindro)

La suma en el Límite, determina la Superficie: S

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y \Delta_i s = \int_{s_1}^{s_2} 2\pi y\, ds$$



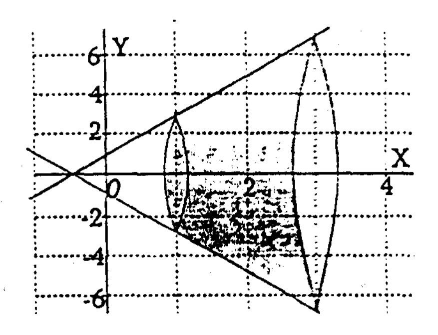


Ej 9-10 Superficie de Revolución de $y = 2x + 1$. Si: $1 \le x \le 3$

$$S = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} y\, ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 (2x + 1)\sqrt{1 + (2)^2}\, dx$$

$$= 2\pi\sqrt{5}\,(2\frac{x^2}{2} + x)\Big|_1^3 = 20\sqrt{5}\,\pi$$



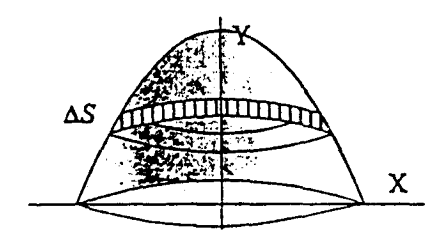
ROTACIÓN SOBRE EL EJE Y

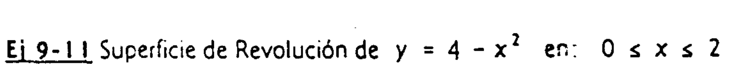
Un elemento de Superficie lateral de espesor: Δs

$\Delta S = 2\pi x \Delta s$ (Área lateral de Cilindro)

La suma en el Límite, determina la Superficie: S

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x \Delta_i s = \int_{s_1}^{s_2} 2\pi x\, ds$$



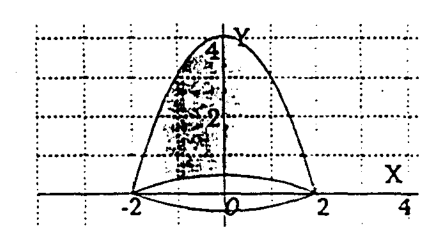


Ej 9-11 Superficie de Revolución de $y = 4 - x^2$ en: $0 \le x \le 2$

$$S = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} x\, ds = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1 + (-2x)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{\pi(17^{3/2} - 1)}{6} = 36.18$$



El uso de cualquiera de las formas de ds es indiferente en cualquiera de las rotaciones, se lo elije con el criterio de que la Integral resultante sea más sencilla. Cambiando de ds, el anterior Problema podía plantearse así:

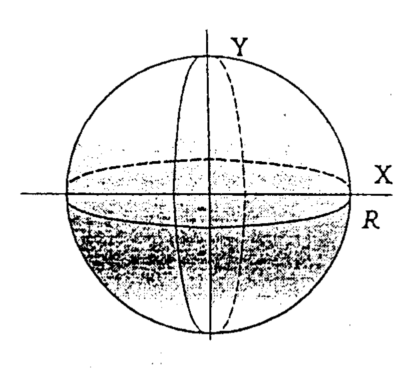
$$S = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} x\, ds = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1 + (x')^2}\, dy = 2\pi \int_0^4 (\sqrt{4 - y})\sqrt{1 + (\frac{-1}{2\sqrt{4 - y}})^2}\, dy$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{17 - 4y}\, dy = \pi\,(\frac{(17 - 4y)^{3/2}}{-6})\Big|_0^4 = \frac{\pi(17^{3/2} - 1)}{6} = 36.18$$

Este cálculo es ligeramente más complicado al anterior. Sin embargo con otras Funciones, es mucho mas conveniente proceder como en este caso

9-9 Hallar las Áreas de Superficies de Revolución siguientes:

a) La Circunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$ sobre el Eje X
Al rotar la Circunferencia sobre el Eje X, determinará una Esfera, de Radio R. Usando la correspondiente Fórmula y su simetría.

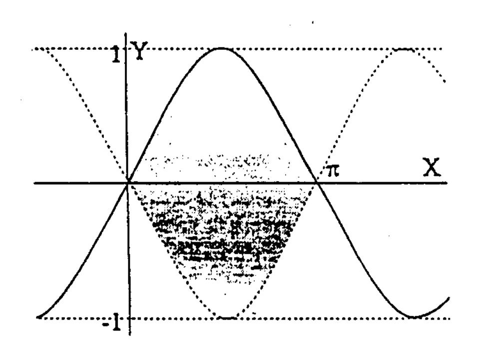


$$S = 2\pi\int_{s_1}^{s_2} y\, ds = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$= 2[2\pi\int_0^R(\sqrt{R^2-x^2})\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\, dx]$$

$$= 2[2\pi\int_0^R R\, dx] = 4\pi Rx\Big|_0^R = 4\pi R^2$$

b) La Semionda: $y = Sen\, x$; sobre el Eje X



$$S = 2\pi\int_{s_1}^{s_2} y\, ds = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

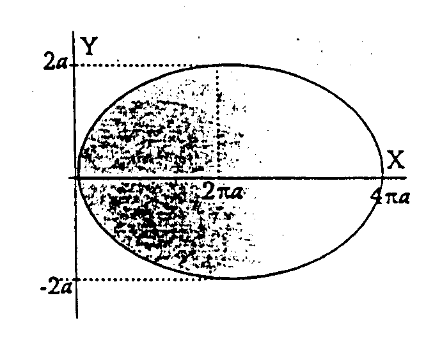
$$= 2\pi\int_0^\pi Sen\, x\sqrt{1+(Cos\, x)^2}\, dx \qquad \begin{matrix} u = Cos\, x \\ du = -Sen\, x\, dx \end{matrix}$$

$$= 2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+u^2}\,(-du)$$ Usando la Formula Nº 32 de la Tabla

$$= -2\pi\left(\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}Ln|u+\sqrt{1+u^2}|\right)\Big|_1^{-1} = 14.42$$

c) La Cicloide: $x = a(t - Sen\, t)$; $y = a(1 - Cos\, t)$ Sobre el Eje X ; $0 \le t \le 2\pi$

Usando el respectivo ds en Forma Paramétrica



$$S = 2\pi\int_{s_1}^{s_2} y\, ds = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\, dt$$

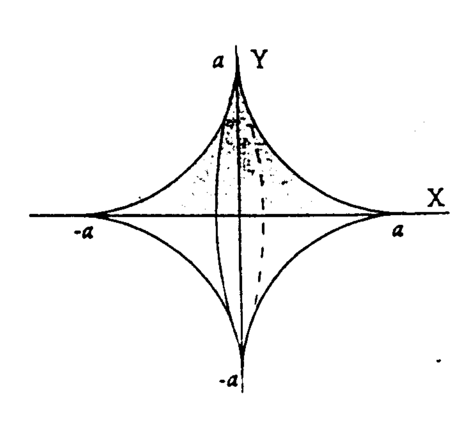
$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-Cos\, t)\sqrt{(a-a\,Cos\, t)^2+(a\,Sen\, t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\,a^2\int_0^{2\pi}(1-Cos\, t)^{3/2}dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi} Sen^3\frac{t}{2}\, dt$$

$$= 8\pi a^2\left(\frac{2}{3}Cos^3\frac{t}{2} - 2\,Cos\,\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{64a^2\pi}{3}$$

La Cicloide es una curva que se forma por la trayectoria de un punto fijo de una Circunferencia al rodar ésta.

d) Astroide: $x = a\,Cos^3 t$; $y = a\,Sen^3 t$ Sobre el Eje X



$$S = 2\pi\int_{s_1}^{s_2} y\, ds = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\, dt$$

$$= 2[2\pi\int_0^{2\pi} a\,Sen^3 t(3a\,Cos\, t\,Sen\, t)\, dt]$$

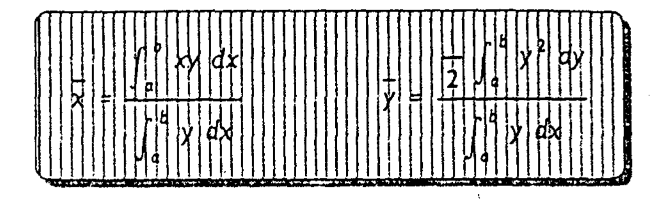
$$= 2(2\pi 3a^2\frac{Sen^4 t}{5})\Big|_0^{\pi/2} = \frac{12a^2\pi}{5}$$

La Astroide es una curva que posee cuatro vértices donde se presentan Puntos Angulosos.

IX-6 CENTROS GEOMÉTRICOS DE ÁREAS

CENTRO GEOMÉTRICO

El Centro Geométrico de una Masa (Llamado también Centroide, Centro de Masas, Centro de Gravedad), que ocupa un Área, es un punto en el cuál se supone concentrada toda su Masa (Se supone que el espesor del Área es uniforme). Si: $y = f_{(x)}$ en: $a \le x \le b$; El Centro Geométrico se calcula por:



$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dy}{\int_a^b y\,dx}$$

MOMENTOS

El Primer Momento (O simplemente Momento) de una Masa que ocupa un Área, con respecto a una Recta, es el producto del Área por la distancia de su Centro Geométrico a tal Recta.

Si M_x ; M_y son los Momentos con respecto a los Ejes X, Y ; siendo $(\bar{x}, \bar{y})$ el Centro Geométrico, se tiene respectivamente para:

Distribución Discreta: $M_x = \bar{y}\,A$; $M_y = \bar{x}\,A$; $\bar{x} = \dfrac{M_y}{A}$

Distribución Continua: $M_x = \dfrac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx$; $M_y = \int_a^b xy\,dx$; $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A}$

El Área puede determinarse, mediante una Integral Definida: $A = \int_a^b y\,dx$

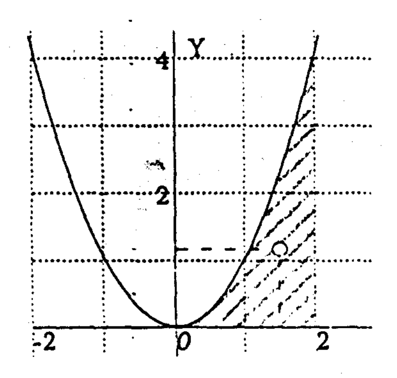
Ej 9-12 Si: $y = x^2$; $0 \le x \le 2$

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2)^2\,dx = \left.\frac{1}{2}\,\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{16}{5}$$

$$M_y = \int_a^b xy\,dx = \int_0^2 x(x^2)\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 4$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{4}{8/3} = \frac{3}{2} \ ; \ \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{16/5}{8/3} = \frac{6}{5}$$



9-10 Hallar el Centro Geométrico de la Semicircunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$, calculando el Área y los Momentos:

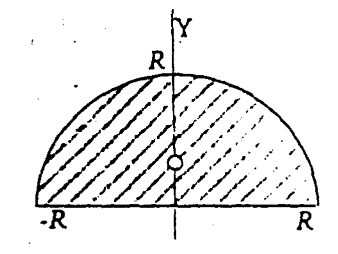
$$A = \int_a^b y\,dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

$$= \left.\left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{1}{2}R^2\,\text{Arcsen}\,\frac{x}{R}\right)\right|_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dy = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \left.\frac{1}{2}\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-R}^{R} = \frac{2R^3}{3}$$

$$M_y = \int_a^b y\,dx = \int_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left.\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{3/2}\right|_{-R}^{R} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{0}{\pi R^2/2} = 0 \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{2R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}$$



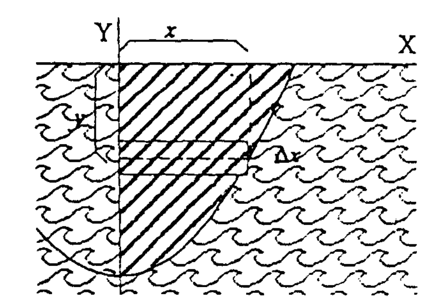
IX-7 APLICACIONES EN FÍSICA

Diversos conceptos muy importantes en Física como ser: La Fuerza, El Trabajo, etc. se definen en términos de Integrales; puesto que toda vez que se trabaja con Distribuciones Continuas, se requiere de Integrales.

PRESIÓN

La Fuerza ejercida por Presión, de un líquido sobre una Superficie Plana se calcula por:





Una columna de un líquido de altura: h de Peso específico γ ; determina una Presión: $P = \gamma h$

La Fuerza F sobre un Área A de esta Presión es:

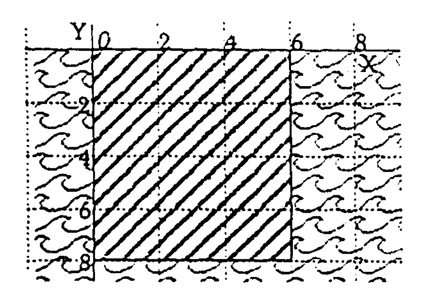
$$F = PA = \gamma h A = \gamma h (xy)$$

Si el Área está sumergida, un elemento de Fuerza es:

$$F = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i F = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma y x \Delta_i y = \int_c^d \gamma y x \, dy$$

En el Límite la suma de los elementos de Fuerza, determinan la Fuerza Total por Presión, note que la variable básica es y. La Presión varia con la altura.

Ej 9-13 Una Placa rectangular de altura 8 y lado 6 está verticalmente sumergida, en un líquido de Peso específico: $\gamma = 1$



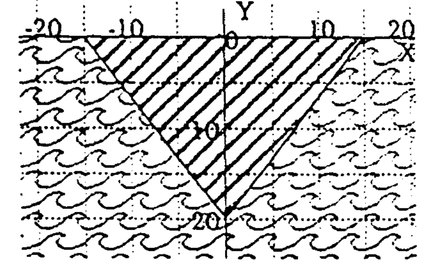
Se calculará la Fuerza por Presión (Se toma y como positiva al descender de nivel)

$$F = \int_c^d \gamma x y \, dy = \int_0^8 1 \cdot 6 \cdot y \, dy = 6 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^8 = 192$$

La variable es y, en cambio x trabaja como una constante.

9-11 Hallar la Fuerza debida a la Presión ejercida por un líquido de Peso específico γ, sobre Áreas que están verticalmente sumergidas.

a) Triángulo Isósceles, base 30, Altura 20, $\gamma = 1$, la base del Triángulo está sobre el Nivel.



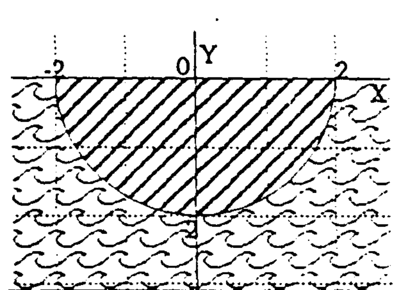
Se toma el Origen de coordenadas, en el centro de la base, por simetría se calculará solo sobre una mitad.

La Ecuación de Recta entre: (15,0) ; (0,20)

$$\frac{y - 0}{x - 15} = \frac{20 - 0}{0 - 15} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{4} y + 15$$

$$F = \int_c^d \gamma y x \, dy = 2\left[\int_0^{20} y(15 - \frac{3}{4} y) \, dy\right] = 200$$

b) Semicircunferencia de Radio 2 con base sobre el nivel, tomando un peso específico $\gamma = 6$



Ecuación de Circunferencia: $x^2 + y^2 = 2^2$

$$F = \int_c^d \gamma y x \, dy = 2\left[\int_0^2 6y \sqrt{2^2 - y^2} \, dy\right] = 32$$

IX-8 APLICACIONES EN ECONOMÍA

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS

Aplicando los conceptos de VII-6 (Aplicaciones de las Derivadas en Economía)

COSTOS

Si el Costo Total es $C_{(x)}$ · el Costo Marginal: C_m se definía anteriormente como:



$C_m = C'_{(x)} \Rightarrow C_{(x)} = \int C_m\,dx$ (x es el Nº de Unidades)

Por tanto el Costo Total es la Integral del Costo Marginal. Para calcular la constante de Integración c de las Integrales, usualmente se especifica una Condición Inicial (Para x = 0), tal como el Costo Fijo.

Ej 9-14 El Costo Marginal es: $C_m = 16 - 2x$; Hallar el Costo Total, su Costo Fijo es: 50

$C_{(x)} = \int C_m\,dx$ — Ecuación del Costo Total (Se asume que los Costos están en Unidades Monetarias).

$= \int (16 - 2x)dx = 16x - 2\dfrac{x^2}{2} + c$ — Reemplazando el Costo Marginal e integrando.

$= 16x - x^2 + c$ — Calculando la constante c o Costo Fijo, cuando: $x = 0$

$C_{(0)} = 16\cdot 0 - 0^2 + c = 50 \Rightarrow c = 50$ — Ecuación final del Costo Total.

$C_{(x)} = 16x - x^2 + 50$

9-12 Si el Costo Marginal es: $C_m = 18 + 8x - 6x^2$; el Costo Fijo es 32; Hallar el Costo Total y el Costo Promedio.

$C_{(x)} = \int C_m\,dx$ — Ecuación del Costo Total

$= \int (18 + 8x - 6x^2)dx$ — Reemplazando el Costo Marginal e integrando.

$= 18x + 4x^2 - 2x^3 + c$

$C_{(0)} = 18\cdot 0 + 4\cdot 0^2 - 2\cdot 0^3 + c = 32 \Rightarrow c = 32$ — Luego se reemplaza la Condición inicial, para calcular la constante.

$C_{(x)} = 18x + 4x^2 - 2x^3 + 32$ — Ecuación final del Costo Total.

$C_p = \dfrac{C_{(x)}}{x} = \dfrac{18x + 4x^2 - 2x^3 + 32}{x}$

$= 18 + 4x - 2x^2 + \dfrac{32}{x}$ — El Costo Promedio es el Costo Total entre el Número de unidades.

9-13 Hallar el Costo Total, si el Costo Marginal es: $C_m = 60e^{2x-8} - 15$; sabiendo que cuando: $x = 4$; el Costo Total es de 40

$C_{(x)} = \int C_m\,dx$ — Ecuación del Costo Total

$= \int (60e^{2x-8} - 15)dx$ — Reemplazando el Costo Marginal

Integrando por P-8-11-e

$= 60\dfrac{e^{2x-8}}{2} - 15x + c = 30e^{2x-8} - 15x + c$ — Calculando la constante, mediante el dato de: $C_{(4)} = 40$

$C_{(4)} = 30e^{2\cdot 4-8} - 15\cdot 4 + c = 40 \Rightarrow c = 70$ — Expresión de Costo Total.

$C_{(x)} = 30e^{2x-8} - 15x + 70$

INGRESOS

Similarmente a los Costos, el Ingreso Marginal R_m ; conociendo el Ingreso Total: $R(x)$, se definió anteriormente como:


$$R_m = R'(x) \Rightarrow R(x) = \int R_m \, dx$$

Por tanto: El Ingreso Total es la Integral del Ingreso Marginal. Para calcular la constante de Integración (c), suele usarse la condición de que el Ingreso es cero cuando la Demanda es cero.

Ej 9-15 El Ingreso Marginal es: $R_m = 12 - 4x - 9x^2$. Se halla el Ingreso Total y la Demanda, tomando en cuenta que cuando la Demanda es 0, el Ingreso es 0.

$$R(x) = \int R_m \, dx$$
Ecuación del Ingreso Total (Las Unidades son monetarias)

$$= \int (12 - 4x - 9x^2)\, dx = 12x - 4\frac{x^2}{2} - 9\frac{x^3}{3} + c$$
Reemplazando el Ingreso Marginal e integrando.

$$= 12x - 2x^2 - 3x^3 + c$$
Tomando: $R_{(0)} = 0$, para calcular la constante.

$$R(0) = 12\cdot 0 - 2\cdot 0^2 - 3\cdot 0^3 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$R(x) = 12x - 2x^2 - 3x^3$$
La Demanda es el Ingreso Total entre el N° de Unidades.

$$y = \frac{R(x)}{x} = \frac{12x - 2x^2 - 3x^3}{x} = 12 - 2x - 3x^2$$

9-14 Hallar los Ingresos Totales, de los Ingresos Marginales: $R_m = 60e^x$; $R_m = 40e^{2x}$

$$R_{(x)} = \int R_m \, dx$$
$$= \int 60e^x \, dx$$
$$= 60e^x + c$$
$$R_{(0)} = 60e^0 + c = 0 \Rightarrow c = -60$$
$$R_{(x)} = 60e^x - 60$$

$$R_{(x)} = \int R_m \, dx$$
$$= \int 40e^{2x} \, dx$$
$$= 20e^{2x} + c$$
$$R_{(0)} = 20e^0 + c = 0 \Rightarrow c = -20$$
$$R_{(x)} = 20e^{2x} - 20$$

9-15 Si: I es un Índice de inflación, p es una cantidad de pesos impresos, hallar I a partir de: (Cuando: $p = 0.25$, $I = 1.8$)

$$\frac{dI}{dp} = \frac{1}{\sqrt{p + 0.24}} + 3\sqrt{p}$$

$$\text{Si: } \frac{dI}{dp} = \frac{1}{\sqrt{p + 0.24}} + 3\sqrt{p}$$
Ecuación de Indice Inflacionario respecto de la variable p

$$dI = \left(\frac{1}{\sqrt{p + 0.24}} + 3\sqrt{p}\right) dp$$
Despejando dI

$$\int dI = \int (p + 0.24)^{-1/2} + 3p^{1/2})\, dp$$
Integrando ambos miembros de la Ecuación

$$I = \frac{(p + 0.24)^{1/2}}{1/2} + 3\frac{p^{3/2}}{3/2} + c$$
Ordenando la Expresión de $I(p)$

$$I_{(p)} = 2(p + 0.24)^{1/2} + 2p^{3/2} + c$$
Para hallar la constante se usa el dato conocido de: $I_{(0.25)} = 1.8$

$$I_{(0.25)} = 2(0.25 + 0.24)^{1/2} + 2(0.25)^{3/2} + c = 1.8$$
Reemplazando y ordenando..

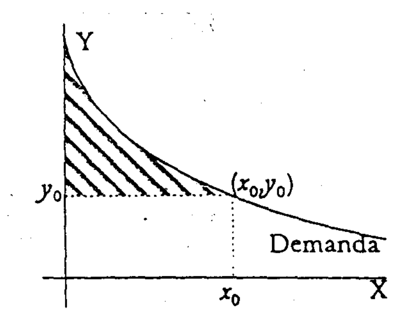
$$\Rightarrow c = 0.15$$

$$I_{(p)} = 2(p + 0.24)^{1/2} + 2p^{3/2} + 0.15$$
$$= 2\sqrt{p + 0.24} + 2\sqrt{p^3} + 0.15$$

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Al igual que las Integrales Indefinidas, las Integrales Definidas, brindan amplia utilidad en la Economía, entre los varios conceptos que pueden determinarse con la ayuda de estas Integrales, se tiene:

EXCEDENTES DE CONSUMIDOR

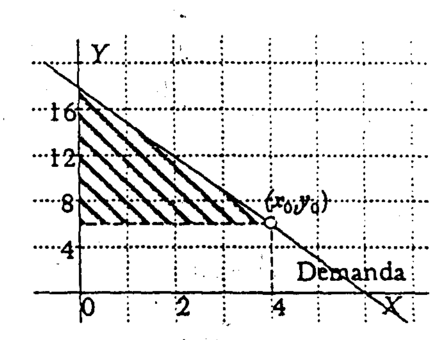


Si una Función de Demanda es: $y = f_{(x)}$ (El Precio es y, las Unidades deman-dadas: x) Tiene su Punto de Equilibrio (Intersección con la Oferta) en (x_0, y_0).

Existirán consumidores dispuestos a pagar un precio mayor a y_0. La Demanda Total del Consumidor se definirá como: EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR, que se representa gráficamente como el Área indicada.

La evaluación del Área puede efectuarse mediante:

$$E_c = \int_0^{x_0} f_{(x)}\,dx - x_0\,y_0$$

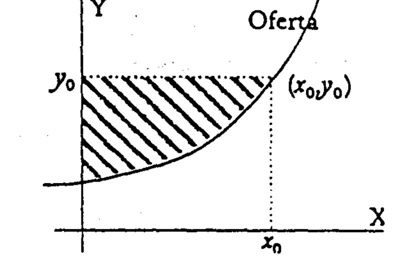


Ej 9-16 Una Función de Demanda es: $y = 18 - 3x$; Su Punto de Equilibrio está en: (4,6)

$$E_c = \int_0^{x_0} f_{(x)}\,dx - x_0\,y_0 = \int_0^4 (18 - 3x)dx - 4\cdot 6$$

$$= (18x - 3\frac{x^2}{2})\Big|_0^4 - 24 = 48 - 24 = 24$$

EXCEDENTES DE PRODUCTOR



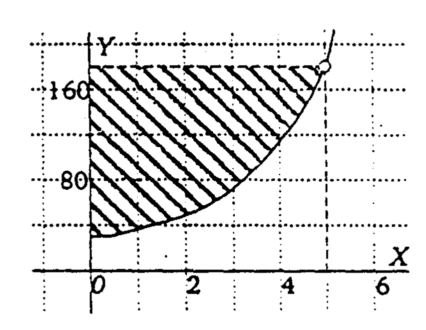
Si una Función de Oferta es $y = f_{(x)}$ (El precio es y, las Unidades ofertadas x) Tiene su Punto de Equilibrio (Intersección con la demanda) en: (x_0, y_0)

Existirán productores dispuestos a vender a un precio menor a y_0; Entonces la Ganancia Total del Productor se definirá como: EXCEDENTE DE PRODUCTOR, se representa gráficamente como el Área indicada.

La evaluación de tal Área puede efectuarse mediante:



$$E_p = x_0\,y_0 - \int_0^{x_0} f_{(x)}\,dx$$

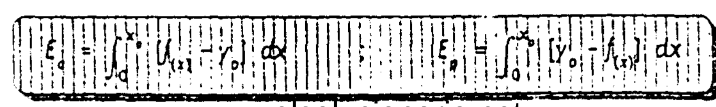


Ej 9-17 Una Función de Oferta es: $f_{(x)} = 6x^2 + 30$. Su Punto de Equilibrio está en: (5,180)

$$E_p = x_0\,y_0 - \int_0^{x_0} f_{(x)}\,dx = 5\cdot 180 - \int_0^5 (6x^2 - 30)dx$$

$$= 900 - (6\frac{x^3}{3} + 30x)\Big|_0^5 = 900 - 400 = 500$$

Otras maneras de calcular los Excedentes de Consumidor y de Productor, usando los mismos conceptos son:

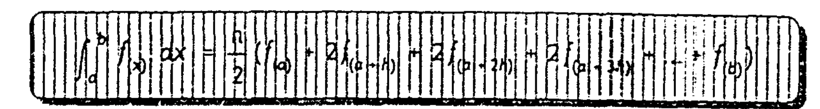


$$E_c = \int_0^{x_0} [f_{(x)} - y_0]\,dx \quad ; \quad E_p = \int_0^{x_0} [y_0 - f_{(x)}]\,dx$$

IX-9 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

La Integración Numérica consiste en la determinación aproximada de una Integral Definida, mediante Métodos Numéricos. Los principales Métodos son:

MÉTODO DE LOS TRAPECIOS Este Método calcula una Integral Definida, mediante la relación:



$$\int_a^b f_{(x)}\, dx = \frac{h}{2}\left(f_{(a)} + 2f_{(a+h)} + 2f_{(a+2h)} + 2f_{(a+3h)} + \cdots + f_{(b)}\right)$$

Para una mejor aproximación h debe ser pequeño, para ello se elige n según: $h = \dfrac{b-a}{n}$; $f_{(b)} = f_{(a+nh)}$

MÉTODO DE SIMPSON Este Método calcula una Integral Definida, mediante la relación:



$$\int_a^b f_{(x)}\, dx = \frac{h}{3}\left(f_{(a)} + 4f_{(a+h)} + 2f_{(a+2h)} + 4f_{(a+3h)} + \cdots + 4f_{(a+(n-1)h)} + f_{(b)}\right)$$

Para una mejor aproximación h debe ser pequeño, para ello se elige n par según: $h = \dfrac{b-a}{n}$; $f_{(b)} = f_{(a+nh)}$

Ej 9-18 Se calculará:

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2+1}\, dx \qquad Si:\ f_{(x)} = \frac{1}{x^2+1}$$

Eligiendo: $n = 6$

$$h = \frac{b-a}{6} = \frac{4-1}{6} = 0.5$$

Por Trapecios:

$$\int_a^b f_{(x)}\, dx = \frac{h}{2}[f_{(a)} + 2f_{(a+h)} + 2f_{(a+2h)} + 2f_{(a+3h)} + 2f_{(a+4h)} + 2f_{(a+5h)} + f_{(b)}]$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{0.5}{2}[f_{(1)} + f_{(1.5)} + f_{(2)} + f_{(2.5)} + f_{(3)} + f_{(3.5)} + f_{(4)}]$$

$$= \frac{0.5}{2}[0.500 + 0.615 + 0.400 + 0.276 + 0.200 + 0.151 + 0.059] = 0.55$$

Por Simpson:

$$\int_a^b f_{(x)}\, dx = \frac{h}{2}[f_{(a)} + 4f_{(a+h)} + 2f_{(a+2h)} + 4f_{(a+3h)} + 2f_{(a+4h)} + 4f_{(a+5h)} + f_{(b)}]$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{0.5}{3}[f_{(1)} + 4f_{(1.5)} + 2f_{(2)} + 4f_{(2.5)} + 2f_{(3)} + 4f_{(3.5)} + f_{(4)}]$$

$$= \frac{0.5}{3}[0.500 + 1.231 + 0.400 + 0.552 + 0.200 + 0.302 + 0.059] = 0.54$$

El cálculo exacto de la Integral, por definiciones previas es:

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2+1}\, dx = Arctan\, x \Big|_1^4 = Arctan\, 4 - Arctan\, 1 = 0.540$$

Comparando resultados, el Método de Simpson, brinda resultados mas exactos.

No todas las Funciones pueden integrarse, al menos en términos de las Funciones elementales, sin embargo los Métodos de Integración Numérica, permiten aproximar con la precisión requerida. La aproximación al resultado exacto será mayor, mientras mayor sea n

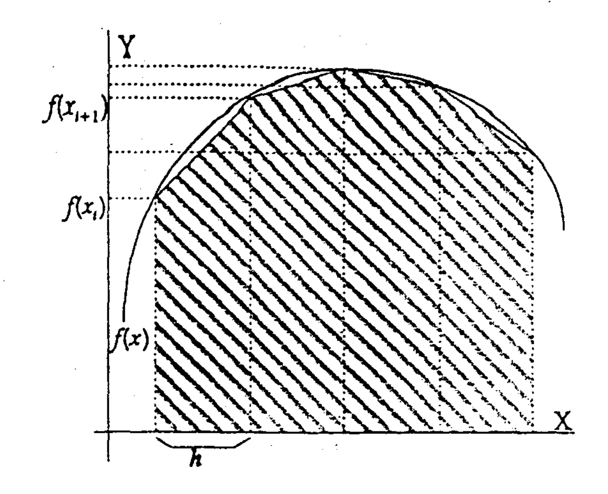
Actualmente las Calculadoras, permiten un rápido y fácil cálculo con una alta precisión de cualquier Integral Definida, para ello usan alguno de los Métodos Numéricos antes indicados.

La demostración de la Fórmula de los Trapecios, parte de la Interpretación Geométrica de una Integral Definida como Área.

El Área entre: $a \le x \le b$, debajo de la curva de: $f_{(x)}$, se aproxima con n Trapecios.

El Área de un Trapecio de Alturas: $f_{(x_i)}$; $f_{(x_{i+1})}$ de base h es

$$A_i = \frac{f_{(x_i)} + f_{(x_{i+1})}}{2} h$$



La Suma de las Áreas de los n Trapecios, es aproximadamente el Área debajo de la curva.

El Área exacta es la Integral Definida:

$$A = \int_a^b f_{(x)}\, dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} h + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} h + \ldots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} h$$

Ordenando y simplificando: $x_0 = a$; $x_1 = a+h$; $x_2 = a+2h$;...; $x_n = a+nh = b$

$$\int_a^b f_{(x)}\, dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + 2f(a+3h) + \ldots + 2f(a+(n-1)h) + f(b) \right]$$

9-16 Utilizando la Regla de los Trapecios, integrar:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx \qquad Si: \; f_{(x)} = \sqrt{1+x^3} \qquad \text{Tomando: } n = 5 \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

$$\int_a^b f_{(x)}\, dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + 2f(a+3h) + \ldots + f(b)]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + 2f(0.6) + 2f(0.8) + f(1) \right]$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx \approx \frac{0.2}{2}\left[1.0000 + 2.0080 + 2.0630 + 2.2054 + 2.4593 + 1.4142 \right]$$

$$\approx 1.11499 \approx 1.1150$$

9-17 Utilizando la Regla de Simpson, integrar:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \qquad Si: \; f_{(x)} = e^{-x^2} \qquad \text{Tomando } n = 4 \quad h = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

$$\int_a^b f_{(x)}\, dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \ldots + f(b) \right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.50) + 4f(0.75) + f(1) \right]$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{0.25}{3}\left[1.0000 + 3.7576 + 1.5576 + 2.2791 + 0.3679 \right] = 0.7468 \approx 0.747$$

Luego de calcular con cuatro cifras decimales, se redondea a tres cifras decimales, para precisamente evitar los errores de redondeo de las anteriores operaciones.

El Método de Simpson usa curvas de Segundo Grado, para aproximar una Integral Definida, por ello posee mayor precisión que el Método de los Trapecios, que a su vez usa Rectas para aproximar

IX.- PROBLEMAS PROPUESTOS

9-1 Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 \quad P(1,5)$ b) $\dfrac{dy}{dx} = 6x \quad P(2,8)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = e^x \quad P(0,0)$ d) $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 1 \quad P(0,0)$

$y = 3x^3 + 2$
$y = 3x^2 - 4$
$y = e^x - 1$
$y = 2x^3 + x$

9-2 Hallar las Ecuaciones de las curvas, que poseen la pendiente m y pasan por el punto indicado.

a) $m = 2x \ ; \ (0,1)$ b) $m = 4 - 2x \ ; \ (2,4)$ $y = x^2 + 1 \ ; \ y = 4x - x^2$

c) $m = 2x - 6 \ ; \ (7,9)$ d) $m = \dfrac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \ ; \ (a,0)$ $y = x^2 - 6x + 2 \ ; \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

9-3 Hallar las Áreas comprendidas entre las Funciones e Intervalos indicados:

a) $y = x^2 \ : \ 0 \le x \le 2$ b) $y = 4 - x^2 : 0 \le x \le 2$ 8/3 ; 16/3

c) $y = x^2 - 4x + 5 : 0 \le x \le 3$ d) $y = x^3 + 1 : 0 \le x \le 1$ 6 ; 5/4

e) $y = 2^x \ : \ 0 \le x \le 2$ f) $y = \cos x : 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ 4.33 ; 1

9-4 Hallar las Áreas comprendidas entre las curvas de:

a) $y = x^2 ; y = x + 2$ b) $y = x^2 - 4 ; y = 8 - 2x^2$ $\dfrac{9}{2}$; 32

c) $y = 9 - x^2 ; y = x + 3$ d) $y = e^x ; y = e^{-x} ; 0 \le x \le 2$ $\dfrac{125}{6}$; 5.52

e) $y = \dfrac{1}{1 + x^2} ; y = 0$ f) $y = e^{-x}\operatorname{Sen} x ; 0 \le x \le \pi$ $\pi \ ; \ \dfrac{1 + e^{-\pi}}{2}$

g) $y = x^2 ; y = \sqrt{x}$ h) $y = x^2 ; y = x^3/3$ $\dfrac{1}{3} ; \dfrac{9}{4}$

i) $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$ j) $y = e^{2x} - 3 ; x = 0$, $y = e^x - 1$ $\dfrac{32\sqrt{6}}{3} ; Ln\ 4 - \dfrac{1}{2}$

k) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ l) $y = x - 2 ; y^2 = x$ $\dfrac{3\pi a^2}{8} ; \dfrac{9}{2}$

m) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 ; x = 2a$ n) $x^2 = y^2 = 16$, $x^2 = 12(y - 1)$ $2.15ab \ ; \ \dfrac{16\pi - 4\sqrt{3}}{3}$

9-5 Hallar los Volúmenes de Revolución, generados por las siguientes Regiones:

a) $y = 2x^2$; Eje X, $0 \le x \le 2$ b) $y = 2x^2$; Eje Y, $0 \le x \le 2$ $\dfrac{128\pi}{5} ; 16\pi$

c) $y = \sqrt{8x}$; Eje X, $0 \le x \le 2$ d) $y = \sqrt{8x}$; Eje Y, $0 \le x \le 2$ $16\pi ; \dfrac{64\pi}{5}$

e) $y = e^{-x^2}$; Eje Y, $0 \le x \le 1$ f) $y = \dfrac{x^2}{2} ; y = \dfrac{x^3}{8}$; Eje X $\pi(1 - \dfrac{1}{e}) ; \dfrac{512\pi}{35}$

g) $y = 4x - x^2$; Eje X, $y = x^2$ h) $y = x^2 ; y^2 = x$; Eje X $\dfrac{32\pi}{3} ; 0.3\pi$

9-6 Hallar las Longitudes de curva de:

a) $y = x^{3/2}$; $0 \le x \le 5$ b) $y = x^2/2$; $0 \le x \le 1$ $\frac{335}{27}$; 1.15

c) $y^2 = 12x$; $0 \le x \le 3$ d) $y = 2\sqrt{x}$; $0 \le x \le 1$ 13.77 ; 4.59

e) $y = Ln(Cos\,x)$; $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$ f) $y = Ln\,x$; $1 \le x \le \sqrt{8}$ 0.33 ; 2.12

g) $y = a\,Cosh\,\frac{x}{a}$; $0 \le x \le b$ h) $(\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} = 1$ $a\,Senh\,\frac{b}{a}$; $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

i) $x = t - Sen\,t$, $y = 1 - Cos\,t$ $0 \le t \le 2\pi$ j) $y = t^3$, $x = t^2$; $0 \le t \le 4$ 8 ; 66.39

k) $x = R(Cos\,t + t\,Sen\,t)$, $y = R(Sen\,t - t\,Cos\,t)$ l) $x^2 + y^2 = R^2$ $\frac{\pi^2 R}{2}$; $2\pi R$

9-7 Hallar las Áreas de Superficies de Revolución correspondientes a:

a) $y^2 = 12x$; Eje X, $0 \le x \le 3$ b) $y^3 = x$; Eje Y, $0 \le y \le 1$ 137.86 ; 3.56

c) $y = \frac{1}{3}x^3$; Eje X, $0 \le x \le 3$ d) $y = \frac{1}{3}x^3$; Eje Y, $0 \le x \le 3$ 258.85 ; 132.56

e) $y = Ln\,x$; Eje Y, $1 \le x \le 7$ f) $y = Tan\,x$; Eje X, $0 \le x \le \pi/4$ 156.6 ; 3.84

9-8 Hallar los Centros Geométricos de las Áreas determinadas por:

a) $y = x^2$; $0 \le x \le 3$ b) $y = x^2$; $y = 9$ $(\frac{9}{4}, \frac{27}{10})$; $(0, \frac{27}{5})$

c) $y = 4x - x^2$; $y = 0$ d) $y = Sen\,x$; $0 \le x \le \pi$ $(2, \frac{8}{5})$; $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $x \ge 0$; $y \ge 0$ f) $y = 4x - x^2$; $y = x$ $(\frac{a}{5}, \frac{a}{5})$; $(\frac{3}{2}, \frac{12}{5})$

g) $x = t - Sen\,t$, $y = 1 - Cos\,t$ h) $x = Cos^3 t$; $x \ge 0$, $y = Sen^3 t$; $y \ge 0$ $(\pi, \frac{5}{6})$; $(\frac{256}{315\pi}, \frac{256}{315\pi})$

9-9 Hallar la Fuerza, que por Presión determina un fluido de Peso específico γ sobre una Superficie verticalmente sumergida, que posee la forma de:

a) $y = x^2$; $\gamma = 10$, $y = 4$ b) $y = 4 - x^2$; $\gamma = 45$, $y = 0$ 256 ; 768

c) $3x + 2y = 10$; $\gamma = 800$ c) Semicírculo, Radio 2 base sobre el nivel ; $\gamma = 900$ 7200 ; 4800

9-10 Utilizando tres decimales, integrar numéricamente por el Método indicado:

a) $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$ Trapecios con: $n = 5$ b) $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$ Simpson con: $n = 4$ 1.115 ; 1.111

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}}\,dx$ Simpson con: $n = 8$ d) $\int_0^{\pi/2} \frac{Sen\,x}{x}\,dx$ Simpson con: $n = 6$ 0.614 ; 1.371



PRODUCTOS NOTABLES

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

COCIENTES NOTABLES

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$$ Para todo n Natural

$$\frac{a^n + b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}$$ Para n Impar

$$\frac{a^n - b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - b^{n-1}$$ Para n Par

$$\frac{a^n + b^n}{a-b} = ?? \quad \text{(División no exacta)}$$ Para ningún n

BINOMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$$

$$= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \; ; \; \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

EXPONENTES $(a, b > 0)$

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (ab)^n = a^n b^n \qquad a^0 = 1 \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad a = a^1 \qquad 0^a = 0 \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

LOGARITMOS $(a, b, N > 0)$

$$Log\,(ab) = Log\,a + Log\,b \qquad Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b} \qquad Log\,0 = -\infty$$

$$Log\left(\frac{a}{b}\right) = Log\,a - Log\,b \qquad Log\,1 = 0$$

$$Log\,(a^n) = n\,Log\,a \qquad Log\,(-a) = ?? \;\text{(Imaginario)} \qquad Log_a a = 1$$

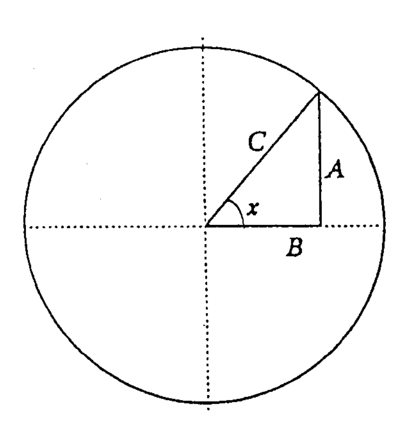
SUMAS

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{8}n \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

APÉNDICE B

TRIGONOMETRÍA



$$\text{Sen } x = \frac{A}{C} \qquad \text{Cos } x = \frac{B}{C} \qquad \text{Tan } x = \frac{A}{B} \qquad \text{Cot } x = \frac{B}{A} \qquad \text{Sec } x = \frac{C}{B} \qquad \text{Csc } x = \frac{C}{A}$$

$$\text{Sen } x = \frac{1}{\text{Csc } x} \qquad \text{Cos } x = \frac{1}{\text{Sec } x} \qquad \text{Tan } x = \frac{1}{\text{Cot } x}$$

$$\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1 \qquad \text{Tan}^2 x + 1 = \text{Sec}^2 x \qquad \text{Cot}^2 x + 1 = \text{Csc}^2 x$$

$$\text{Csc } x = \frac{1}{\text{Sen } x} \qquad \text{Sec } x = \frac{1}{\text{Cos } x} \qquad \text{Cot } x = \frac{1}{\text{Tan } x} \qquad \text{Tan } x = \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} \qquad \text{Cot } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sen } x}$$

$$\text{Sen}(x \pm y) = \text{Sen } x \text{ Cos } y \pm \text{Sen } y \text{ Cos } x$$

$$\text{Cos}(x \pm y) = \text{Cos } x \text{ Cos } y \mp \text{Sen } x \text{ Sen } y$$

$$\text{Tan}(x \pm y) = \frac{\text{Tan } x \pm \text{Tan } y}{1 \mp \text{Tan } x \text{ Tan } y}$$

$$\text{Sen } 2x = 2 \text{ Sen } x \text{ Cos } x \qquad \text{Cos } 2x = \text{Cos}^2 x - \text{Sen}^2 x \qquad \text{Tan } 2x = \frac{2 \text{ Tan } x}{1 - \text{Tan}^2 x}$$

$$\text{Sen}(-x) = -\text{Sen } x \qquad \text{Cos}(-x) = \text{Cos } x \qquad \text{Tan}(-x) = -\text{Tan } x$$

$$\text{Sen } x + \text{Sen } y = 2 \text{ Sen } \frac{x+y}{2} \text{ Cos } \frac{x-y}{2}$$

$$\text{Sen } x - \text{Sen } y = 2 \text{ Cos } \frac{x+y}{2} \text{ Sen } \frac{x-y}{2}$$

$$\text{Cos } x + \text{Cos } y = 2 \text{ Cos } \frac{x+y}{2} \text{ Cos } \frac{x-y}{2}$$

$$\text{Cos } x - \text{Cos } y = 2 \text{ Sen } \frac{x+y}{2} \text{ Sen } \frac{x-y}{2}$$

$$\text{Sen } x \text{ Cos } y = \frac{\text{Sen}(x+y) + \text{Sen}(x-y)}{2}$$

$$\text{Cos } x \text{ Cos } y = \frac{\text{Cos}(x+y) + \text{Cos}(x-y)}{2}$$

$$\text{Sen } x \text{ Sen } y = \frac{\text{Cos}(x-y) - \text{Cos}(x+y)}{2}$$

$$\text{Sen}^2 x = \frac{1 - \text{Cos } 2x}{2} \qquad \text{Cos}^2 x = \frac{1 + \text{Cos } 2x}{2} \qquad \text{Tan}^2 x = \frac{1 - \text{Cos } 2x}{1 + \text{Cos } 2x}$$

$$\text{Sen } x + \text{Sen } 2x + \text{Sen } 3x + \ldots + \text{Sen } mx = \frac{\text{Sen}[mx/2] \text{ Sen}[(m+1)x/2]}{\text{Sen}[x/2]}$$

Grados / Radianes	0° / 0	30° / π/6	45° / π/4	60° / π/3	90° / π/2	120° / 2π/3	135° / 3π/4	150° / 5π/6	180° / π	270° / 3π/2	360° / 2π
Sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	0	1
Tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	-∞	0
Cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	-∞	0	∞
Sec	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}/3$	-1	∞	1
Csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞

TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$y = \text{Sen } x \Rightarrow x = \text{Arcsen } y = \text{Sen}^{-1} y$$

$$y = \text{Cos } x \Rightarrow x = \text{Arccos } y = \text{Cos}^{-1} y$$

$$y = \text{Tan } x \Rightarrow x = \text{Arctan } y = \text{Tan}^{-1} y$$

$$\text{Arccsc } x = \text{Csc}^{-1} x = \text{Arcsen } 1/x$$

$$\text{Arcsec } x = \text{Sec}^{-1} x = \text{Arccos } 1/x$$

$$\text{Arccot } x = \text{Cot}^{-1} x = \text{Arctan } 1/x$$

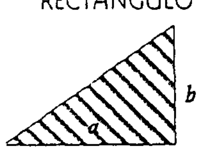
$$\text{Arcsen } x + \text{Arcsen } y = \text{Arcsen}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

$$\text{Arccos } x + \text{Arccos } y = \text{Arccos}(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } y = \text{Arctan } \frac{x+y}{1-xy}$$

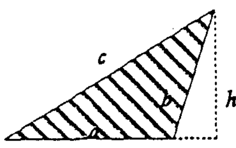
GEOMETRÍA

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



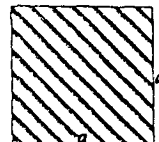
$A = \frac{1}{2}ab$

TRIÁNGULO



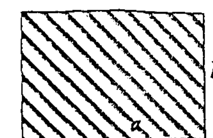
$A = a^2$

CUADRADO



$A = ab$

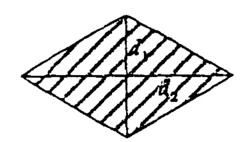
RECTÁNGULO



$A = (ah)/2\ ;\ s = (a+b+c)/2$

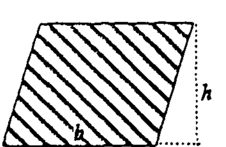
$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ROMBO



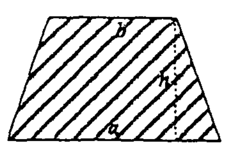
$A = \frac{1}{2}d_1\ d_2$

PARALELOGRAMO



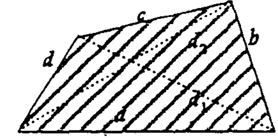
$A = bh$

TRAPECIO



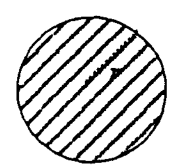
$A = \frac{a+b}{2}h$

TRAPEZOIDE



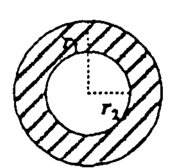
$A = \frac{1}{2}\sqrt{4(d_1d_2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$

CÍRCULO



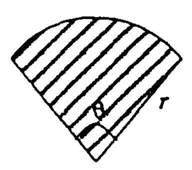
$A = \pi r^2$

CORONA



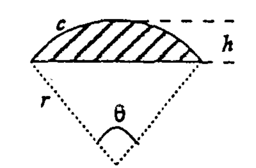
$A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$

SECTOR CIRCULAR



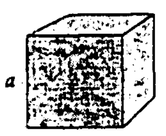
$A = \pi r^2 \frac{\theta°}{360°}$

SEGMENTO CIRCULAR



$A = \pi r^2 \frac{\theta°}{360} - \frac{c(r-h)}{2}$

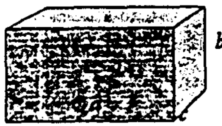
CUBO



$S = 6a^2$

$V = a^3$

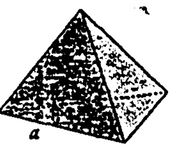
PARALELEPÍPEDO



$S = 2(ab + ac + bc)$

$V = abc$

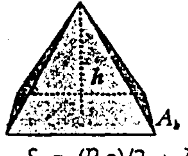
TETRAEDRO



$S = \sqrt{3}\ a^2$

$V = (\sqrt{2}\ a^3)/12$

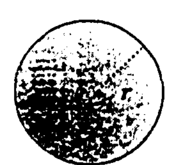
PIRÁMIDE



$S = (Pa)/2 + A_b$

$V = (A_b\ h)/3$

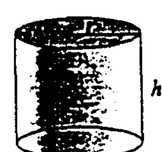
ESFERA



$S = 4\pi R^2$

$V = (4\ \pi R^3)/3$

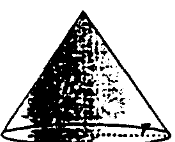
CILINDRO



$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$V = \pi r^2 h$

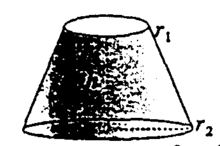
CONO



$S = \pi rg + \pi r^2$

$V = \pi r^2 h/3$

TRONCO DE CONO

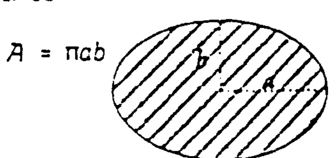


$S = \pi g(r_1 - r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

$V = \pi h(r_1 r_2 + r_1^2 + r_2^2)/3$

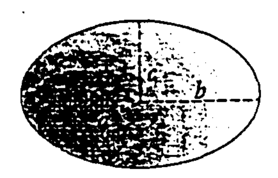
ELIPSE

$A = \pi ab$



ELIPSOIDE

$V = \frac{4}{3}\pi abc$



APÉNDICE D   FÓRMULAS DE CÁLCULO

LÍMITES

DEFINICIÓN $\lim_{x \to a} f_{(x)} = L$; Si: $|f_{(x)} - L| < \epsilon$ Siempre que: $0 < |x - a| < \delta$ Donde: $\epsilon, \delta > 0$

OPERACIONES CONOCIDAS $(a > 0)$

$0 + 0 = 0$	$\frac{0}{a} = 0$	$0^a = 0$	$a + \infty = \infty$	$\infty + \infty = \infty$	$0 + \infty = \infty$
$0 \cdot 0 = 0$	$\frac{a}{0} = \infty$	$0^\infty = 0$	$a \cdot \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
$a + 0 = a$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases}$	$\frac{\infty}{a} = \infty$	$\infty^\infty = \infty$	$\frac{0}{\infty} = 0$
$a \cdot 0 = 0$			$\frac{a}{\infty} = 0$	$\infty^a = \infty$	
				$Ln\, \infty = \infty$	

INDETERMINACIONES $\frac{0}{0} = ?$; $\frac{\infty}{\infty} = ?$; $1^\infty = ?$; $\infty^0 = ?$; $0 \cdot \infty = ?$; $\infty - \infty = ?$; $0^0 = ?$

LÍMITES COMUNES

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = Ln\, a$; $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$; $\lim_{x \to 0} \frac{Sen\, x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{1 - Cos\, x}{x} = 0$

DERIVADAS

Definición: $f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$; $f'_{(x)} = \frac{d f_{(x)}}{dx} = y' = \frac{dy}{dx}$

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(c)' = 0$; $(c\,u)' = c\,u'$

$(u^v)' = u^v(v' Ln\, u + \frac{v}{u} u')$

$(x^m)' = m x^{m-1}$

$(a^x)' = a^x Ln\, a$

$(e^x)' = e^x$

$(Ln\, x)' = \frac{1}{x}$

$[u_{(v)}]' = u' \cdot v'$

$(Sen\, x)' = Cos\, x$

$(Cos\, x)' = -Sen\, x$

$(Tan\, x)' = Sec^2 x$

$(Cot\, x)' = -Csc^2 x$

$(Sec\, x)' = Sec\, x\, Tan\, x$

$(Csc\, x)' = -Csc\, x\, Cot\, x$

$(Arcsen\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(Arccos\, x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(Arctan\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

INTEGRALES

$\int f_{(x)}\, dx = F_{(x)} + c \quad (F'_{(x)} = f_{(x)})$; $\int_a^b f_{(x)}\, dx = F_{(x)} \Big|_a^b = F_{(b)} - F_{(a)}$

$\int (f + g)\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx$

$\int a\, f\, dx = a \int f\, dx$

$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m + 1} \quad m \neq -1$

$\int \frac{1}{x}\, dx = Ln\, |x|$

$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{Ln\, a}$

$\int e^x\, dx = e^x$

$\int u\, dv = u\,v - \int v\, du$

$\int Sen\, x\, dx = -Cos\, x$

$\int Cos\, x\, dx = Sen\, x$

$\int Tan\, x\, dx = -Ln|Cos\, x|$

$\int Cot\, x\, dx = Ln|Sen\, x|$

$\int Sec\, x\, dx = Ln|Sec\, x + Tan\, x|$

$\int Csc\, x\, dx = -Ln|Csc\, x + Cot\, x|$

$\int Sec^2 x\, dx = Tan\, x$

$\int Csc^2 x\, dx = -Cot\, x$

$\int Senh\, x\, dx = Cosh\, x$

$\int Cosh\, x\, dx = Senh\, x$

$\int Tanh\, x\, dx = Ln|Cosh\, x|$

$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} Arctan \frac{x}{a}$

$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} Ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|$

$\int \frac{g'_{(x)}}{g_{(x)}}\, dx = Ln\, |g_{(x)}|$